МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. a, b, c, d – члены геом. прогр.

$a = \frac{1}{q} \cdot b$

$c = q \cdot b$

$d = q^2 b$, $d = ?$, по усл. $\left[\begin{array}{l} d = x_1 \\ d = x_2 \end{array}\right.$ где x_1 и x_2 – корни $ax^2 + bx + c = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$; $4ac = 4b^2 \cdot q \cdot \frac{1}{q}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2b} \cdot q$, при $b \neq 0$

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4}}{2}$ – нет реш.

при $b = 0$: $\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \end{array} \Rightarrow d = 0$, других вариантов быть не может.

Ответ: $d = 0$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $$\begin{cases} (1)\ y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ (2)\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$(1):\ \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ xy-2x-y+2\geq 0 \\ (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x \\ xy-2x-y+2\geq 0 \\ y^2+4x^2-4xy-xy+2x+y-2=0\ (3) \end{cases}$$

$$(3)\ \ 4x^2+x(2-5y)+(y^2+y-2)=0$$

$$D=25y^2+4-20y-16y^2-16y+32=9y^2-36y+36=(3y-6)^2$$

$$x=\frac{(5y-2)\pm(3y-6)}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=y-1 \\ x_2=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=x+1 \\ y_2=4x-2 \end{array}\right.$$

$$\text{I. } y_1=x+1:\ \begin{cases} x+1\geq 2x \\ x(x+1)-2x-x-1+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ x^2-2x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ (x-1)^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\leq 1$$

$$\text{II. } y_2=4x-2;\ \begin{cases} 4x-2\geq 2x \\ x(4x-2)-2x-4x+2+2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 4x^2-8x+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 4(x-1)^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\geq 1$$

$$(2)\ \ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$$

Подставим I, $y_1=x+1$: $2(x-1)^2+(x-1)^2=3$

$$(x-1)^2=1$$

$$\left[\begin{array}{l} x_3=2 \text{ — не уд. усл. } x\leq 1 \\ \underline{x_4=0},\ y=1 \end{array}\right.$$

Подставим II. $y_2=4x-2$:

$$2(x-1)^2+(4x-4)^2=3$$

$$18(x-1)^2=3$$

$$(x-1)^2=\frac{1}{6}$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{x_5=1+\frac{\sqrt{6}}{6}},\ y=\frac{2\sqrt{6}}{3}+2 \\ x_6=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \text{ — не уд. усл. } x\geq 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ответ: } (0;1);\ \left(1+\frac{\sqrt{6}}{6};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}+2\right).}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. Дано: $\triangle ABC$

AD – бис. $\angle BAC$

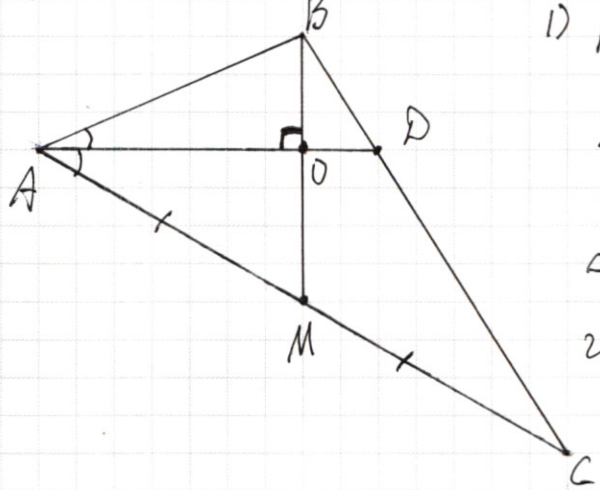
BM – мед. к ст. AC

$AD \perp BM$, т. $O \in AD \cap BM$.

$AB + BC + AC = 1200$; $AB, BC, AC \in N$.

~~[illegible]~~ сколько, таких $\triangle$ может быть?

Решение:



1) рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle AOM$.

$\angle AOB = \angle AOM = 90°$, т.к. $AD \perp BM$

$\angle BAO = \angle MAO$ – т.к. AD – бис.

AO – общ. ст.

$\triangle AOB = \triangle AOM \Rightarrow AB = AM$ – соотв. эл. равных $\triangle$.

2) $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ – т.к. AD бис.

$AC = AM + MC = 2AM = 2MC$, т.к. $AM = MC$ – BM – ~~бис.~~ мед. к AC.

$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ~~BD~~ $DC = 2BD$; $BC = 3BD = BD + DC$

$AB + BC + AC = 3AB + 3BD$, т.к. $AB = AM = MC$.

$3(AB + BD) = 1200 \Rightarrow AB + BD = 400$, т.к. $AD \in N$, то и $BD \in N$

$AB = 400 - BD$ ~~, где $BD \in [1; 399]$ $AB \in$~~

(3). вспомним, что $\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB < 3BD \\ BD < AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400 < 4BD \\ 400 < 2AB \end{cases}$

$\begin{cases} 100 < BD \\ 200 < AB \end{cases} \Rightarrow 200 < AB < 300 \Rightarrow AB \in [201; 299]$. – всего 99 вариантов
$BD \in [199; 101]$.

Ответ: возможно 99 $\triangle$, уд. условию задачи.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $2x^2-x-1 \overset{(1)}{\le} ax+b \overset{(2)}{\le} x+\overset{(3)}{|2x-1|}$, $x\in\left[\frac{-1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

$$\begin{cases} 2x^2-x-1\le ax+b \\ ax+b\le x+|2x-1| \end{cases}$$

(1) рассмотрим $f(x)=2x^2-x-1$, $x_в=\frac{1}{4}$

$f(x)=0$

$D=1+8=9$; $x=\frac{1\pm3}{4}$

$$\left[\begin{aligned} x_1&=-\frac{1}{2} \\ x_2&=1 \end{aligned}\right.$$

~~при~~ $f(-\frac{1}{4})=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=\frac{5}{8}$, т. $A(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$

$f(\frac{3}{2})=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=2$, т. $B(\frac{3}{2};2)$

$f(\frac{1}{4})=-1-\frac{1}{8}$; $f(-\frac{1}{2})=0$, $f(1)=0$

(3) рассмотрим ~~f(x)~~ $g(x)=x+|2x-1|$, $2x-1=0$

$x=\frac{1}{2}$

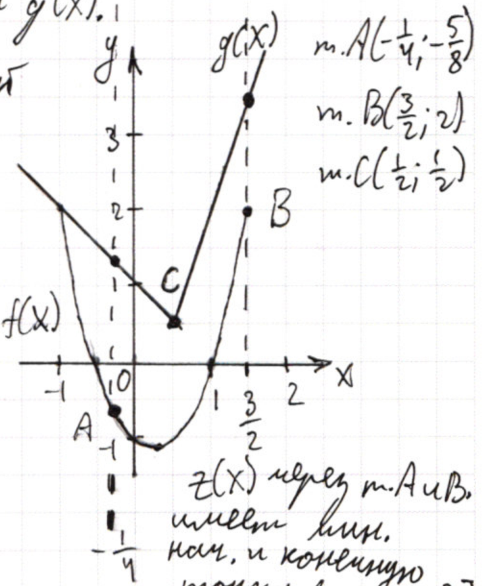
~~при~~ $g(x)=\begin{cases} 1-x, \text{ при } x<\frac{1}{2} \\ 3x-1, \text{ при } x\ge\frac{1}{2} \end{cases}$ при $x=\frac{1}{2}$: $1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$g(-\frac{1}{4})=1+\frac{1}{4}$; $g(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$; $g(\frac{3}{2})=3{,}5=3+\frac{1}{2}$

т. $C(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

Поймём, что $z(x)=ax+b$ – функция прямой должна быть выше параболы $f(x)$, но ниже функции $g(x)$.

Заметим, что точки A, B и C – леж. на одной прямой. ~~z(-1/4)~~ Это значит, что $z(x)$ должна проходить через эти точки, иначе $z(x)$ пересечёт один из графиков, значит будет противоречить условию.



$$\begin{cases} z(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8} \quad (4) \\ z(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}a+b=2 \quad (5) \\ z(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2} \quad (6) \end{cases}$$

(5) и (6): $a=1{,}5$

(6): $b=-\frac{1}{4}$

(4): $-\frac{1}{4}\cdot1{,}5+(-\frac{1}{4})=-\frac{5}{8}$

$-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{5}{8}$.

$z(x)$ через т. A и B. имеет мин. нач. и конечную точки в $x\in[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$ значит, ни одна прямая $z'(x)$, удд. усл. другая не может быть ниже $z(x)$.

Ответ: 1 пара: $(\underset{a}{1{,}5};\underset{b}{-\frac{1}{4}})$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№7. Заметим, что $f(1)=[\frac{1}{2}]=0$

Тогда $f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+[\frac{2}{2}]=f(\frac{1}{2})+1=0=f(1)$

$f(\frac{1}{2})=-1$

$f(5)=[\frac{5}{2}]=2$; $f(\frac{5}{2}\cdot 2)=f(\frac{5}{2})+[\frac{2}{2}]=f(\frac{5}{2})+1=2$

$f(\frac{5}{2})=1$

~~допустим a, b ϵ рациональные~~ рассмотрим $a,b\in N$.

$f(\frac{a}{b}\cdot b)=f(\frac{a}{b})+f(b)$ ~~=~~ ~~допустим~~ $= f(\frac{a}{b})+[\frac{b}{2}]=f(a)=[\frac{a}{2}]$

$f(\frac{a}{b})=[\frac{a}{2}]-[\frac{b}{2}]$

допустим $a>b$: $\frac{a}{b}>1 \Rightarrow f(\frac{a}{b})\geq 0$, т.к. $[\frac{a}{2}]-[\frac{b}{2}]\geq 0$

допустим $a<b$: $\frac{a}{b}<1 \Rightarrow f(\frac{a}{b})\leq 0$, т.к. $[\frac{a}{2}]-[\frac{b}{2}]\leq 0$

допустим $a=b$: $\frac{a}{b}=1 \Rightarrow f(\frac{a}{b})=0=f(1)=[\frac{1}{2}]$; только $a<b$ дают $f(\frac{a}{b})\leq 0$.

Когда $[\frac{a}{2}]-[\frac{b}{2}]=0$? Когда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2k+1\\ b=2k\end{cases}\\ \begin{cases}a=2k\\ b=2k+1\end{cases}\end{array}\right.$, $k\in N$

То есть такая пара как 4 и 5 нам даст: $\overset{f(4)}{\overset{\shortparallel}{f(\frac{4}{5}\cdot 5)}}=f(\frac{4}{5})+[\frac{5}{2}]=[\frac{4}{2}]$

$f(\frac{4}{5})=0$

мы знаем, что $x,y\in N$; $1\leq x\leq 21$
$1\leq y\leq 21$

Сколько $f(\frac{x}{y})<0$?

для $x=1$: $2\leq y\leq 21$ подходит, чтобы усл. выполнялось

для $x=2$: $4\leq y\leq 21$, т.к. пара $x=2$, $y=3$ даст $f(\frac{2}{3})=0$

для $x=3$: $4\leq y\leq 21$

...

для $x=19$: $20\leq y\leq 21$

для $x=20$: нет y, уд. усл., т.к. $f(\frac{20}{21})=\overset{10}{[\frac{20}{2}]}-\overset{10}{[\frac{21}{2}]}=0$

для $x=21$: нет y, уд. усл., т.к. $x<y$, чтобы $f(\frac{x}{y})\leq 0$.

см. след. стр. →

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (продолжение).

Имеем
$$19\left\{\begin{array}{ll} x=1 & y=\overbrace{2,3,\dots,21}^{20} \\ \begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \\ \dots \\ x=19 \end{array} & \left.\begin{array}{l} 2\left\{\begin{array}{l} y=\underbrace{4,\dots,21}_{18} \\ y=\overbrace{4,\dots,21} \end{array}\right. \\ y=\overbrace{20,21}^{2} \end{array}\right\}18 \end{array}\right.$$
— групп по 2 — 9.

$x=20$ y — нет подход. чисел

$x=21$ y — нет подход. чисел

$$S=20\cdot1+18\cdot2+16\cdot2+\dots+2\cdot2=20+2\cdot(18+16+\dots+2)=$$
$$=20+2\cdot\frac{20\cdot9}{2}=20\cdot10=200$$

Ответ: есть 200 пар чисел. $x,y\in N$, уд. усл.

№4. Дано: $\triangle ABC$ — прямоуг. с гип AB.; т. $D\in AC$
т. $E\in AC$

$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$; $DE\perp AB$

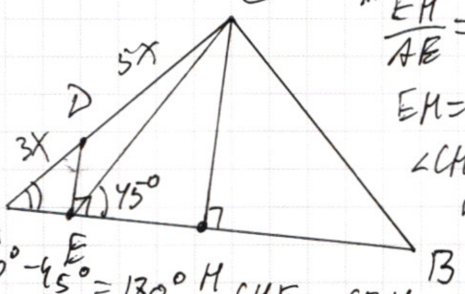
$\angle CED=45^\circ$, $tg(\angle BAC)=?$

Решение: CH — выс. из $\angle C$

из подобия получим:

$\frac{DE}{AB}=\frac{CB}{AC}=\frac{CH}{AH}=tg(\angle BAC)$

$CH=EH$, т.к. $\triangle CEH$ — равнобед.



$\angle CEH=45^\circ=\angle ECH=90^\circ-45^\circ=180^\circ-\angle CHE-\angle CEH.$

$*\ \frac{EH}{AE}=\frac{DC}{AD}=\frac{5}{3}$

$EH=\frac{5}{3}AE$

$\angle CHE=90^\circ$ т.к. CH-выс

$$\boxed{\frac{EH}{AE}\overset{*}{=}\left(\frac{AD}{DC}\right)^{-1}=\frac{5}{3}}\ ;\ AH=\frac{8}{3}AE=AE+EH$$

$CH=\frac{5}{3}AE=EH$

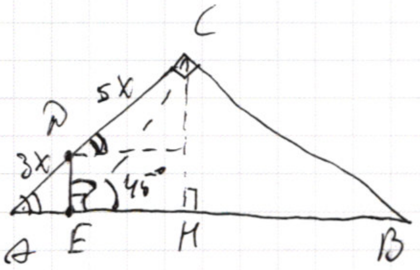
$tg(\angle A)=\frac{CH}{AH}=\frac{5}{8}.$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



$tg(\angle BAC) = ?$

$\angle CED = 45^\circ$

$CH^2 + BH^2 = CB^2 = BH \cdot AB$

$AC^2 = AH \cdot AB$ $\quad CH^2 + AH^2 = AC^2 = AH \cdot AB$

$BC^2 = BH \cdot AB$ $\quad CH^2 = AB^2 - (AH^2 + BH^2)$

~~AE~~ $\frac{DE}{AE} = \frac{CB}{AC} = \frac{CH}{AH}$ $\quad \frac{DE}{CH} = \frac{3}{8}$

$EH = CH$

$\frac{EH}{AE} = \frac{5}{3} \Rightarrow EH = \frac{5}{3} \cdot AE = CH$

$AH = \frac{8}{3} AE$

$tg(\angle BAC) = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{5}{3} AE}{\frac{8}{3} AE} = \frac{5}{8}$ $\quad \Rightarrow \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{25}{64}$

$AC = \sqrt{29}$, $S_{\triangle CED} = ?$

$DC = \frac{5}{8}\sqrt{29}$

$AD = \frac{3}{8} \cdot \sqrt{29}$, $AE = \sqrt{\frac{29}{89}} \cdot \frac{15}{8}$

$\frac{89}{25} \sin \alpha^2 = 1$

$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{89}}$

$\frac{25}{64} \cdot 29 = \frac{29}{89} \cdot \frac{225}{64} + EC^2 - \sqrt{2} \cdot EC \cdot \sqrt{\frac{29}{89}} \cdot \frac{15}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№7. $\left.\begin{matrix} \overset{20}{2\ldots21} \\ \overset{19}{3\ldots21} \\ 4\ldots21 \\ \ldots \\ \overset{3}{19\ldots21} \\ \overset{2}{20;21} \end{matrix}\right\} 19$

$\frac{(2+20)\cdot19}{2} = 19\cdot11 = 209$ $\overset{19}{190^{+}}$

нет

$\frac{21\cdot20}{2} = 210$

$x = 1\ldots20$

$\left.\begin{matrix} y_1 = \overset{20}{2\ldots21} \\ y_{20} = \overset{1}{21} \end{matrix}\right\downarrow 20$

№3. $y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$

$t = y-2x$ $\quad t = 2x+y$

$t^2 = y^2+4x^2-4xy \Rightarrow xy = (y^2+4x^2-t^2)\cdot\frac{1}{4}$ $\quad xy = \frac{1}{4}(t^2-4x^2-y^2)$

$4x^2+y^2-4xy = xy-2x-y+2$

$4x^2+x(2-5y)+\cancel{(y^2+y^2)=0}+(y^2+y-2)$

$D = 25y^2+4-20y-16y^2-32-16y = 9y^2-36y+36 = (3y-6)^2$

$x = \frac{(5y-2)\pm(3y-6)}{8} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x_1 = \frac{8y-8}{8} = y-1 \\ x_2 = \frac{2y+4}{8} = \frac{1}{4}y+\frac{1}{2} \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} y = x+1 \quad (3) \\ y = 4x-2 \quad (4) \end{matrix}\right.$

(3) $x\cdot(x+1)-2x-x-1+2 \geq 0$

$x^2-2x+1 \geq 0 \Rightarrow (x-1)^2 \geq 0$ – всегда

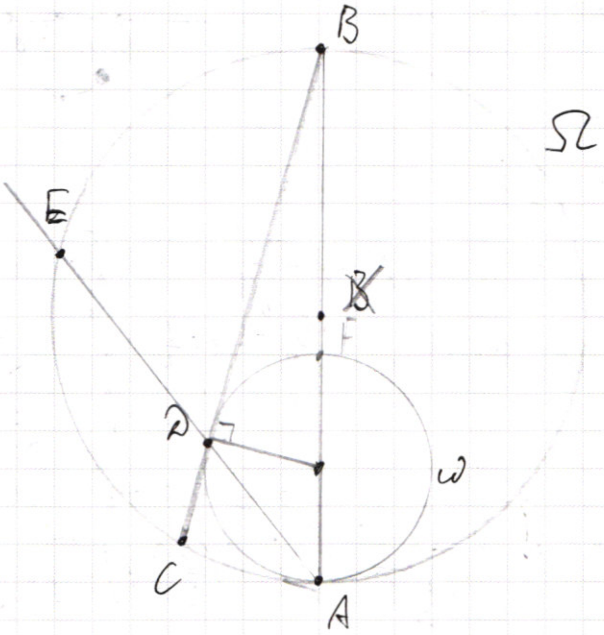
(4) $x(4x-2)-2x-(4x-2)+2 \geq 0$

$4x^2-8x+4 \geq 0$

$4(x-1)^2 \geq 0$ – всегда.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



R, r = ?

$S_{\square BACE} = ?$

CD = 1

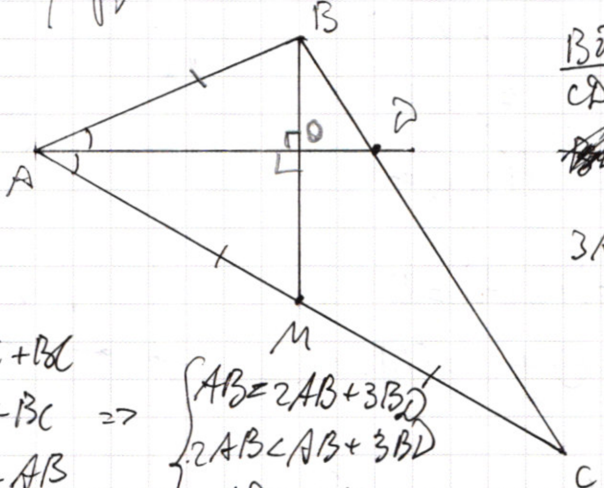
BD = 3

$\cup CA = \frac{\cup DA - \cup DF}{2}$

$BD^2 = BF \cdot BA$

$\cup APF = 180°$

№2.



$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

~~[illegible]~~ $BC = BD + CD = 3BD =$
$= 1,5CD$

$3AB + 3BD = 1200$

$AB, BD \in \mathbb{N}$

$AB + BD = 400$

1… 399   399… 1

399

$AB \in [399; 200]$

$200 < AB$

$$\begin{cases} AB < AC + BC \\ AC < AB + BC \\ BC < AC + AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2AB + 3BD \\ 2AB < AB + 3BD \\ 3BD < 3AB \end{cases}$$

$$\begin{cases} BD < AB \\ AB < 3BD \end{cases}$$

$400 < 4BD$

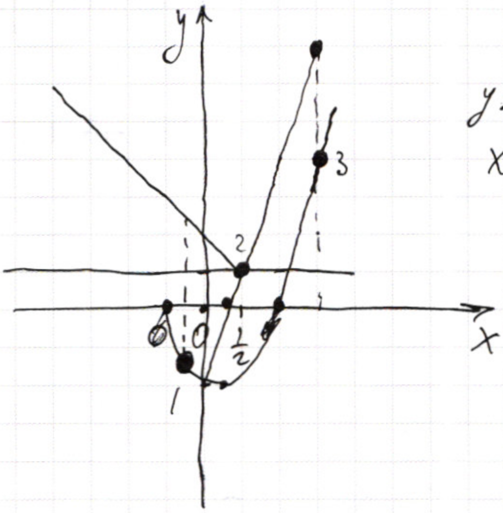
$100 < BD$

№6. $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$, $x\in[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$

$\begin{cases} 2x^2-x-1 \le ax+b \\ ax+b \le x+|2x-1| \end{cases}$; $x_{в_П} = \frac{1}{4}$; $x_{вг} = \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$: $x+1-2x = 1-x$

$x \ge \frac{1}{2}$: $x+2x-1 = 3x-1$



y: 5,5
x: 3

$x=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$

$x=\frac{3}{2}$; $y=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=2$

$x=-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{8}$

т.1 $(\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$; $y=ax+b$, $-\frac{5}{8}=-a\cdot\frac{1}{4}+b$ $\Rightarrow -\frac{5}{8}=-\frac{3}{8}-\frac{1}{4}$

т.2 $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ $\quad \frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b$ $\Rightarrow b=-\frac{1}{4}$

т.3 $(\frac{3}{2};2)$ $\quad 2=\frac{3}{2}a+b=a+\frac{1}{2} \Rightarrow a=1{,}5=\frac{3}{2}$

$f(\frac{4}{5}\cdot 5)=f(\frac{4}{5})+[\frac{5}{2}]=[\frac{4}{2}] \Rightarrow f(\frac{4}{5})=0$

$\begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$ - ед. пара.

$f(1\cdot 2)=$

№7. $f(x)$, $x\in Q$, $x>0$

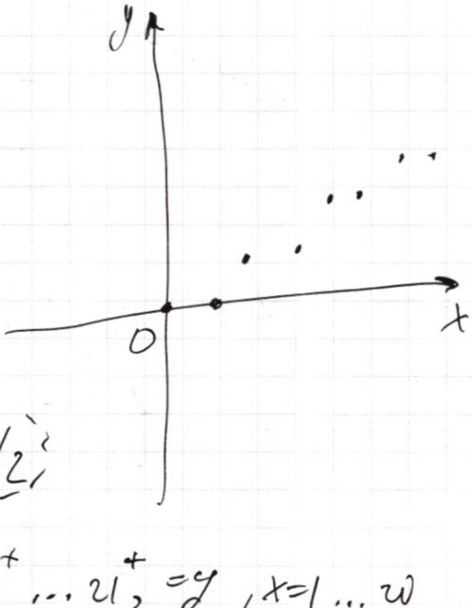
$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[\frac{p}{2}]$

$1\le x\le 21$

$1\le y\le 21$

$f(x/y)\le 0$



$f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(1)=1=f(\frac{1}{4})+f(\frac{2}{2})=0$

$f(\frac{1}{4}\cdot 4)=f(\frac{1}{4})+f(\frac{4}{2})=0+2=f(1)=0$

$f(1)=0$ $f(\frac{1}{4})=-2$

$f(\frac{1}{3})=-1$

~~$C_{21}^{2}=\frac{21!}{19!\cdot 2!}=210$~~ $\quad P_n^k=\frac{21!}{19!}=420$ $/2$

$\overset{0}{=}$ $f(1)=f(\frac{1}{3}\cdot 3)=f(\frac{1}{3})+[\frac{3}{2}]=1$ $\quad \boxed{210}$

$= f(\frac{1}{3})+1 \Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$

$\underbrace{\overset{+}{2}\ \overset{+}{3}\ \overset{+}{4}\ \overset{+}{5}\ \overset{+}{6}\ \ldots\ \overset{+}{21}}_{20}$ $=y$, $x=1\ldots 20$

$f(\frac{2}{4}\cdot 4)=0$ $\quad f(\frac{2}{5}\cdot 5)=2^{-1}=1$ $\quad$ 34

$f(\frac{2}{4})=f(\frac{1}{2})=-1$ $\quad f(\frac{5}{2}\cdot 2)=f(\frac{5}{2})+1=2$

$x=2$

$f(\frac{2}{3}\cdot 3)=f(1)=0=1+f(\frac{2}{3})$

$f(\frac{2}{3})=-1$

№1. a, b, c ; $c = q \cdot b$, $a = \frac{1}{q} \cdot b$

$ax^2 + bx + c = 0$, $D = b^2 - 4ac$

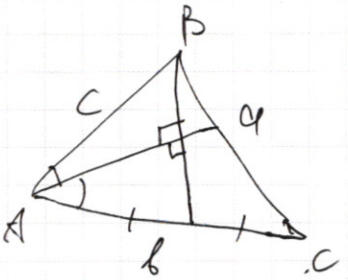
$\frac{1}{q} x^2 + x + q = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2 \cdot b} \cdot q$

$x = -\frac{q}{2} \pm q \cdot \sqrt{1-4}$ => $b \in R / \{0\}$ нет реш.

есть реш $b=0$, $d=0$.

№2. a, b, c

$a + b + c = 120$



$(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \geq \frac{3}{4}$ $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$x^2 + y^2 \geq xy \geq 2x + y - 2$

№3. $\begin{cases} \overset{(1)'}{y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}} \\ \overset{(2)'}{2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0} \end{cases}$ => $\begin{cases} xy - 2x - y + 2 \geq 0 \text{ ; } xy + 2 \geq 2x + y \geq 4x \\ y - 2x \geq 0 \text{ ; } y \geq 2x \\ (y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 \quad (1) \\ 2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$

$\frac{y^2}{2} + 2 \geq 4x$

$y \geq \sqrt{8x - 4}$

(2) $2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$

$t = 2x - y$

(1) $y^2 + 4x^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$

$(y^2 + y + \frac{1}{4}) + (4x^2 + 2x + \frac{1}{4}) = 5xy + 2{,}5$

$(y + \frac{1}{2})^2 + (2x + \frac{1}{2})^2 = 5xy + 2{,}5$

$2x^2 + y^2 - 4y - 1 + 2(y - 2x)^2 - 2xy = 0$

$10x^2 + 3y^2 - 10xy - 2y - 1 = 0$

(1) $4x^2 + y^2 + y + 2 - 5xy + 2x = 0$

$4x^2 + x(2 - 5y) + (y+1)^2 + 1 = 0$

$D = 4 - 20y + 25y^2 - 4 - y^2 - 2y - 1 =$

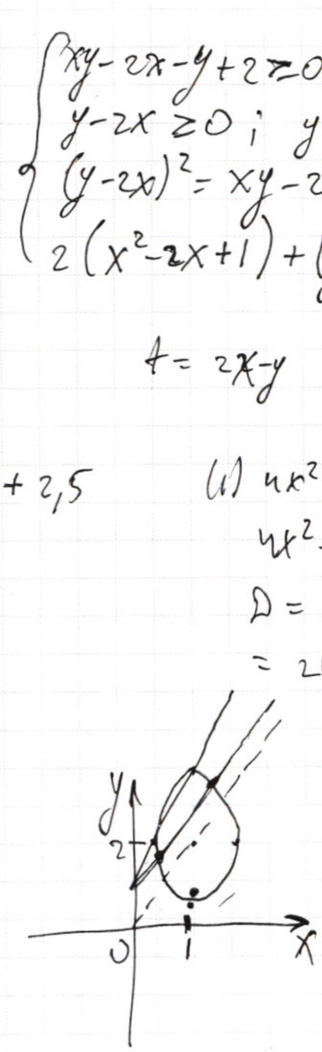
$= 24y^2 - 22y - 1$

(2)': $2(x-1)^2 + (y-2)^2 - 3 = 0$

$x - 1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{4}$

$x_1 = \frac{\sqrt{3} + 4}{4}$

$x_2 = \frac{4 - \sqrt{3}}{4}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА