МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть $\{x_n\}$ - геометрическая прогрессия, q - её знаменатель $(q \neq 0)$

~~$x_1 = a$~~ Тогда $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ $\Rightarrow$ $b = qa$, $c = q^2 a$, $x_4 = q^3 a$.

По условию: $a x_4^2 + 2b x_4 + c = 0$.

Подставляя выражения для a, b, c и x_4:

$a \cdot q^6 a^2 + 2 \cdot qa \cdot q^3 a + q^2 a = 0$

$a^3 q^6 + 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$

$q^2 a (q^4 a^2 + 2q^2 a + 1) = 0$.

Если $a = 0$, то $x_3 = c = 0$, (но такое невозможно, т.к. геом. прогрессия состоит из ненулевых чисел) $\Rightarrow$ $q^4 a^2 + 2q^2 a + 1 = 0$, но $q^2 a = x_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_3^2 + 2x_3 + 1 = 0$, откуда $x_3 = -1$.

Ответ: $x_3 = -1$.

N3.

1) $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y^2 - 4y + 4) + (2x^2 - 4x + 2) + 3 = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ (y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3 \end{cases}$ Пусть $y - 2 = a$, $x - 1 = b$ $\Rightarrow y - 2x = a + 2 - 2b - 2 = a - 2b$.

Система приобретает следующий вид:

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 3 \end{cases}$ $\Big|$ $\underset{\text{Ч}}{a - 2b = \sqrt{ab}} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ a - 2b \geq 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a \geq 2b \end{cases}$

$\left[\begin{cases} a=b \\ a=4b \end{cases}\right.$
$a \geq 2b$

2) Подставим $a=b$ во второе уравнение:

$a^2+2b^2=3$

$3b^2=3$

$b^2=1$, $b=\pm1 \Rightarrow a=\pm1$. ~~Решения $(a=1; b=1)$ $(a=-1; b=-1)$; $(a=-1; b=1)$ не удовл. условию $a \geq 2b \Rightarrow$ они не являются решениями системы. Значит, при $a=b$, единственные реш Решение $(a=1; b=-1$~~

$b=1 \Rightarrow a=1$ - не удовл. ~~реш~~ условию $a \geq 2b \Rightarrow$ не является решением системы

$b=-1 \Rightarrow a=-1$ - удовл. условию $a \geq 2b \Rightarrow$ является решением системы.

3) Подставим теперь $a=4b$ во второе уравнение:

$16b^2+2b^2=3$

$18b^2=3$

$b^2=\frac{1}{6} \Rightarrow b=\pm\frac{1}{\sqrt6}$.

Если $b=\frac{1}{\sqrt6}$, то $a=\frac{4}{\sqrt6}$. Решение $(a=\frac{4}{\sqrt6}; b=\frac{1}{\sqrt6}$ удовл. условию $a \geq 2b \Rightarrow$ $\Rightarrow$ является решением системы)

Если $b=-\frac{1}{\sqrt6}$, то $a=-\frac{4}{\sqrt6}$. В этом случае $a<2b \Rightarrow$ пара чисел $\cancel{\frac{1}{\sqrt6}}$; $a=-\frac{4}{\sqrt6}$; $b=-\frac{1}{\sqrt6}$ не является решением системы. Таким образом, система имеет 2 решения: $(a=-1; b=-1)$ и $(a=\frac{4}{\sqrt6}; b=\frac{1}{\sqrt6})$.

4) Вернемся к замене, тогда:

$\begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y-2=\frac{4}{\sqrt6} \\ x-1=\frac{1}{\sqrt6} \end{cases}$, ~~т.е.~~

$\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y-2=\frac{2\sqrt6}{3} \\ x-1=\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \Rightarrow y=\frac{2\sqrt6+6}{3}$, $x=\frac{\sqrt6+6}{6}$

Ответ: $(x=0; y=1)$ и $(x=\frac{\sqrt6+6}{6}; y=\frac{2\sqrt6+6}{3})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

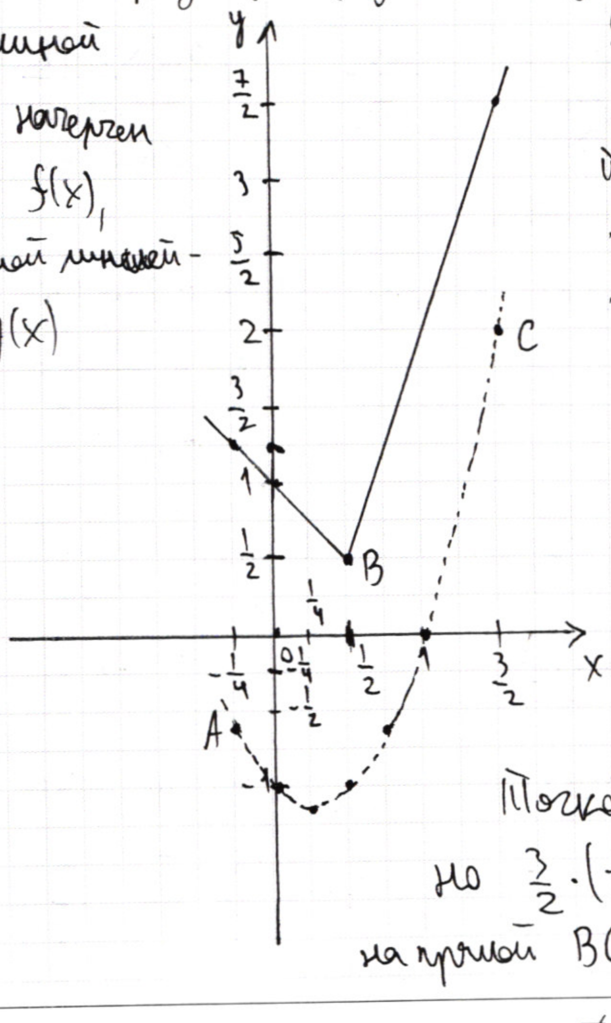
Задача 6.

Пусть $f(x) = x + |2x-1|$; $g(x) = 2x^2 - x - 1$. Построим графики $f(x)$ и $g(x)$ при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$, проанализировав функции.

1) При $x \geq \frac{1}{2}$ $|2x-1| = 2x-1 \Rightarrow f(x) = x+2x-1 = 3x-1$ при $x \geq \frac{1}{2}$
при $x < \frac{1}{2}$ $|2x-1| = 1-2x \Rightarrow f(x) = x+1-2x = 1-x$ при $x < \frac{1}{2}$

2) ~~При~~ $x = \frac{1}{4}$ — точка минимума $g(x)$; $g(\frac{1}{4}) = \frac{2}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$
$g(-\frac{1}{4}) = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$; $g(0) = -1$; $g(\frac{1}{2}) = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} - 1 = -1$; $g(1) = 0$; $g(\frac{3}{2}) = 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$. Также заметим, что на всей области определения $g(x)$ выпукла вниз, т.к. $g''(x) = 4 > 0$.

3) Сплошной линией начерчен график $f(x)$, пунктирной линией — график $g(x)$



Докажем, что A, B и C лежат на одной прямой. Пусть $y = px + q$ — уравнение прямой BC, тогда (учитывая, что B имеет координаты $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ а C — $(\frac{3}{2}; 2)$), получаем, что
$$\begin{cases} \frac{1}{2}p + q = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}p + q = 2 \end{cases} \Rightarrow p = \frac{3}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4},$$
т.е. уравнение прямой BC имеет вид $\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = y$.

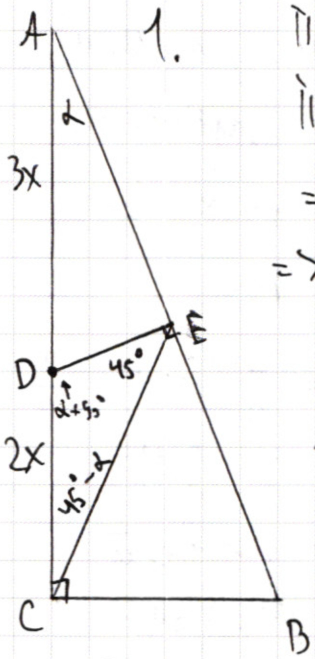
Точка A имеет координаты $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$, но $\frac{3}{2}\cdot(-\frac{1}{4}) - \frac{1}{4} = -\frac{5}{8} \Rightarrow$ точка A лежит на прямой BC, поэтому существует

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

всего одна прямая вида $ax+b$, удовлетворяющая условиям задачи, и эта прямая проходит через точки A, B и C, т.е. её уравнение: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4} \Rightarrow a=\frac{3}{2};\ b=-\frac{1}{4}$

Ответ: $a=\frac{3}{2};\ b=-\frac{1}{4}$.

Задача 4.



1. Пусть $AD=3x$, тогда $AC=5x \Rightarrow CD=2x$

Пусть $\angle ADE=\alpha$, тогда $\angle CDE=\alpha+\angle DEA=$
$=\alpha+90° \Rightarrow \angle DCE=180°-45°-\alpha-90°=45°-\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin\angle DCE=\sin(45°-\alpha)=\cancel{-}\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=$
$=\cancel{\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sqrt{2}}}\ \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}$

1) Из прямоугольного $\triangle ADE$:

$DE=3x\sin\alpha$.

2) Из $\triangle CDE$ по теореме синусов:

$\frac{DE}{\sin\angle DCE}=\frac{DC}{\sin\angle CED}$; $\frac{3x\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sqrt{2}}\ \cancel{\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sqrt{2}}}}=\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$; $\frac{3\sqrt{2}x\sin\alpha}{\cancel{\sin\alpha-\cos\alpha}\ \cos\alpha-\sin\alpha}=2\sqrt{2}x$;

$\cancel{\frac{3\sin\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2}$; $\cancel{3\sin\alpha=2\sin\alpha-2\cos\alpha}$

$\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=2$; $3\sin\alpha=2\cos\alpha-2\sin\alpha$; $5\sin\alpha=2\cos\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{5}=$
$=\operatorname{tg}\angle BAC$.

2. $\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt{1+\frac{4}{25}}}=\frac{2}{\sqrt{29}}$; $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{5}{\sqrt{29}}$

$5x=AC=\sqrt{29} \Rightarrow x=\cancel{\frac{\sqrt{29}}{5}}\ \frac{\sqrt{29}}{5}$.

$DE=3x\sin\alpha=3\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}=\frac{6}{5}$.

$DC=2x=\frac{2\sqrt{29}}{5}$

$\sin(\alpha+90°)=\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{29}}$

$\Rightarrow S_{CED}=\frac{1}{2}DE\cdot DC\cdot\sin(\alpha+90°)=$
$=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{2\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}=\frac{6}{5}=1{,}2$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

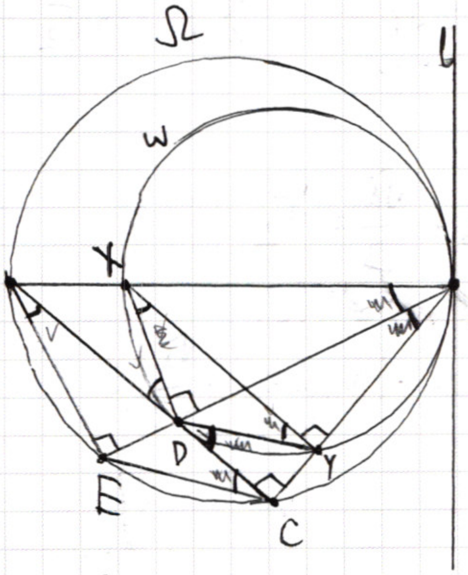
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: а) $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$; б) $S_{CED} = 1,2$.



Задача 5.

1) Т.к. AB — диаметр Ω, то $AB \perp l$ (l — касательная), но l касается ω $\Rightarrow$ $AX \perp l$, значит, AX — диаметр ω.

2) Пусть $\angle DAY = \alpha$. Тогда $\angle DAY = \cancel{\frac{1}{2}\cup} \ \frac{1}{2}\cup DY = \angle YDC$ (т.к. CD — касательная к ω). Из вписанности $XDYA$: $\angle DAY = \angle DXY$.

~~Т.к.~~ Т.к. AX — диаметр ω, то $\angle XYA = 90^\circ$, т.к. AB — диаметр Ω, то $\angle BCA = 90^\circ$. Из вписанности $XAYD$: $\angle XAD = \angle XYD$. Из вписанности $ABEC$: $\angle BAE = \angle BCE \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle XYD = \angle BCE$, но $\angle XYA = \angle BCA \Rightarrow \angle ECY = \angle DYA \Rightarrow$ $\Rightarrow EC \parallel DY$, откуда $\angle ECD = \angle EAB = \angle YDC = \alpha = \angle DXY$.

Т.к. BD — касательная, то $\angle BDX = \frac{1}{2}\cup XD = \angle XAD = \alpha$.

$\angle EBC = \angle EAC = \alpha$ (из вписанности $EBAC$)

3) Из ~~ΔBDE~~ $\angle BEA = 90^\circ$ (т.к. опирается на AB), $\angle XDA = 90^\circ$ (т.к. опирается на AX).

Из ΔBDE: $BE = BD\cos\alpha$, из ΔBEC: $BE = EC$ (т.к. $\angle B = \angle C$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow BC = BD + DC = 4 = 2BE\cos\alpha = 2BD\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{BD+DC}{2BD} =$ $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{6}}\ \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Из $\triangle BAE$: $AB = 2r_\Omega$ (r_Ω - радиус Ω) $= \frac{BE}{\sin\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_\Omega = \frac{BE}{2\sin\alpha} = \frac{BD\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{3\cdot\frac{\sqrt6}{3}}{2\cdot\frac{\sqrt3}{3}} = \frac{3\sqrt2}{2}$.

Из $\triangle ADC$: $AD = \frac{DC}{\sin\alpha} =$

$= \frac{1}{\frac{\sqrt3}{3}} = \sqrt3$, Из $\triangle AXD$: $AX = 2r_\omega$ (r_ω - радиус ω) $= \frac{AD}{\cos\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_\omega = \frac{AD}{2\cos\alpha} = \frac{\sqrt3}{\frac{2\sqrt6}{3}} = \frac{3\sqrt3}{2\sqrt6} = \frac{\cancel{3\sqrt3\cdot\sqrt6}}{\cancel{2\cdot6}}\ \frac{3}{2\sqrt2} = \frac{3\sqrt2}{4}$.

4) $S_{BACE} = S_{BCA} + S_{BEC}$.

$S_{BCA} = \frac12\cdot BC\cdot CA$

Из $\triangle ADC$: $CA = AD\cos\alpha = \sqrt3\cdot\frac{\sqrt6}{3} = \sqrt2$

$BC = BD + CD = 4 \Rightarrow S_{BCA} = \frac12\cdot4\cdot\sqrt2 = 2\sqrt2$.

$S_{BEC} = \frac12\cdot BE\cdot BC\cdot\sin\alpha = \frac12\cdot BD\cos\alpha\cdot(BD+CD)\cdot\frac{\sqrt3}{3} =$

$= \frac12\cdot\sqrt6\cdot4\cdot\frac{\sqrt3}{3} = 2\sqrt2$

$S_{BACE} = 2\sqrt2 + 2\sqrt2 = 4\sqrt2$.

Ответ: $r_\Omega = \frac{3\sqrt2}{2}$; $r_\omega = \frac{3\sqrt2}{4}$; $S_{BACE} = 4\sqrt2$.

N7.

Заметим, что $f(x) = f(1\cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$.

Пусть ~~$\forall$~~ $r\in N$, тогда ~~$\forall$~~ $f(1) = f(r\cdot\frac1r) = f(r) + f(\frac1r) = 0 \Rightarrow$

$f(\frac1r) = -f(r)$.

Пусть $p, q \in N$, тогда $f(\frac pq) = f(p\cdot\frac1q) = f(p) + f(\frac1q) =$

$= f(p) - f(q)$

Если $s = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, то $f(s) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n})\ldots$

$\ldots = f(p_1^{\alpha_1}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 f(p_1)\ldots + \alpha_n f(p_n) =$

$= \alpha_1\left[\frac{p_1}{2}\right]\ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{2}\right]$. ($p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ - каноническое разложение числа s на простые множители)

Выпишем таблицу $f(n)$, для $n\in N$, $1\le n\le 21$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

n	f(n)
1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4

Заметим, что если $a \vdots b$ $(b\neq 1)$, то $f(a) > f(b)$, т.к. $f(a) = f(b) + f\left(\frac{a}{b}\right)$, а для каждого ~~$n$~~ $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ $f(n) > 0$.

~~По данным таблицы:~~

~~Для $x=1$ - подходят все~~

т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то $f(x) < f(y)$.

По данным таблицы:

Для $x=1$ - подходят все y, кроме 1 (т.е. 20 значений)

Для $x=2$; $x=3$ - 18 подходящих y

Для $x = 4; 5; 6$ или 9 - 14 подходящих y

Для $x = 7, 8, 10, 12, 15$ или 18 - 8 подходящих y

Для $x = 14, 16, 20$ или 21 - 4 подходящих y

Для $x = 11$ - 3 подходящих y

Для $x = 13$: 2 подходящих y

Для $x = 17$ - 1 подходящий y

Для $x = 19$ - нет подходящих y

Таким образом, кол-во подходящих пар $(x; y)$ равно

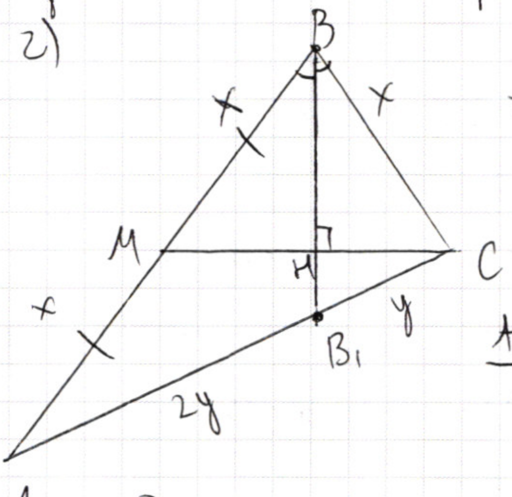
$1\cdot 20 + 2\cdot 18 + 4\cdot 14 + 6\cdot 8 + 4\cdot 4 + 1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 1 =$
$= 182.$

Ответ: 182.

Задача 2.

~~Задач~~ 1) Заметим, что эти медиана и биссектриса не могут проходить через одну вершину, т.к. перпендикуляр к биссектрисе, проведенный в вершине треугольника, является биссектрисой внешнего угла треугольника, т.е. лежит внутри внешнего угла треугольника при этой вершине, поэтому не может иметь общих точек с противоположной стороной треугольника, т.е. не может быть медианой. => эти медиана и биссектриса выходят из разных вершин треугольника.

2)



В △MBC BH – высота и биссектриса. => △MBC – равнобедренный, т.е. MB = BC. Обозначим: AM = MB = BC = x. По теореме о биссектрисе в △ABC: $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} = 2$, т.е. если $B_1C = y$, то $AB_1 = 2y$.

3) Периметр △ABC = AB + BC + AC = 3x + 3y = 1200 => x + y = 400. По неравенству треугольника: AB + BC > AC, т.е. 3x > 3y; x > y; а также AC + BC > AB: 3y + x > 2x, x < 3y; и AC + AB > BC: 2x + 3y > x (любые положительные x и y удовл. этому неравенству). Поэтому:

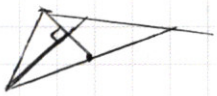
$$\begin{cases} x+y=400 \\ x>y \\ x<3y \\ x, y \in N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>400-x \\ x<3(400-x) \end{cases} \begin{cases} x>200 \\ x<300 \end{cases}$$

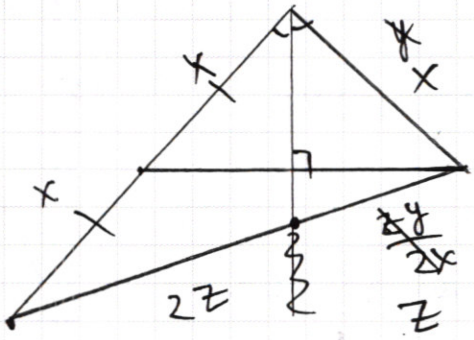
, т.е. есть 99 положительных x, удовл. условию, а т.к. одному значению x соотв. одно значение y и параметры △ABC определяются только величиной x и y, то существ. 99 треугольников, удовл. условию задачи.

Ответ: 99 треугольников.

$3x+p=400$

$f(12)=2 \quad f(2)+f(3)=3.$





$3x+3z=1200$

$x+z=400$

$\cancel{3x\geq}$

$x\geq z\geq \frac{x}{3}$

$x\geq 400-x\geq \frac{x}{3}$

$\cancel{3x}$

$2x+3z\geq x$

$3z+x\geq 2x$

$z\geq \frac{x}{3}$

$\begin{cases} x\geq 200 \\ \frac{4x}{3}\leq 400 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 200 \\ x\leq 300 \end{cases}$

№7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$; $a,b\in Q$; $a,b>0.$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$f(21)=f(3)+f(7)=$

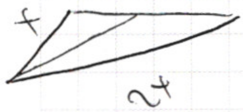
$=1+3=4.$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1)=f\left(\frac{p}{p}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(20)=f(4)+f(5)=$

$=2f(2)+f(5)=2+2=4.$



$\cancel{f(1)}$ $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$

$f(1)=0.$

$f(19)=9$

$f(18)=2f(3)+f(2)=1+2=3.$

$f(2y)=f(y)+f(2)$

$f(2)=1.$ $y m=\frac{x}{y}$

$f(16)=4f(2)=4.$

$f(9)=2f(3)=2.$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=\cancel{f(x)}\ f(y)+f\left(\frac{x}{y^2}\right)=$

$=f(y)+f(y)+f\left(\frac{x}{y^3}\right)$

$\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9}$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)+f\left(\frac{9}{16}\right)$

$f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)+f\left(\frac{9}{16}\right)$

$f\left(\frac{x}{1}\right)=f(x)>0.$

$f\left(\frac{1}{x}\right.$

$\cancel{f(x+}$ $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=0.$

Если $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$, то $f\left(\frac{y}{x}\right)<0.$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-f(5)$

$f\left(\frac{2}{5}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{5}\right)=f(2)-f(5)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$20+36+56+48+16+6$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

1) $2x-1\ge 0$ $\quad x+2x-1\ge ax+b\ge 2x^2-x-1$

$x\in[\frac12;\frac32]$; $\quad 3x-1\ge ax+b\ge 2x^2-x-1$

$3x-1$ $\quad 2x^2-x\le 3x$ $\quad 2\cdot\frac94-\frac32-1=\frac92-\frac32-1=2.$

$2x^2-4x\le 0$

$x^2-2x\le 0$

$x\in[0;2]$

0,5 $\quad$ 3,5

$-\frac18-1$

$\frac14$

$2\cdot\frac1{16}-\frac14-1=\frac18-\frac14-1=$

1) При $x\ge\frac12$ $f(x)=3x-1$

при $x<\frac12$ $f(x)=x+1-2x=1-x$

$2\frac1{16}+\frac14-1=$

$\frac18+\frac14-1=\frac38-1=-\frac58$

$-\frac38-\frac14=-\frac38-\frac28=-\frac58$

$a=\frac32;$

$b=-\frac14.$

$f\left(\frac pq\right)=f(p)+f\left(\frac1q\right)$

$\left(-\frac14;-\frac58\right)$

$f(q)+f\left(\frac1q\right)=f(1)=0 \Rightarrow$

$f\left(\frac1q\right)=-f(q)$

$\left(\frac12;\frac12\right)$ и $\left(\frac32;2\right)$

$\frac12a+b=\frac12$

$\frac32a+b=2$

$a=\frac32$

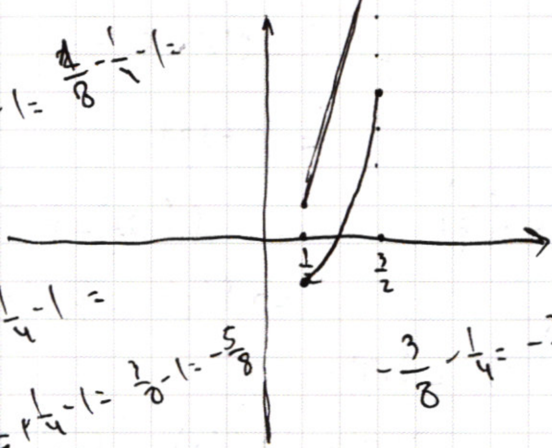
$b=\frac12-\frac34=-\frac14$

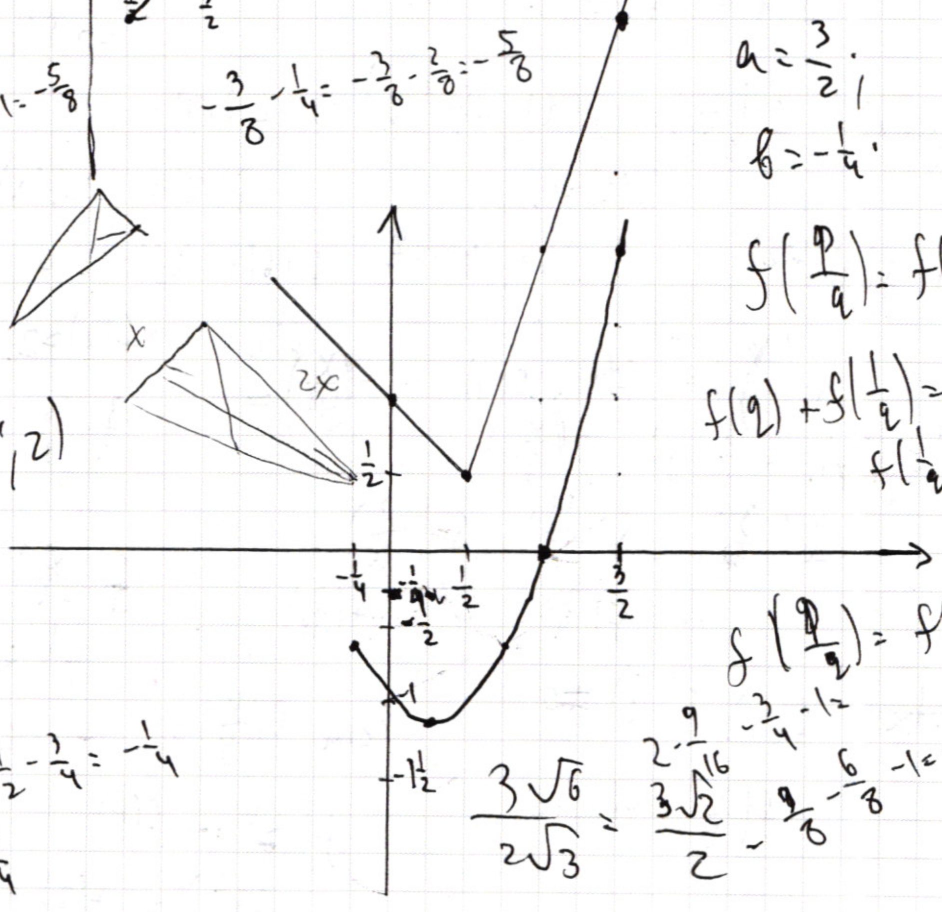
$y=\frac32x-\frac14$

$f\left(\frac pq\right)=f(p)-f(q)$

$2\cdot\frac9{16}-\frac34-1=\frac98-\frac68-1=-\frac58$

$\frac{3\sqrt6}{2\sqrt3}=\frac{3\sqrt2}{2}$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

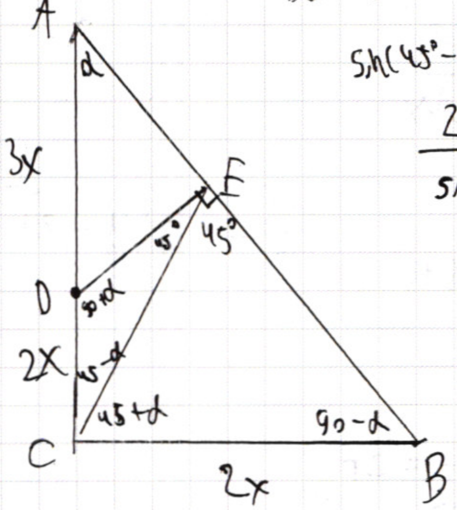
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



$DE = 3x\sin\alpha$

$\sin(45^\circ-\alpha) = \sin 45^\circ \cos\alpha - \cos 45^\circ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{2x}{\sin 45^\circ} = \dfrac{3x\sin\alpha}{\sin(45^\circ-\alpha)}$

$2\sqrt{2} = \dfrac{3\sqrt{2}\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

$\dfrac{3\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = 2$

$3\sin\alpha = 2\cos\alpha - 2\sin\alpha$

$5\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{5}$

$5x = \sqrt{29}$

$x = \dfrac{\sqrt{29}}{5}$

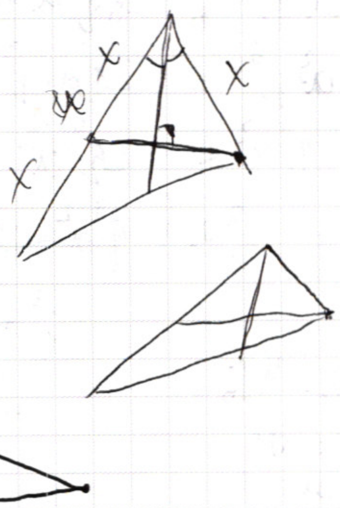
$\cos^2\alpha + \dfrac{4}{25}\cos^2\alpha = 1$

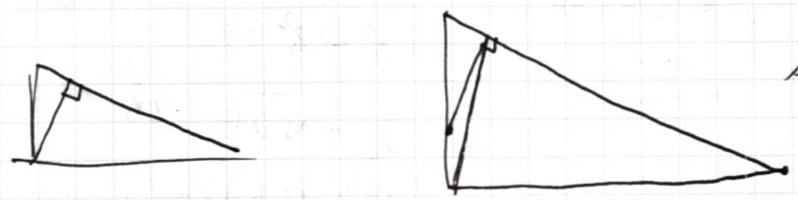
$\dfrac{29}{25}\cos^2\alpha = 1$; $\quad \cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

$AE = 3x\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{29}}{5}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{29}} = 3$ $\quad \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{29}}$

$S_{ACE} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{29}\cdot\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{29}} = 3\sqrt{6}$

$S_{CED} = \dfrac{2}{5}S_{ACE} = \dfrac{6\sqrt{6}}{5}$.





$\sin(\alpha+90^\circ) = \sin\alpha\cos 90^\circ + \cos\alpha\sin 90^\circ = \cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

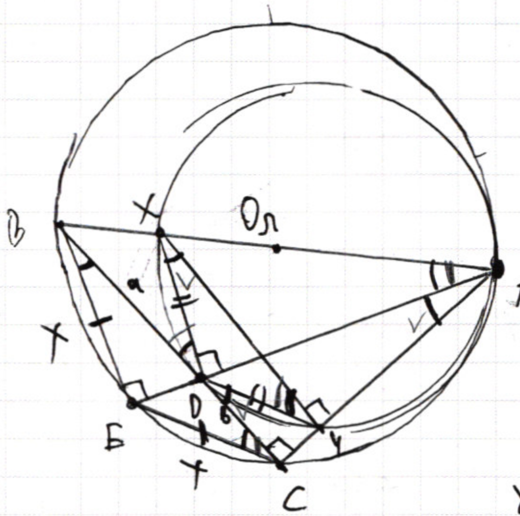
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$BD^2 = BX \cdot BA$

$CD^2 = CY \cdot CA$

$(2R - r)^2 - r^2 =$

$= 4R^2 - 4Rr = BD^2$



$\frac{CA}{AD} = \frac{AD}{AX}$

$x = a\cos\alpha$

$(x-1)(y-2)$

$2a\cos^2\alpha = a+b$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{a+b}{2a}} = \sqrt{\frac{3+1}{6}} =$

$2R = \frac{x}{\sin\alpha} = a\cos\alpha$

$\frac{2}{\sqrt6} = \frac{2\sqrt6}{6} = \frac{\sqrt6}{3}$

$DY = \frac{b}{\cos\alpha}$

$\frac{DY}{\sin\alpha} = 2r$; $\frac{b}{\cos\alpha\sin\alpha} = 2r$

$x = \sqrt6$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{6}{9}} = \frac{\sqrt3}{3}$

$2x\cos\alpha = a+b$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0.$

a1.

a ; $b = qa$ $c = q^2 a$

α $x_4 = q^3 a$

$a^3q^6 + 2bq^3a + c = 0$

$a^3q^6 + 2qa \cdot q^3 a + q^2 a = 0$

$q^6a^3 + 2q^4a^2 + q^2a = 0$

$q^2a\left(q^4a^2 + 2q^2a + 1\right) = 0.$

$c^2 + 2c + 1 = 0$

$c = -1.$

$y^2 - 4y + 4 + 2x^2 - 4x + 2 - 3 = 0.$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3.$

$y - 2 = a$

$x - 1 = b$

$y = a + 2$

$x = b + 1$

$y - 2x = a + 2 - 2b - 2 =$

$a - 2b$

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0.$

$a^2 + 2b^2 = 3$

$D = 9b$

$a - \sqrt{ab} - 2b = 0.$

$\begin{cases} a = b \text{ — не подходит} \\ a = 4b \end{cases}$

$\cancel{4b^2}$ $16b^2 + 2b^2 = 3$

$b^2 = \frac{1}{6}$

$b = \pm\sqrt6$; $a = \pm 4\sqrt6$

$\begin{cases} y - 2 = 4\sqrt6 \\ x - 1 = \sqrt6 \end{cases}$

или

$\begin{cases} y - 2 = -4\sqrt6 \\ x - 1 = -\sqrt6 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)