МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

+

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

+

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

+

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

+

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

~~a, b, c~~
~~$b_1 = a$~~
~~$b_2 = b_1 q =$~~

a, b, c

d_1, d_2, d_3, d_4 .. геом. прогрессия

$d_1 = a$ $\quad d_4 = d_1 q^3 = x$

$d_2 = d_1 q = b$

$d_3 = d_1 q^2 = c$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$d_1 x^2 - 2d_1 q x + d_1 q^2 = 0$

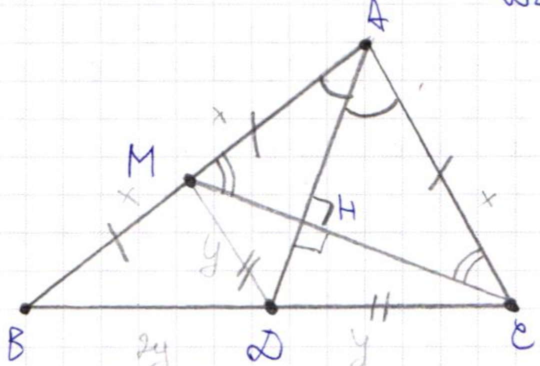
$D = 4d_1^2 q^2 - 4d_1^2 q^2 = 0$

$x = \frac{2d_1 q}{2d_1} = q \Rightarrow$ Т.к. корень этого урав-я – четвертый член геом. прогрессии $\Rightarrow$ $q = d_1 q^3$ ~~$(q \neq 1)$~~ ($q \neq 0$ т.к. геом. прогр.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 q^2 = 1$, но $d_3 = d_1 q^2 = 1$. Значит третий член прогрессии равен 1

Ответ: 1

№2



Дано: ABC-треуг.
AD – бис. CM – медиана
$AD \perp CM$
$P = 900$
Найти: кол-во таких треуг. с целыми сторонами

Решение:

1) Т.к. $CM \perp AD$, AD – бис. $\Rightarrow \triangle AHD = \triangle AHM$ (по ~~к~~ катету и прил. острому углу) $\Rightarrow AM = AC = BM = x$ (т.к. CM – медиана)

2) Т.к. AD – бис. $\Rightarrow$ по её св-ву $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = 2$; $BD = 2y$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$DC = y$.

3) $P_{ABC} = 3y + 3x$; $x + y = 300$.

По нер-ву треугольников в $\triangle ABC$: $AC + AB > BC$; $3x > 3y$; $x > y$

По нер-ву треугольников в $\triangle ABC$: $AB < AC + BC$; $2x < 3y + x$; $x < 3y$

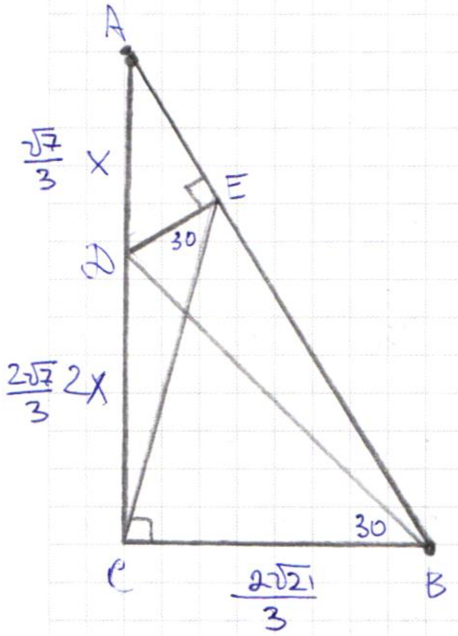
$y < x < 3y$

$x + y = 300 \Rightarrow$ чтобы выполнялось нер-во $150 < x < 225$.

Всего целых значений на этом промежутке x может принимать 74 $\Rightarrow$ всего треугольников удв. усл-иям задачи - 74.

Ответ: 74.

№4



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг.

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$ $\angle CED = 30°$

Найти: а) $tg \angle BAC$ - ?

б) $AC = \sqrt{7}$, S_{CED} - ?

Решение:

а) 1) Т.к. $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90° \Rightarrow \angle DCB + \angle DEB = 180° \Rightarrow CDEB$ - впис.

$\angle DEC = \angle DBC = 30°$ (как впис. углы леж. на одной дуге)

2) Рассмотрим $\triangle DCB$ - прямоуг., $\angle CBD = 30° \Rightarrow DB = DC \cdot 2$

По усл-ию $AD : AC = 1 : 3$; $AD = x \Rightarrow DC = 2x \Rightarrow DB = 4x$

3) По т. Пифагора в $\triangle CDB$ $CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2\sqrt{3}x$

4) $tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) 1) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$; $DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $CB = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

2) По т. Пифагора $\triangle ABC$; $AB = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 21}{9}} = \frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ ($\angle ACB = \angle DEA = 90$; $\angle A$ - общ.) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow$

$DE = \frac{CB \cdot AD}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}}{\cancel{4}} = \cancel{\frac{2\sqrt{7 \cdot 7 \cdot 3}}{3 \cdot 4}} = \cancel{\frac{7\sqrt{3}}{6}} = \frac{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{7} \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

4) В $\triangle DEC$ по т. косинусов:

$\cancel{\frac{4 \cdot 7}{9} = \frac{49 \cdot 3}{36} + EC^2 - \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot EC \cdot 7\sqrt{3}}{2 \cdot 6}}$

$\cancel{\frac{16 \cdot 7 - 49 \cdot 3}{36} = EC^2 - \frac{21}{6} EC}$

$\cancel{\frac{35}{36} = EC^2 - \frac{21}{6} EC \mid 36}$

$\cancel{0 \; 35 = EC^2 - 21 EC - 35}$

$\cancel{D = 441 + 140}$

$\frac{4 \cdot 7}{9} = EC^2 + \frac{4}{9} - \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot EC \cdot 2}{\cancel{2} \cdot 3}$

$\frac{\cancel{24}\,8}{\cancel{9}\,3} = EC^2 - \frac{\sqrt{3} \cdot EC \cdot 2}{3}$

$8 = 3EC^2 - 2\sqrt{3}EC$

$3EC^2 - 2\sqrt{3}EC - 8 = 0$

$D = 12 + 96 = 108$

$EC = \frac{2\sqrt{3} \mp 6\sqrt{3}}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{2} \text{ — не должн быть отр} \end{array} \right.$

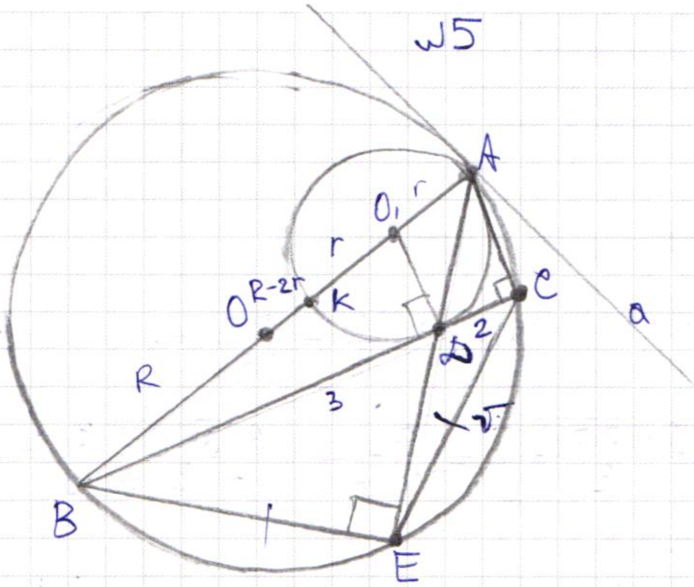
5) $S_{CDE} = \frac{\sin 30 \cdot EC \cdot ED}{2} = \frac{1 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3}}{2 \cdot 2} = \frac{\cancel{8}\,2\sqrt{3}}{9 \cdot \cancel{4}\,1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

по ~~т.~~ выч. площадь по синусам

Ответ: $\cancel{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$ $\text{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5



Дано: Ω, ω

$CD=2$, $BD=3$

AB – диаметр Ω

BD – касат.

~~Д-ть~~: Найти: r, R, S_{ACEB} – ?

Решение:

1) R – радиус Ω, а r – радиус ω. Центр меньшей окружности O_1 лежит на AB. Доказывается это проведением общей касат. к двум окр. a. ~~Если~~ Предположим, что O_1 не лежит на AB, ~~то~~ $AO_1 \perp a$ как рад. к кас. Но и $OA \perp a$ как рад. большей окр. к кас. $\Rightarrow$ получаем против. и точка O_1 – лежит на AB.

2) Проведем O_1D. $O_1D \perp BC$ как радиус к кас., $\angle BCA = 90°$ т.к. AB – диаметр, а BCA лежит на диаметре

3) $\triangle BO_1D \sim \triangle ABC$ ($\angle BCA = \angle BDO_1$, $\angle BA$ – общ.) $\Rightarrow$ ~~$\frac{BC}{BA}$~~ $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{R+R-r}{2R} \Rightarrow 6R = 10R - 5r$; $4R = 5r$; $R = \frac{5r}{4}$

4) Т.к. BD – кас. к ω $\Rightarrow BD^2 = BK \cdot BA$; $9 = (2R-2r)2R$

$9 = 4R^2 - 4Rr$

$\frac{\cancel{4}\cdot 25r^2}{\cancel{16}_4} - \frac{\cancel{4}\cdot 5r\cdot r}{\cancel{4}} - 9 = 0$

$25r^2 - 20r^2 = 36$

$r^2 = \frac{36}{5}$

$r = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, а $R = \frac{\cancel{5}\cdot \cancel{6}^{3}\sqrt{5}}{\cancel{4}_2\cdot \cancel{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

5) $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2\sqrt{5}$ (из $\triangle ABC$); $AD = \sqrt{4+20} = 2\sqrt{6}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) AE и BC − пересек. хорды с точкой пересеч. D $\Rightarrow AD \cdot DE = DC \cdot BD$

$$DE = \frac{DC \cdot BD}{AD} = \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

6) $\triangle DEC \sim \triangle BDA$ ($\angle EDC = \angle BDA$ − смежн. ∠, $\angle DEC = \angle DBA$ как вписс. углы) $\Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{DE}{BD} \Rightarrow EC = \frac{AB \cdot DE}{BD} = \frac{3\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

7) $S_{ACEB} = S_{ACB} + S_{BCE}$

$$S_{ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 5}{2} = 5\sqrt{5}$$

$$S_{BCE} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}+5}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{30}+5}{2} - \frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{30}+5}{2} - 5\right)}$$ по формуле Герона

$$p_{BCE} = \frac{\sqrt{30}+\sqrt{30}+5}{2} \quad \frac{\sqrt{30}+5}{2}$$

$$S_{BCE} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{30}+5}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{30}-5}{2}\right)} \cdot \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{30-25}{4}} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

Ответ: $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $S_{BCE} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{y(x-6) - (x-6)} \\ (x-6)^2 + 2y^2 - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y^2 - 2y + 1) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x-6) - 6(y-1))^2 = (y-1)(x-6), \quad x - \cancel{6} \geq 6y - \cancel{6} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Замена $y-1=n$; $x-6=m$

$$\begin{cases}(m^2-6n)^2=mn\\ m^2+2n^2=18\end{cases}\quad \begin{cases}m=\dfrac{18-34n^2}{13n},\ n\neq 0\\ \dfrac{(18-34n^2)^2+26n^4}{13n^2}=18\end{cases}\quad \begin{cases}m=\dfrac{18-34n^2}{13n},\ n\neq 0\\ \dfrac{18\cdot 18-34\cdot 18\cdot 2n^2+34^2n^4+26n^4}{13n^2}=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}m=\dfrac{18-34n^2}{13n}\\ 18^2-34\cdot 18\cdot 2n^2+60n^4=18\cdot 13n^2\end{cases}\quad \begin{cases}m=\dfrac{18-34n^2}{13n}\\ 60n^4-18(34\cdot 2n^2+13n^2)+18^2=0\ (1)\end{cases}$$

(1) $60n^4-18\cdot 81n^2+18^2=0\ |:3$

$20n^4-6\cdot 81n^2+6\cdot 18=0$

$D=36\cdot 81\cdot 81-36\cdot 18\cdot 18\cdot 20=36\cdot 81\cdot(81-80)$

$$n^2=\frac{6\cdot 81\pm 6\cdot 9}{40}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{6\cdot 9\cdot 10}{40}=\dfrac{6\cdot 9}{4}\\ \dfrac{6\cdot 9\cdot 8}{40}=\dfrac{6\cdot 9}{5}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n=\left[\begin{array}{l}\pm\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ \pm\dfrac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$$

$$m^2=\left[\begin{array}{l}18-\dfrac{6\cdot 9}{2}=\dfrac{36-6\cdot 9}{2}\ \text{— не подх.}\Rightarrow n\neq\\ \cancel{18+\dfrac{6\cdot 9}{2}=}\\ 18-\dfrac{6\cdot 9\cdot 2}{5}=90-\\ \cancel{18+\dfrac{6\cdot 9\cdot 2}{5}=}\end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b_n = q^{n-1} \cdot b_1$ $\qquad b_3 - ?$ $\qquad x = \frac{-b \pm D}{2a}$

$a = b_1$

$b = b_2 = q \cdot b_1$

$c = b_3 = q^2 b_1$

$b_4 = q^3 b_1$

$\cancel{q} = \cancel{q}^3 b_1$

$q^2 b_1 = 1$!

$b_1 x^2 - 2q b_1 x + q^2 b_1 = 0$

$D = 4q^2 b_1^2 - 4b_1^2 q^2$

$D = 0$

$x_{1,2} = \frac{2qb_1 \pm 0}{2b_1}$

$x_{1,2} = q$

$q = b_4$

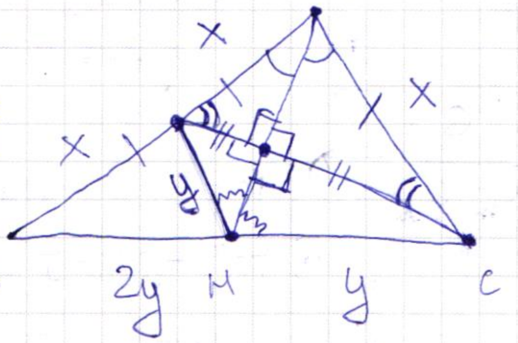
2 3 4 5 6 7 8 9 10

$P = 900$

$\frac{AH}{2x} = \frac{HC}{x}$ $\qquad \cancel{3}x > \cancel{3}y$

$\frac{AH}{HC} = 2$ $\qquad x < 2x + 3y$

$\cancel{-x < +3y}$



$\times 16 \cdot 7 = 112$

$\times 49 \cdot 3 = 147$; $147 - 112 = 35$

$\times 35 \cdot 4 = 140$

$\times 21 \cdot 21$: $21 + 42 = 441$; $441 + 140 = 581$

$581 \vdash$

$3x + 3y = 900$

$x + y = 300$

$\cancel{151 + 149 =}$

$151 + 149 = 300$

$225 + 75 = 300$

$300 : 4 = 75$; -28, 20

$\times 75 \cdot 3 = 225$

$2x < x + 3y$

$\begin{cases} x < 3y \\ x > y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x > \cancel{75}\ 150 \\ x < 225 \end{matrix}$

$\cancel{x}$

Ответ: 74

$225 - 150 = 75$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (2) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (1) \end{cases}$$

$$\frac{2\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}\cdot\cancel{3}}{3\cdot\cancel{3}\cdot 7\sqrt{3}}=$$

(1) $x^2-12x+36+2y^2-4y-16=0$

$(x-6)^2+(y^2-16)+y(y-4)=0$

$\frac{2\cdot\cancel{7}\cancel{\sqrt{3}}}{3\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{\sqrt{3}}}$ 60 Γ^3

$(x-6)^2+(y-4)(y+4)+y(y-4)=0$

18

$\boxed{(x-6)^2+(y-4)(2y+4)=0}$

$\times\frac{18}{6}$

(2) $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x-6y\geq 0$ $\quad x\geq 6y$

81

$\times\frac{34}{2}$ $\quad +\frac{68}{13}$ $\quad 81$

$(x-6y)^2=xy-6y-x+6$

$6\cdot 9(9\pm 1)$ $\quad 36\cdot 9\cdot 9\cdot 2\cdot 2$

$x^2-12xy+36y^2-xy+6y+x-6=0$

$\times\frac{18}{5}$ $\quad 90$

$(x-6y)^2-(y(x-6)-(x-6))=0$

$y-1-1+1=n$

$(x-6y)^2-(y-1)(x-6)=0$

$3\cdot 2\cdot 3\cdot 3$ $\quad y-2=n-1$

$\begin{cases}(x-6)^2+(y-4)(2y+4)=0 \\ (x-6y)^2-(y-1)(x-6)=0\end{cases}$

$6\cdot 18$ $\quad \times\frac{81}{6}$ $\quad 486$

~~$(x-6-x+6y)(2x-6y-6)+y$~~

$\times\frac{18}{6}$ $\quad 108$

$x-6=m$

$y-1=n$

81

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$y+4-1-4=n$

$y+4=n+5$

$(x-6)-6y+6=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$(x-6)-6(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ $\rightarrow$ $\begin{cases}(m-6n)^2=mn \\ m^2+2(n+5)(n-1)=0\end{cases}$

$x^2+2y^2-12x+4y+20=0$

$\begin{cases}m^2-12mn+36n^2=mn \\ m^2+2(n^2-n+5n-5)=0\end{cases}$

$(x-6)^2-16+2y^2+4y=0$

$(x-6)^2+(y-4)(y+4)+y(4+y)=0$

$(x-6)^2+2(y+4)(\cancel{2}y-\cancel{2})=0$

$m^2+2(n^2+4n+4-9)=0$

$(18-2n)+36n^2=13n\sqrt{18-2n}$

$m^2+2(n+2)^2-18=0$

1. $\quad m=\sqrt{18-2n}$

$m^2-12mn+36n^2=mn$

$\frac{18-34n^2}{13n}=13m$

$m^2+36n^2=13mn$

$18-2n^2+36n^2=13mn$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+2y^2-4y-16=0$$

$$(x-6)^2+2(y^2-2y+1)=18$$

$$(x-6)^2+2(y+1)^2=18$$

$$\begin{cases} m^2+2n^2=18 \\ (m-6n)^2=mn \end{cases}$$

$$\cancel{(x-6y)^2=xy-6y-x+6}$$

$$\cancel{x^2-12xy+36y^2+6y-xy+x-6=0}$$

$$\cancel{x-6+6y}$$

$$(x-6)-6y+6=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$$

$$((x-6)-6(y-1))^2=(y-1)(x-6)$$

$$(x-6)^2-13(y-1)(x-6)+36(y-1)^2=0$$

$m^2+2n^2=18$

$(m^2+n^2+2mn)=18-n^2+$

$(m+n)^2=18-n^2+2(m-6n)^2$

$$\begin{cases} m^2+2n^2=18 \\ m^2-12mn+36n^2=mn \end{cases}$$

$(m-6n)^2=mn$

y^2

$$\begin{cases} m^2+2n^2=18 \;|\cdot 18 \\ m^2+36n^2=13mn \end{cases}$$

$\cancel{m^2=18-2n^2}$

$\cancel{18-2n^2+36n^2=13n\sqrt{18-2n^2}}$

$\cancel{18+34n^2=13n\sqrt{18-2n^2}}$

$\cancel{m^2=\frac{18}{2n^2}=\frac{9}{n^2}}$

$\cancel{m=\pm\frac{3}{n}}$

$\cancel{18m^2-m^2=18^2-13mn}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2x-1 \geq 0$

$2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} m^2+2n^2=18 \\ (m^2-6n)^2=mn \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m^{\cancel{4}}+n)^2=18+m^2 \\ \end{cases}$$

~~$2x-1<0$~~

~~ндв~~

$m \geq 6n$

$(x-6y)^2=\sqrt{xy-6y-x+6}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

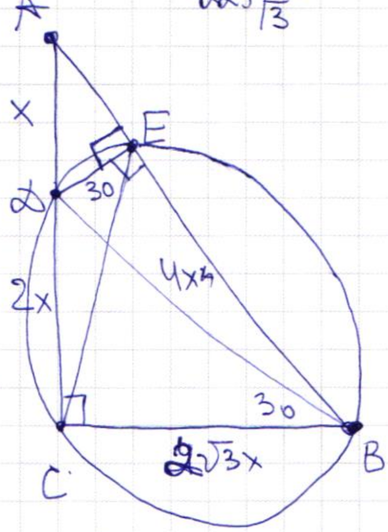
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$81 + 63 = 144$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$225 | 75$, 3

$tg\ BAC - ?$

$CED = 30^\circ$

$DB = 4x$

$\sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12x^2} = 2\sqrt{3}x$

$tg\ BAC = \frac{2\sqrt{3}x}{3x}$

$3x = \sqrt{7}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{4 \cdot 21}{9} + 7 =$

$\frac{4 \cdot 21 + 63}{9} = \sqrt{\frac{144}{9}}$

$\frac{4 \cdot 12}{3}$

$\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3}$

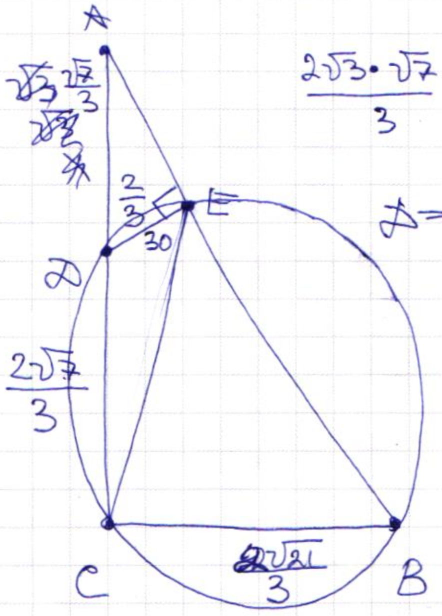
$AB = \frac{\sqrt{21} \cdot \sqrt{7}}{3}$

$AB = \frac{\sqrt{3} \cdot 7}{3}$

225 $\quad 16x^2 - 4x^2$ $\quad S_{CED} - ?$

$12x^2$

$AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2} = \sqrt{21}x$



$\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow DE = \frac{AD \cdot CB}{AB} = \frac{x \cdot 2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}x} =$

$= \frac{x \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{3}$

$D = \frac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$

В $\triangle CED$ т. кос.

$\frac{4 \cdot 7}{9} = EC^2 + \frac{4}{9} - 2\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{EC \cdot 2}{3}$

$\frac{24}{9} = EC^2 - \frac{\sqrt{3} \cdot EC \cdot 2}{3}$

$24 = 9EC^2 - 6\sqrt{3}EC$

$9EC^2 - 6\sqrt{3}EC - 24 = 0$

$3EC^2 - 2\sqrt{3}EC - 8 = 0$

$D = 12 + 96 = 108$

$EC = \frac{2\sqrt{3} \pm 6\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{8\sqrt{3}}{2 \cdot 3}$

$4 \cdot 8$ $\quad 12 \cdot 8 = 96$

$108 | 4$, 8, 27, 28, 28

$108 = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$S = \frac{2}{3} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$

$AB = \sqrt{9x^2 + 12x^2}$

$AB = \sqrt{21}x$

$AB = \frac{\sqrt{21}\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$12 \cdot 8 = 96$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

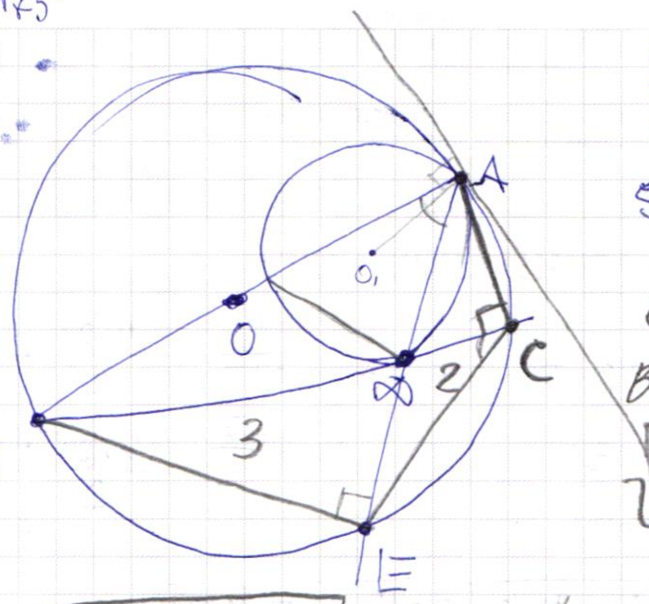
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{300}{28}\Big|\frac{4}{75}$$ 20

75

$2y = 300$

$y = 150$



Ω - больше

ω - меньше

S_{BACE} - ?

$CD = 2$

$BD = 3$

$$\frac{\cancel{4}\cdot 25r^2}{\cancel{16}_4} - 5r^2 = 9$$

$$25r^2 - 20r^2 = 36$$

$$5r^2 = 36$$

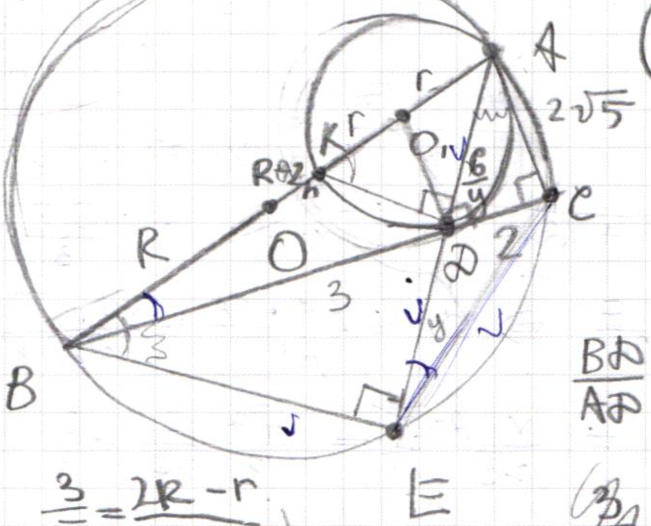
$$\sqrt{\frac{36}{y^2} - 4} = \sqrt{\frac{36 - 4y^2}{y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{36 - 4y^2}}{y}$$

$AC = \sqrt{45 - 25}$

$AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(R + \cancel{a})($



$(R + R - 2r)\cdot 2R = 9$

$(2R - 2r)\, 2R = 9$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$$ $6 = x\cdot y$

$\frac{6}{y} = x$

$$\frac{3}{5} = \frac{2R - r}{2R}$$

$BD \cdot DC = DE \cdot AD$ (хорды)

$\sqrt{24} = 6\cdot 4$

$6 = DE\cdot AD$

$$\frac{x+y}{\sin B} = 2R$$

$6 = xy$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} \qquad \frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AD + DE}$$

$x = \frac{6}{y}$

$2x < 3y + x$

$$\frac{3}{5} = \frac{R + R - r}{2R} \qquad \frac{\cancel{2}r}{\cancel{2}R} = \frac{AD}{AD + DE}$$

$$\frac{6 + y^2}{y}$$

$6R = 10R - 5R$

$5R = 4r$

$$\frac{r}{R} = \frac{6}{y} : \left(\frac{6}{y} + y\right) \qquad \frac{6 \cdot \cancel{y}}{\cancel{y}(6 + y^2)}$$

$R = \frac{5r}{4}$

$6R = 10R - 5r$

$4R = 5r$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)