МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2-2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}, \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=1:3$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=2$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x-6|2x-1|\leqslant ax+b\leqslant -8x^2+6x+7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 22$, $2\leqslant y\leqslant 22$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. для геом. прогрессии верно: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ => (где a_n (÷))
b можно представить как aq, c можно представить как aq^2, где $q \neq 0$

рассмотрим ур-ие $ax^2 - 2bx + c = 0$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$$

подставим $b = aq$, $c = aq^2$:

$$x_{1,2} = \frac{aq \pm \sqrt{a^2q^2 - a \cdot aq^2}}{a}; \quad x_{1,2} = \frac{aq \pm 0}{a} \Rightarrow x = q$$

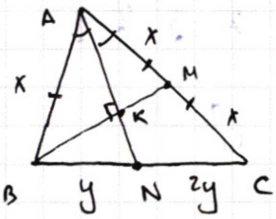
т.к. x - четвертый член прогрессии, то $a_4 = a_1 q^3$

$a_1 q^3 = q$ $|:q$, т.к. $q \neq 0$

$aq^2 = 1$, но $aq^2 = c$ => третий член прогрессии $= 1$

Ответ: 1

№2



пусть медиана $BM \perp AN$, где AN - бисс-а $\triangle ABC$.
$K = BM \cap AN$
$\triangle ABM$ равнобедр, т.к. AK бисс-а и $AK \perp BM$ => $AB = AM$ => $AC = AM + MC = 2AM = 2AB$

по св-ву бисс-ы для $\triangle ABC$ верно:

$\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2}$ => пусть $BN = y$, тогда $NC = 2y$

пусть $AB = x$, тогда $AC = 2x$

по условию: $2x + x + 2y + y = 900$ (периметр $\triangle ABC$)

по нер-ву тр-ка для $\triangle ABC$: $x < 2x + 3y$ (+)

$3y < 3x \Rightarrow y < x$

$2x < x + 3y$

$x < 3y$

$3x + 3y = 900$

$$\begin{cases} x + y = 300 \\ x < 3y \\ y < x \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 300 - y \\ 300 - y < 3y \\ 300 - y > y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 300 - y \\ 300 < 4y \\ 300 > 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 300 - y \\ 75 < y \\ 150 > y \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 300 - y \\ 76 \le y \\ 149 \ge y \end{cases}$$

(т.к. $x, y \in \mathbb{N}$)

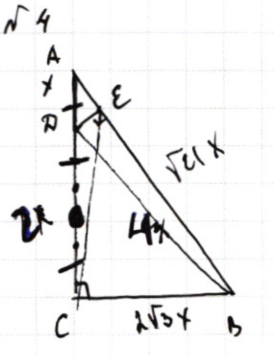
=> кол-во треугольников: $149 - 76 + 1 = 74$

Ответ: 74

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4



$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3AD = AC$

$\angle CED = 30°$

пусть $AD = x$, тогда $DC = 2x$, $AC = 3x$

чет-ик $BEDC$ вписанный, т.к. $\angle C + \angle E = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC$, т.к. опираются на общую хорду DC $\Rightarrow \angle DBC = 30°$

$\triangle CDB$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 90° \Rightarrow \angle D = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2CD = DB = 4x$

тогда CB (по т. Пифагора) $= \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12}\,x = 2\sqrt{3}\,x$

а) $\tan\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{\sqrt{12}\,x}{3x} = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $\triangle DCB$, по т. Пифагора $CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12}\,x = 2\sqrt{3}\,x$

$\triangle ABC$, по т. Пифагора $AB = \sqrt{12x^2 + 9x^2} = \sqrt{21}\,x$

$\triangle CAB \sim \triangle EAD$ по двум углам ($\angle E = \angle C = 90°$, $\angle A$ - общий)

$\Rightarrow \frac{CA}{EA} = \frac{CB}{ED} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow ED = \frac{EA \cdot CB}{CA} = \frac{EA \cdot 2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}\,EA}{3}$

$\Downarrow$

$AE \cdot AB = CA \cdot AD = 3x \cdot x = 3x^2 \Rightarrow AE = \frac{3x^2}{AB}$

$EB = AB - AE = AB - \frac{3x^2}{AB} = \frac{AB^2 - 3x^2}{AB}$

$\frac{AE}{EB} = \frac{3x^2}{AB} \cdot \frac{AB}{AB^2 - 3x^2} = \frac{3x^2}{AB^2 - 3x^2} = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3})^2 - 3(\frac{\sqrt{7}}{3})^2} =$

| $AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$= \frac{3}{21 - 3} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ пусть $AE = y \Rightarrow EB = 6y$

$AE + EB = AB = y + 6y = \sqrt{21}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}$

$7y = \frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}}{7\cdot 3} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{21}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$\Rightarrow$ ~~$AE = \frac{\sqrt{3}}{3} \ldots \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} \ldots \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$~~ $\Rightarrow S_{\triangle DAE} = DE \cdot \frac{1}{2} \cdot AE = \frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{3\cdot 2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

~~$= \frac{3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{3}\cdot\frac{7}{43}}{8} = \frac{3\sqrt{3}\cdot 7}{43\cdot 8}$~~

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}h \cdot AD$ $\quad S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}h \cdot DC$, где $h = EL$, ~~тогда~~ $EL \perp AC$, (высота AEC) $L = EL \cap AC$.

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}h \cdot x$, $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}h \cdot 2x$

$\Rightarrow S_{\triangle CED} = 2 \cdot S_{\triangle ADE} =$ ~~$\frac{9\sqrt{3}\cdot 7\cdot 3}{43\cdot 8} = \frac{63\sqrt{3}}{344} = \frac{\sqrt{3}}{21} \ldots \frac{\sqrt{3}}{3}$~~ $=$

$\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: ~~$\frac{63\sqrt{3}}{344}$~~ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\quad 8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$2x-1$ $\quad - \; \frac{1}{2} \; + \quad x$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

$8x + 12x - 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x + 12x - 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + 14x - 13 \le 0$

$8x^2 + 14x - 13 = 0$

$D = 14^2 + 4 \cdot 13 \cdot 8 = 196 + 32 \cdot 13 = 196 + 416 =$

$= 612 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 17$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{17}}{8}$

$x = -\frac{1}{2}$

$-4 - 6|2 \cdot (-\frac{1}{2}) - 1| \le a \cdot (-\frac{1}{2}) + b \le -8 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot (-\frac{1}{2}) + 7$

$-4 - 12 \le a \cdot (-\frac{1}{2}) + b \le -2 - 3 + 7$

$-16 \le -\frac{1}{2}a + b \le 2 \quad (3)$

$x = \frac{1}{2}$

$4 - 6 \cdot 0 \le \frac{a}{2} + b \le -2 + 3 + 7$

$4 \le \frac{1}{2}a + b \le 8 \quad (1)$

$x = 0$

$-6 \le b \le 7 \Rightarrow -7 \le -b \le 6 \quad (2)$

(1) + (2)

$-3 \le \frac{1}{2}a \le 14$

$-6 \le a \le 28$

(2) + (3)

$-23 \le -\frac{1}{2}a \le 8$

$-16 \le a \le 46$

№6 продолжение $\quad$ (2) $-7 \le -b \le 6$

$x \in [\frac{1}{2} ; 1]$

$8x - 12x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x - 12x + 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 - 10x - 1 \le 0$

$D = 100 + 4 \cdot 8 = 132 = \cancel{\ldots} = 12 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{132}}{16} = \frac{10 \pm 2\sqrt{33}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$

$x = \frac{1}{2}$

$4 - 6 + 6 \le ax + b \le -2 + 3 + 7$

$4 \le a \cdot \frac{1}{2} + b \le 8 \qquad (5)$

$x = 1: \quad 8 - 12 + 6 \le a + b \le -8 + 6 + 7$

$2 \le a + b \le 5 \qquad (6)$

(2) + (5)

$-3 \le \frac{1}{2} a \le 14$

$-6 \le a \le 28$

(2) + (6)

$-5 \le a \le 11$

все условие на a:

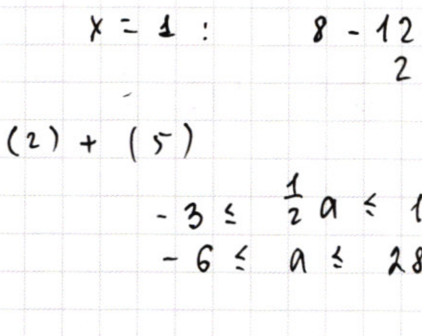
$-6 \le a \le 28$

$-5 \le a \le 11$

$-16 \le a \le 46$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{-14}{16}$

$8x^2 + 14x - 13 = 0, \quad x \in [-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}]$



$\frac{-7+3\sqrt{17}}{8} > \frac{1}{2} \quad | \cdot 8$, т.к.: $\sqrt{17} \approx 4 \quad (\sqrt{17} > 4)$

$-7 + 3\sqrt{17} > 4$,

$-7 + 12 > 4$,

$5 > 4$,

$-\frac{7+3\sqrt{17}}{8} < -\frac{1}{2} \quad | \cdot 8$, т.к. $(\sqrt{17} > 4)$

$-7 - 12 < -4$

$-20 < -4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение

$8x^2 - 10x - 1 \le 0$

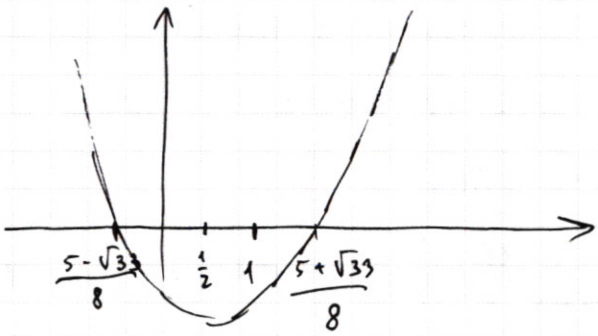
$8x^2 - 10x - 1 = 0$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{16}$

$x \in [\frac{1}{2}; 1]$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{8}$

$6 > \sqrt{33} > 5$



$\frac{5+\sqrt{33}}{8} > 1$, т.к.

$\frac{5+5}{8} > 1$ $(\sqrt{33} > 5)$

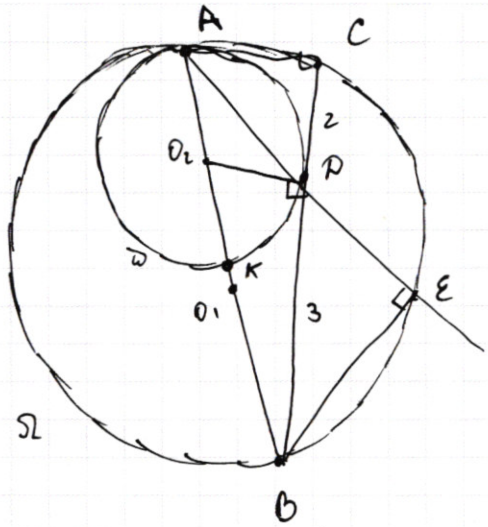
$\frac{10}{8} > 1$

=> мы можем взять ограничения

$(-7 \le -b \le 6)$ $-6 \le b \le 7$ и

$-5 \le a \le 11$

№5



O_1, O_2 – центры окруж. Ω и ω соответ.

$\angle ACB = \angle AED = 90^\circ$, т.к. AB – радиус

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2м углам, т.к. $\angle B$ – общий, $\angle D = \angle C = 90^\circ$ =>

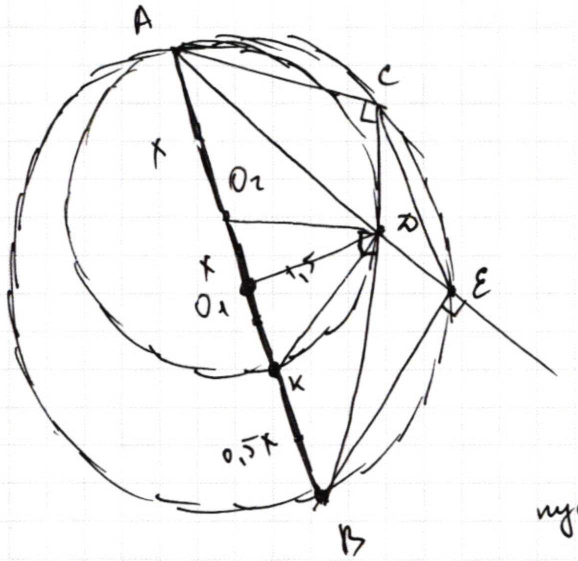
$$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} = \frac{DO_2}{AC}$$

$3r = 2(r + BK) \Rightarrow BK = \frac{1}{2}r$ $\qquad$ $5 \cdot BO_2 = 3 \cdot BA$

$CA \parallel O_2D$ (т.к. $O_2D \perp BC$ и $AC \perp BC$), $\angle ABC$ – общий =>

$\Rightarrow \frac{AO_2}{O_2B} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $2BO_2 = 3AO_2$

$$\begin{cases} 3AO_2 = 2O_2B \\ 5BO_2 = 3BA \end{cases}, \quad \begin{cases} 15AO_2 = 10O_2B \\ 10BO_2 = 6BA \end{cases} \Rightarrow 5AO_2 = 2BA = AO_2 = \frac{2BA}{5}$$



$5BO_2 = 3BA$

$3AO_2 = 2O_2B$, пусть r – радиус окруж. ω, $O_1K = r$ (или $2r - R$, где R – радиус Ω)

$3(r) = 2(R + O_1O_2)$

$3r = 2(r + KB)$

$3r : 2r \Rightarrow KB = \frac{1}{2}r$

пусть $AO_2 = x \Rightarrow O_2B = 1{,}5x$

~~$5 \cdot 1{,}5x = 3 \cdot 2{,}5x$~~

~~$7{,}5x = 7{,}5x$~~

$BD^2 = BK \cdot BA$, т.к. BD – касат.

$9 = 0{,}5x \cdot 2{,}5x = 1{,}25x^2$

$\Rightarrow r = \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}\ \frac{6}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $x^2 = \frac{9}{\frac{5}{4}} = \frac{9}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5}$

$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot 6}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ $\qquad$ $x = \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}\ \frac{6}{\sqrt{5}}$

Ответ: радиус $\omega = \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}}\ \frac{6}{\sqrt{5}}$, радиус $\Omega = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \frac{3\sqrt{5}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$, $\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$

$xy-6y-x+6 = x(y-1)-6(y-1) = (x-6)(y-1)$

$x-6y = x-6y-6+6 = (x-6)-6(y-1)$

$x^2+2y^2-12x-4y+20 = x^2-12x+36-16+2y^2-4y =$

$=(x-6)^2+2(y^2-2y+1-1)-16 = (x-6)^2+2((y-1)^2-1)-16 =$

$=(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

пусть $x-6=a$, $y-1=b$, тогда $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+2b^2-18=0 & (2) \end{cases}$

ДЗП: $a,b\geq 0$ или $a,b\leq 0$ и $a-6b\geq 0$

(1) $a-6b=\sqrt{ab}$, возведем в квадрат

$a^2-12ba+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$a^2=13ab+36b^2=b(13a+36b)$

(2) $a^2+2b^2-18=0$

$a^2=18-2b^2$

~~(3) и (4) $a^2=b(13a+36b)=18-2b^2$~~

(1) $a^2-13ab+36b^2=0$

решим относительно a

$D=(13b)^2-4\cdot 36b^2=169b^2-144b^2=25b^2=(5b)^2$

$a_{1,2}=\dfrac{13b\pm 5b}{2}$ $a_1=9b$, $a_2=4b$

(2) $a^2-18+2b^2=0$

$a=9b$: $81b^2+2b^2-18=0$

$83b^2-18=0$

$b^2=\frac{18}{83}$ $b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$ $b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} \Rightarrow a=-\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}$; $b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}\Rightarrow a=\frac{27\sqrt2}{83}$

$a=4b$: $16b^2-18+2b^2=0$

$18b^2-18=0$ $b=\pm1$ $b=1 \Rightarrow a=4$; $b=-1\Rightarrow a=-4$

- $b=1$, $a=4$ не подходит по ДЗП.
- $a=-4$ $b=-1$ $\Rightarrow$ $x=2$, $y=0$
- $b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}$ $a=\frac{-27\sqrt2}{\sqrt{83}}$ $-\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}+\frac{18\sqrt2}{\sqrt{83}}=-\frac{9\sqrt2}{\sqrt{83}}<0 \Rightarrow$ не подходит
- $b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}$ $a=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}$ $\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}-\frac{18\sqrt2}{\sqrt{83}}=\frac{9\sqrt2}{\sqrt{83}}\geq 0$, подходит

$\Rightarrow x=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}+6$; $y=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}+1$ Ответ: $(2;0)$; $\left(\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}}+6;\ \frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}+1\right)$

№5 продолжение

$\triangle O_1DB$, $O_1B = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $DB = 3$

(по т. Пифагора)

$\Rightarrow DO_1 = \sqrt{\ldots}$

$\Rightarrow DO_1 = \sqrt{\frac{9\cdot5}{4} - 9} = \sqrt{\frac{45}{4} - \frac{36}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow AC = \frac{DO_2 \cdot 5}{3} =$

$\triangle O_2DB$, $O_2B = 1{,}5x = \frac{3}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$DB = 3$

$DO_2 = \sqrt{\frac{81\cdot4}{16} - 9} = \sqrt{\frac{81\cdot4 - 9\cdot16}{16}} = \sqrt{\frac{9\cdot20}{16}} = \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c

$b = aq \quad c = aq^2$

заменяемый

$a; aq, aq^2, q$

$q = aq^3$

$1 = aq^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

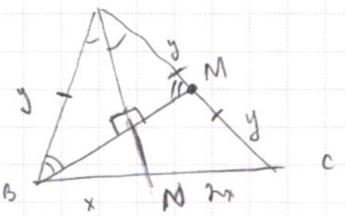
$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$

$x_{1,2} = \frac{+2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a}$

$x_1 = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$x_1 = \frac{aq + \sqrt{a^2q^2 - a^2q^2}}{a} = q$

№2



$\frac{BA}{AC} = \frac{BN}{NC} \quad \frac{BA}{2BA} = \frac{BN}{NC}$

$3y + 3x = 900$

$y + x = 300$

$2y < y + 3x \quad y < 3x$

$y < 2y + 3x \quad y + 3x > 0$

$3x < 3y \quad x < y$

$y < 3x$

$x < y \quad x < 150$

~~$y < 3x \quad 3x < y$~~

$y < 3x$

$y + x = 300$

$y = 300 - x$

$300 - x < 3x$

$300 < 4x$

$75 < x$

$150 > x \geq 76$

$\begin{array}{r} 149 \\ -\ 76 \\ \hline 73 \\ +\ 1 \\ \hline 74 \end{array}$

№3 $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$xy - 6y - x + 6 = 6(1-y) + x(y-1) = (6-x)(1-y)$

$x - 6y = (x-6)(y-1)$

$(x-6)^2 = 2((y-1)^2 + 7)$

$x^2 - 12x + 36 - 16 + 2y^2 - 4y = 0$

$(x-6)^2 - 2((y-1)^2 + 7) = 0$

~~$2y^2 - 4y + 16$~~

~~$2(y^2 - 2y + 8)$~~

$\frac{(x-6y)^2}{(y-1)^2} = 2((y-1)^2 + 7)$

$(x-6y)^2 = 2(y-1)^4 + 14(y-1)^2$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = 2(y^2 - 2y + y)(y^2 - 2y + y) + 14y^2 - 28y + 14$

$b - 6a = \sqrt{ab} \qquad b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$b^2 + 2a^2 + 18 = 0, \qquad b^2 + 2a^2 + 18 = 0$

~~$b^2 = -2(a^2 + 9)$~~

$16 + 2 - 18 = 0$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{4}$

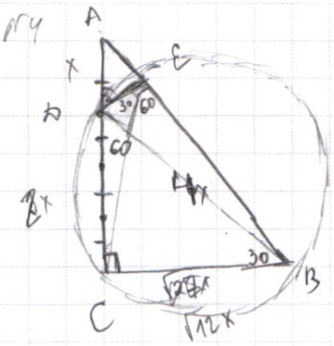
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

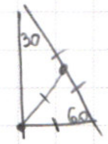
№4



$3x = R \quad \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$16 - 4$

$\frac{\sqrt{12x}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$



$\tan \angle BAC$

$\angle CED = 30^\circ$

$\sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x} = 2\sqrt{3}x$

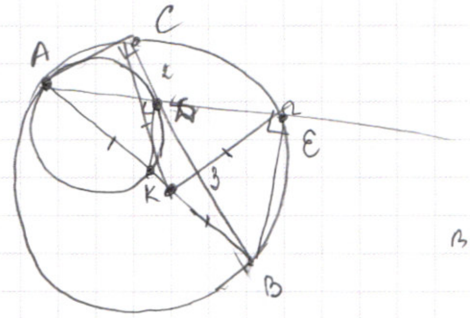
$\tan \angle BAC = \frac{\sqrt{27x}}{4x} = \frac{\sqrt{27}}{4} \quad \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{3} =$

$S = \frac{abc}{4R}$

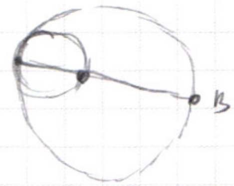
$AC = \sqrt{7} \Rightarrow 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$27x^2 + 16x^2 = 43x^2$?

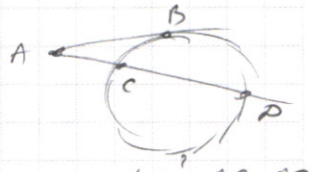
№5



$R_\omega, R_\Omega, S_{BACE}$ - ?



$BK \cdot BA = 8$



$AB^2 = AC \cdot AD$

№6 $\quad 8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \qquad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

$8x + 12x - 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$20x - 6 \le ax + b \le$

$20x - 6 \le ax + b$

$x(20 - a) \le b + 6$

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$b \le -8x^2 + x(6-a) + 7$

$x(20-a) - 6 \le -8x^2 + 6x - ax + 7$

$8x^2 + 14x - 13 \le 0$

$8(x + \frac{38}{16})(x - \frac{10}{16}) \le 0$

$-\frac{38}{16} \quad \frac{10}{16}$

$x(20-a) - 6 \le b$

$8\cdot(-\frac{1}{2}) + 12(-\frac{1}{2}) - 6 = -4 - 6 - 6 = -16$

$-8\cdot\frac{1}{4} + 6(-\frac{1}{2}) + 7 = -2 - 3 + 7 = +2$

$-16 \le -\frac{a}{2} + b \le 2$

$\frac{a}{2} \le 16 + b \quad \frac{a}{2} \ge b - 2$ лишь, как логично

$2x - 1$ $\quad - \quad \frac{1}{2} \quad + \quad x$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

$-8(x^2 - \frac{6}{8}x - \frac{7}{8}) = 0$

$D = 36 + 28\cdot 8 =$

$36 + 224 = 260 =$

$= 4\cdot 5\cdot 13$

$14^2 + 4\cdot 13\cdot 8 = 196 + 416 = 612 =$

$= 2\cdot 2\cdot 153 =$

$= 2^2\cdot 3^2\cdot 17 = (6\sqrt{17})^2$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16}$

$x_1 = \frac{10}{16} > \frac{1}{2} \quad x_2 = -\frac{38}{16} \approx 2,\dots$

$6\sqrt{17} \sim 24$

$-\frac{38}{16} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение

$S_{ADC} = xE \cdot \frac{1}{2} AE \qquad AB = \sqrt{12x^2 - 9x^2} = \sqrt{27}\,x \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\triangle ACB \sim \triangle AED$

$\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} \qquad \frac{3x}{AE} = \frac{AB}{x} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{ED} \Rightarrow ED = \frac{AE \cdot \sqrt{12}x}{3x} = \frac{\sqrt{12}AE}{3} \qquad 3x^2 = AE \cdot AB \qquad AE = \frac{3x^2}{AB} \qquad EB = \left(AB - \frac{3x^2}{AB}\right)$

$EB = \frac{AB^2 - 3x^2}{AB}$

$\sqrt{36x^2 - \frac{27AE^2}{16}} \cdot \frac{\sqrt{27}AE}{8}$

$AE = \frac{\sqrt{12} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{AE}{EB} = \frac{3x^2}{AB} \cdot \frac{AB}{AB^2 - 3x^2} = \frac{3x^2}{AB^2 - 3x^2}$

$\frac{EB}{AE} = \frac{AB^2}{4x^2} - 1$

AB

$\frac{AE}{EB} = \frac{3 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{27 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{3}{27-3} = \frac{1}{8}$

$4y + 39y = \frac{\sqrt{43 \cdot 7}}{4} \qquad y + 6y = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}}{3} \qquad y = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}}{7 \cdot 3} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

$\frac{\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{3}}{3} = \frac{\frac{2 \cdot 3}{3}}{3} = \frac{2}{3}$

$16y + 156y = \sqrt{301}$

$y = \frac{\sqrt{301}}{172} \qquad AE = \frac{4\sqrt{301}}{172} = \frac{2\sqrt{301}}{43} \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$S_{\triangle AED} = \frac{2\sqrt{301}}{43} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{27} \cdot \sqrt{301}}{43}}{\sqrt{7}}$

$S_{CED} = 3 \cdot S_{\triangle AED} = \frac{\sqrt{301} \cdot 2\sqrt{27} \cdot \sqrt{301}}{43^2 \cdot \sqrt{7}} = \frac{602\sqrt{27}}{43^2\sqrt{7}} = \frac{601 \cdot 3\sqrt{21}}{43^2}$

$\begin{cases} x^2 - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \end{cases} \qquad (x+6y) = t \qquad (y-1)(x-6)$

$t = \sqrt{}$

$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$, $a = y-1$, $b = x-6$

$xy - 6y - x + 6$

$y(x-6) - (x-6)$

$(y-1)(x-6)$

$x - 6y + 6 - 6$

$x - 6 + 6(y-1)$

$x^2 - 12x$

$(x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16$

$(x-6)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) + 18)$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 + 18$

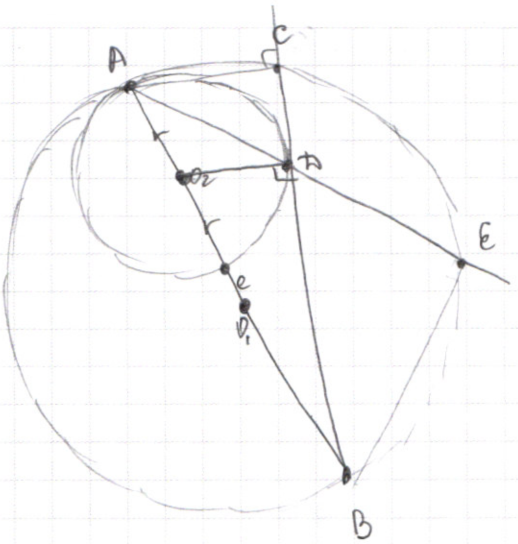
$b - 6a = \sqrt{ab}$

$b^2 + 2a^2 + 18 = 0$

$13 \cdot 3 = 39$ $\qquad 36 \cdot 4 = 144$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



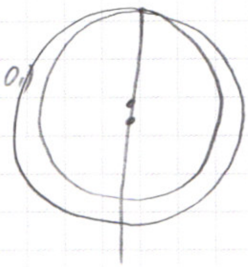
$CD = 2,\ BD = 3$

$\frac{AO_2}{O_2B} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{3}$

$\frac{AO_2}{3AO_2 + 2O_1 +} = \frac{2}{3}$

$3AO_2 = 6AO_2 + 2KO_1$

$3AO_2 = 2(AO_2 + O_2O_1 + O_1O$



$\frac{BO_2}{O_2A} = \frac{3}{2}$

$3O_2A = 2BO_2$

$3O_2A = 2(O_1A + O_1O_2)$

$3O_2A = 2(2O_2A +$

$3(AO_2) = 2(O_2B)$

$3r = 2(2r + e + r + e)$

$3r$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$[-\frac{1}{2}]\ [\frac{1}{2}]$

$8x + 12x - 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x + x(12 - a) - 6 \le b \le -8x^2 + x(6 - a) + 7$

$8x + 12x - 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + 14x - 13 \le 0$

$D = 14^2 + 13 \cdot 8 \cdot 4 = 14^2 + 13 \cdot 32 > 0$

от корня до корня

$D = 196 + 416 = 612 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 17$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16} = \frac{-7 \pm 3\sqrt{17}}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)