МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c, d – члены геом. прогресс

a – первый член, q – знаменатель.

$b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$

~~d – корень~~ ур

$f(x) = ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2aqx + aq^2$

$f(d) = c$.

Найти: c – ?

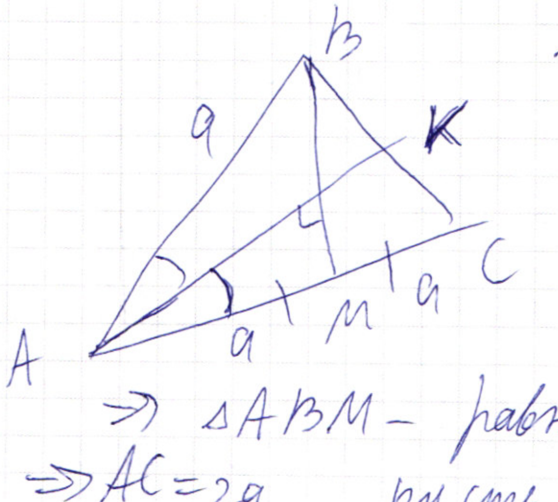
$f(d) = c \Rightarrow a \cdot a^2q^6 + 2aq \cdot aq^3 + aq^2 = c$

$aq^2(a^2q^4 + 2aq^2 + 1) = c$.

$$\left[\begin{array}{l} aq^2 = c \\ (aq^2+1)^2 = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} aq^2 = c \\ aq^2 = -1. \end{array}\right.$$

Заметим, что $aq^2 = c$

Ответ: -1 или 0.



№2. $p = 120c$

ΔABC, дl $AK \perp BM$

AK – биссектр, BM – медиана.

Т.к. $AK \perp BM \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABM$ – равноб $\Rightarrow AB = AM = a \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2a$, пусть $BC = b$.

$3a+b=P=1200$ $b=$ $3a=1200-b$.

По н-ву треугольника:

~~a+~~ $AC+AB>BC$

$3a>b$

$1200-b>b$

$600>b$, $b\in N$

~~Пусть k - произвольное b~~

$3a=1200-b \Rightarrow$ ~~k:3~~ $b \vdots 3$

~~Т.е b задает однозначно треугольник (из-за связи сторон с периметром). b - все целые числа кратные 3 от 1 до 600 599~~

~~всего 199 таких троек сторон $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow$ 199 треугольников, удовлетворяющих условию.~~

~~Ответ: 199.~~

Также: $AB+BC>AC$

$a+b>2a$ $b>\frac{1200-b}{3}$ $3b>1200-b$

$b>a$ $4b>1200$

$\begin{cases} b>300 \\ 600>b. \end{cases}$ $AC+BC>AB$ (всегда выполн.) b однозначно задает a

из-за $3a=1200-b$, $b\vdots 3$ и $b\in(300;600)$

$b\in N \Rightarrow$ подходящих b 99 штук $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 99 треугольников. Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№1~~. №1. №3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \quad (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

(1) воз-дем ~~1~~ в квадрат. $xy-2x-y+2\geq 0$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0.$$

$$y^2-y(5x-1)+4x^2+2x-2=0.$$

$$D=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$$

$$=9x^2-18x+9=9(x^2-2x+1)=9(x-1)^2$$

$$y_1=\frac{5x-1+3(x-1)}{2}=\frac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2\ (*)$$

$$y_2=\frac{5x-1-3x+3}{2}=x+1.\ (**)$$

~~[illegible]~~

(*) Подставим во 2-е уравнение:

$$2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0$$

$$2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0.$$

$$18x^2-36x+15=0.$$

$$6x^2-12x+5=0$$

$$D_1=36-30=6$$

$$x=\frac{6+\sqrt6}{6} \quad \text{или} \quad x=\frac{6-\sqrt6}{6}$$

(*) $\left[\begin{cases} x = \frac{6+\sqrt{6}}{6} = 1+\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y = 4+\frac{4}{\sqrt{6}}-2 = 2+\frac{4}{\sqrt{6}} \end{cases}\right.$ случай $y = 4x-2$

$\begin{cases} x = \frac{6-\sqrt{6}}{6} = 1-\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y = 4-\frac{4}{\sqrt{6}} - 2 = 2-\frac{4}{\sqrt{6}}. \end{cases}$

(~) $2x^2+(x+1)^2 - 4x - 4(x+1)+3=0$ $\quad$ ~~$y=x+$~~ $\quad$ $y = x+1$

$2x^2+x^2+2x+\cancel{1}-4x-4x-\cancel{4}+\cancel{3}=0$

$3x^2-6x+0=0$

$x(3x-6)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3. \end{cases} \end{array}\right.$

Отбор корней: $xy-2x-y+2\geq 0$

(*) $(4x-2)x-2x-4x+2+2\geq 0$

$4x^2-2x-2x-4x+4\geq 0$

$4x^2-8x+4\geq 0$

$x^2-2x+1\geq 0$

$(x-1)^2\geq 0$ (всегда выполн.)

(~) $(x+1)x-2x-x-1+2\geq 0$

$x^2+\cancel{x}-2x-\cancel{x}-1+2\geq 0$

$x^2-2x+1\geq 0$

$(x-1)^2\geq 0$ (всегда выполн).

Ответ: $\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{6}}; 2\pm\frac{4}{\sqrt{6}}\right)$; $(0;1)$; $(2;3)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

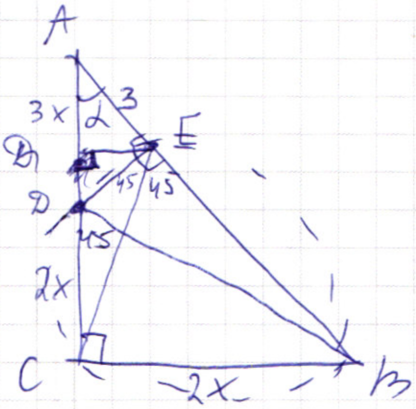
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$AD : AC = 3 : 5$, $DE \perp AB$

$\angle CED = 45°$

а) $tg \angle BAC$ - ?

б) $AC = \sqrt{29}$, S_{CED} - ?

$\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180° \Rightarrow CDEB$ - впис

$\angle CDB = \angle CEB = 45°$ (т.к. о пир на одн. дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CDB$ - ~~вписанный~~ равноб $\Rightarrow CB = 2x$

$tg \angle BAC = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = tg\alpha$.

$AC = \sqrt{29} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

Проведем высоту в $\triangle AED$ на AC

$\triangle$ $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$AB^2 = 4x^2 + 25x^2 = 29x^2$

$AB = x\sqrt{29} = AE + EB$

$\triangle AED \sim \triangle ABC$, $k = \frac{3}{5}$ ~~$\frac{2}{5}$~~

$\frac{\cancel{AE}}{5x} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ $\frac{AE}{5x} = \frac{3x}{AE+EB}$.

$AE^2 + AE \cdot EB = 15x^2 = 15 \cdot \frac{29}{25} = \frac{3 \cdot 29}{5}$

$AE + EB = x\sqrt{29} = \frac{29}{5}$

$AE^2 + AE(\cancel{\frac{29}{5} - EB})(\frac{29}{5} - AE) = \frac{3 \cdot 29}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{AE^2} + \cancel{\frac{29}{5}}AE - \cancel{AE^2} = \frac{3\cdot 29}{5}\cancel{AE}$

$\underline{AE = 3}$ $AC = \sqrt{29}$.

$S_{\triangle AEC} = \frac{AC\cdot AE}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{3\sqrt{29}}{2}\cdot\sin\alpha$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\cancel{tg}\ 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$1 + \frac{25}{4} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $\frac{29}{4} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \frac{4}{29} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$ (т.к. α - остр)

$S_{\triangle AEC} = \frac{3\sqrt{29}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{29}} = 3$.

$\frac{S_{AED}}{S_{DEC}} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2}$ $S_{AED} + S_{DEC} = S_{AEC} = 3$.

$S_{AED} = 3 - S_{DEC}$

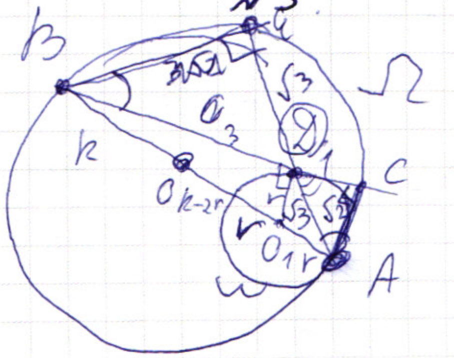
$\frac{3 - S_{DEC}}{S_{DEC}} = \frac{3}{2}$ $6 - 2S_{DEC} = 3S_{DEC}$

$6 = 5S_{DEC}$

$S_{DEC} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; $S = \frac{6}{5}$.

№5.



Дано: AB - диаметр большей Ω,

$BC \perp$ кас $\omega = D$,

$AD \cap \Omega = E$.

$CD = 1$

$BD = 3$

Найти: r, R, S_{BACE}.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к AB проходит через центр окружности Ω, X и кас Ω в точке A, то AB проходит через центр маленькой окружности (т.к AB – является осью симметрии). Пусть O_1 – центр окружности ω. $r(\omega) = r$, $r(\Omega) = R$.

~~$AD = \sqrt{2}R$~~

$$\begin{cases} r^2 + 9 = (2R - r)^2 \ (\text{из } \triangle BDC_1) \\ 9 = 2(R-r)\cdot 2R \ (\text{степень точки } B \text{ отн } \omega) \end{cases}$$

$9 = 4(R^2 - Rr)$

$\cancel{r^2} + 9 = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$.

$\angle BCA$ – опир на диам $AB \Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$
$\Rightarrow AC \parallel O D_1 \Rightarrow \triangle BD_1C_1 \sim \triangle BCA$

$\frac{3}{4} = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2R - r}{2R}$.

$6R = 8R - 4r$.

~~$8r = 2R$~~ $\quad 2R = 4r$

~~$R = 4r$~~ $\quad R = 2r$

Степень точки B отн ω.

$9 = 2(R - r)\cdot 2R \quad$ ~~$9 = 2\cdot 3r\cdot 8r$~~.

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7
(Нумеровать только чистовики)

$~~9 = 4 \cdot 4r \cdot 3r.~~$ $\quad R = 2r$

$~~3 = 16r^2~~$

$~~r^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{4}.~~$

$~~R = 2r \cdot \sqrt{3}.~~$

$~~\triangle BCA:~~$

$~~3 \quad 8 \quad 12 =~~$

$S = 4 \cdot 2r \cdot r$

$\frac{9}{8} = r^2 \quad r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{2}} = R$

$\triangle ABC:$

$AC^2 = AB^2 = BC^2 + AC^2 \qquad 2R = 3\sqrt{2} = AB$

$(\cancel{2\sqrt{3}})^2 = 16 + AC^2 \quad (\triangle ABC)$

$(3\sqrt{2})^2$

$18 - 16 = AC^2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$(\angle BEA = 90^\circ$, т.к опир на $AB)$

$~~\triangle BDE \sim \triangle ACD \quad \triangle \;k = \frac{1}{3} \Rightarrow~~$

$~~\Rightarrow BE = 3\sqrt{2}. \quad DA = 3\sqrt{2}.~~$

$AD^2 = 2 + 1 = 3 \quad AD = \sqrt{3} \; (\triangle ACD)$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (т. о отр пер. хордах)

$3 = \sqrt{3} \cdot DE \qquad \sqrt{3} = DE.$

$BE^2 = 9 - 3 = 6, \; BE = \sqrt{6}.$

$S_{BACE} = S_{BED} + S_{ACD} + S_{ADB}.$

$S_{BACE} = \frac{BE \cdot ED}{2} + \frac{BC \cdot AC}{2} + \frac{AD \cdot AB}{2} \cdot \sin\angle BAD$

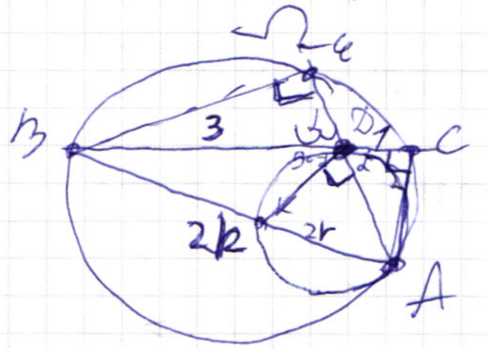
$\sin\angle BAD = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

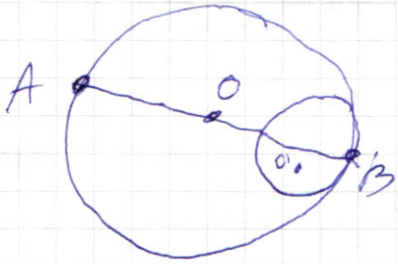
$S_{BACE} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{18}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2} + \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{18}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \; R = \frac{3}{\sqrt{2}}; \; S_{BACE} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$

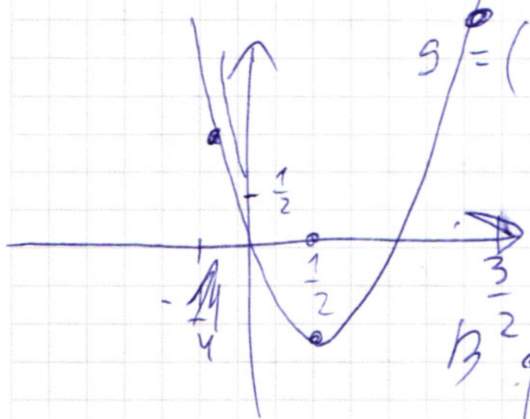
№5



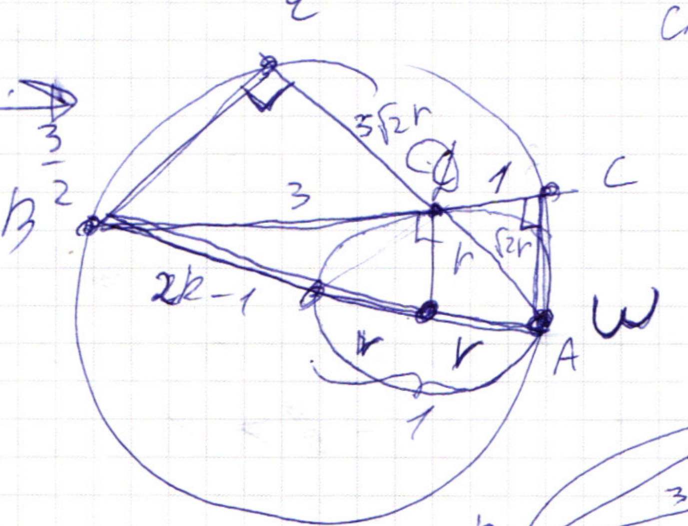


$BD^2 = BK \cdot BA.$

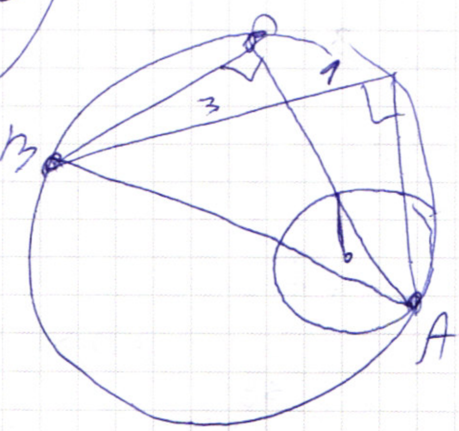
$9 = (2R - AK) \cdot 2R.$



$CB = 4.$



$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



$x + |2x - 1|$

$x \geq \frac{1}{2}$ $\qquad 3 \cdot 1 = 6r$

$3x - 1$ $\qquad r = \frac{1}{2}.$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 =$ $\qquad 9 = 2R \cdot 1.$

$= \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - 1 =$ $\qquad R = 4,5.$

D AB ~~d AB − лежит~~

$= -\frac{11}{8}. \; -\frac{9}{8}.$ O − лежит на AB

$x \leq x - 2x - 1$

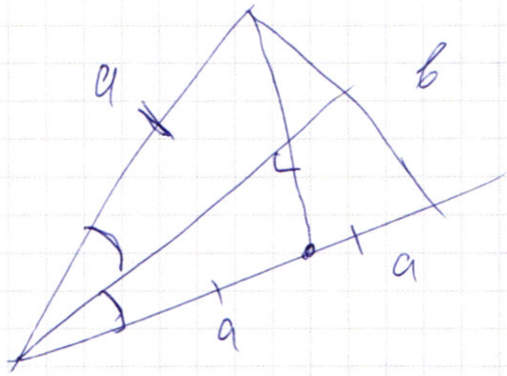
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a+b>2a$

$b>a$.

$b+2a>a$

$b>-a$.

$300 \geq \frac{1200-b}{3}$

$900 \geq 1200-b$

$b \geq 300$

$3a+b$ $\quad 3a > b$ $\quad a+b>2a$

$597 = 3+3(n-1)$

$b-a>0$

$\frac{594}{3} = n-1$ $\quad 3a+b = 1200$ $\quad b>a$.

$a_n = 3+3(n-1)$ $\quad 1200-b>b$ $\quad 2a+b>a$

$1200>b$ $\quad b>-a$.

$598 =$

$1200>b$

По нер-ву треугольника

$3a>b$

$3a+b = 1200$

$3a = 1200-b$.

$1200-b>b$.

$1200>2b$

$600>b$

пусть $b=k$.

$3a = 1200-b$ $\quad 99$.

$597 = 303+3(n-1)$

$294 = 3(n-1)$

$597-303 = 294$

$294 : 3 = 98$

199

$1200-3a \geq a$.

$1200 \geq 4a$

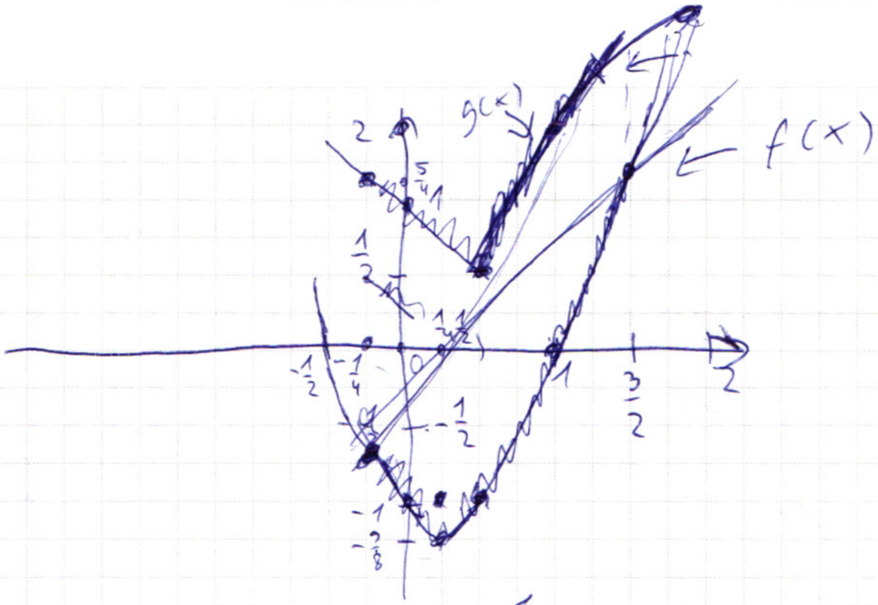
$300 \geq a$

597

303

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$g(x) = x + |2x - 1|$ $\quad x \geq \frac{1}{2}$ $\quad \cancel{x} = g(x) = 3x - 1$

$g(x) = -x + 1$ $\quad , x \quad \frac{5}{4}$

$\cancel{b}$ $b > \frac{1}{2}$ $\quad a \geq 0$, иначе пересечение с параболой.

$h(x) = ax + b.$ $\quad 2 \approx \quad 2 + \frac{2}{6} + \cancel{4} + \frac{16}{6} - \cancel{4} - 8 + \cancel{3} =$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 2$ $\quad =$

$AE(AE + EB) = 15 \cdot \frac{25}{25} \cdot x^2 \quad 8 - 8 = c.$

$\cancel{A} \quad AE \cdot \cancel{x}\sqrt{25} = 15x^2$

$AE = \frac{15x}{\sqrt{25}} = \frac{15}{\sqrt{25}} \cdot \frac{\sqrt{25}}{5} = 3.$

$2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 4\left(2 - \frac{4}{\sqrt{6}}\right)$

$+ 3 = c.$

$2\left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6}\right) + \left(4 - \frac{16}{\sqrt{6}} + \frac{16}{6}\right) - 4 + \frac{4}{\sqrt{6}} - 8 + \frac{16}{\sqrt{6}}$

$- 12 + 4 + 2 + 3 + 3 = c - 10 +$

$+ 3 = c.$

$2 - \cancel{\frac{4}{\sqrt{6}}} + \frac{2}{6} + \cancel{4} - \cancel{\frac{16}{\sqrt{6}}} + \frac{16}{6} - \cancel{4} + \cancel{\frac{4}{\sqrt{6}}} - \cancel{8} + \cancel{\frac{16}{\sqrt{6}}} + 3 = c.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

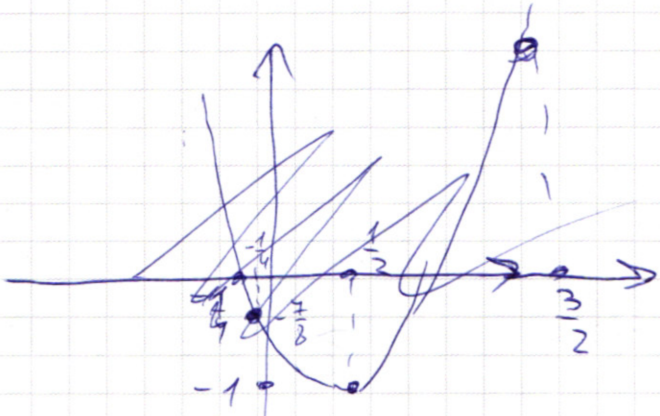
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\underbrace{2x^2-x-1}_{=f(x)} \le ax+b \le \underbrace{x+|2x-1|}_{=g(x)} \qquad x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

~~$f(x)=$~~



(1) $\begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ g(x)=3x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{3}{2}\ge x\ge\frac{1}{2} \\ g(x)=3x-1 \end{cases}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1=$

$=$

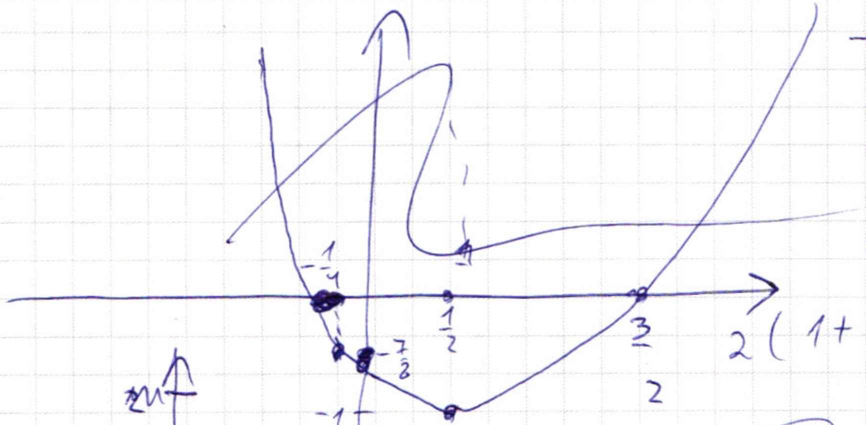
(2) $-\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$

$g(x)=-x+1$

$2\left(1+\frac{1}{\sqrt6}\right)^2+\left(2+\frac{4}{\sqrt6}\right)^2-4\left(1+\frac{1}{\sqrt6}\right)-$

$-4\left(2+\frac{4}{\sqrt6}\right)$

$+3=0.$



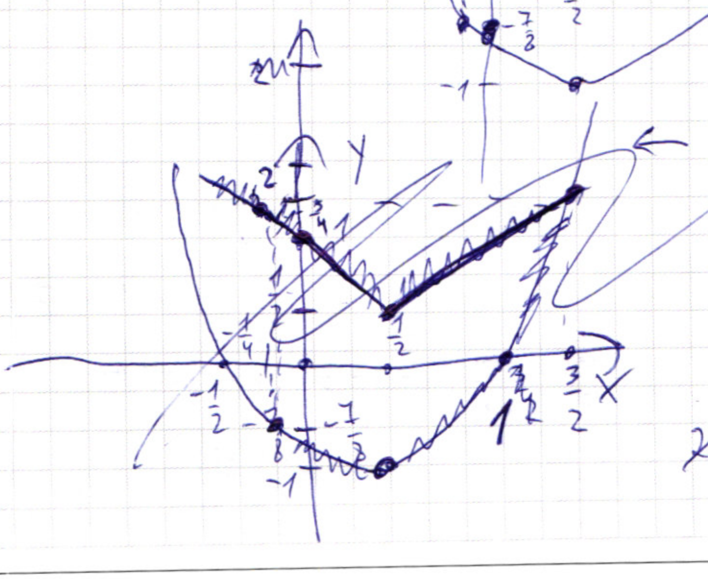
$2\left(1+\frac{2}{\sqrt6}+\frac{1}{6}\right)+$

$+4+\frac{16}{\sqrt6}+\frac{16}{6}$

$-4-\frac{4}{\sqrt6}$

$-8-\frac{16}{\sqrt6}$

$+3=0.$



$f(x)$

Нули:

$2x^2-x-1=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$

$\cancel{2}+\frac{4}{\sqrt6}+\cancel{\frac{2}{6}}+\cancel{4}+\cancel{\frac{16}{\sqrt6}}+\cancel{\frac{16}{6}}-$

$-\cancel{4}-\cancel{\frac{4}{\sqrt6}}-\cancel{8}-\cancel{\frac{16}{\sqrt6}}+\cancel{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y^2-4xy+4x^2= xy-2x-y+2.$

$\cancel{(y-2x)^2 = y(x-1)-2(x-1)}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0.$

$y^2-y(5x-1)+4x^2+2x-2=0.$

$D = 25x^2-10x+1-16x^2-8x+8 =$

$= 9x^2-18x+9 = 9(x^2-2x+1) =$

$= 9(x-1)^2$

$y = \frac{5x-1+3(x-1)}{2} = \frac{8x-4}{2} = 4x-2$

$y = \frac{5x-1-3(x-1)}{2} = \frac{2x+2}{2} = x+1$

$\sqrt{3}$

$m^2-12m+30=0$

$\cancel{m=5}$

$m=10$

$D_1 = 36-30$

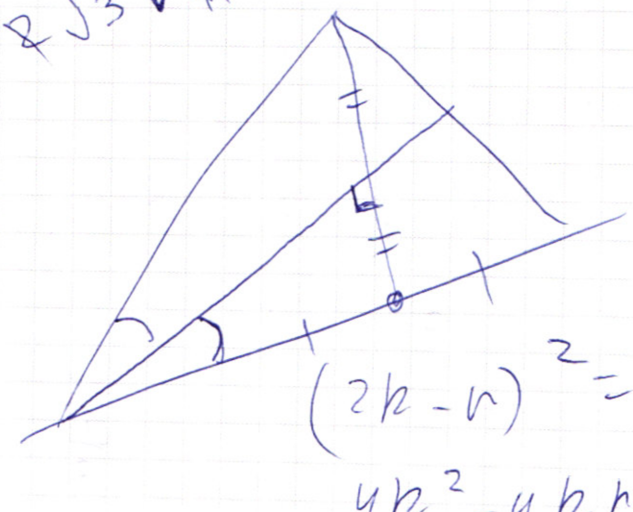
$4\cdot 4r\cdot 3r=9.$

$\frac{3}{4}$

$16r^2=\frac{9}{3}$

$r=\frac{\sqrt{3}}{4}.$

$8\sqrt{3}Vk^2$



$\frac{3}{4} = \frac{2k-r}{2k}$

$6k=8k-4r.$

$2k=4r.$

$(2k-r)^2=r^2+9\quad k=2r.$

$4k^2-4kr+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}+9$

$4\cdot\ 4k(k-r)=9.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

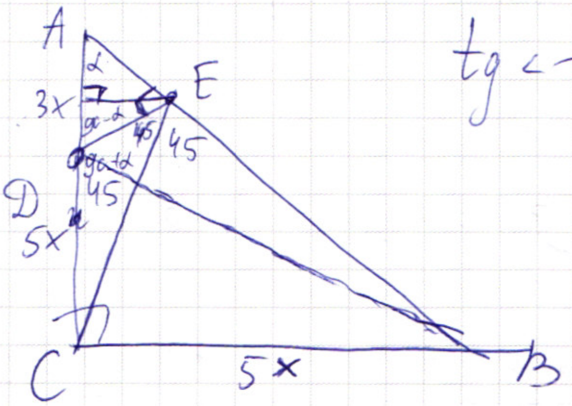
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№3~~ № 4.



$tg\angle \cancel{BAC}$.

$\Delta DAE \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CM}$

$tg\angle\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{CM}{AM}$

$AB^2 = 25x^2 + 64x^2 = 85x^2$ $\quad \frac{+\,64}{\frac{25}{89}}$

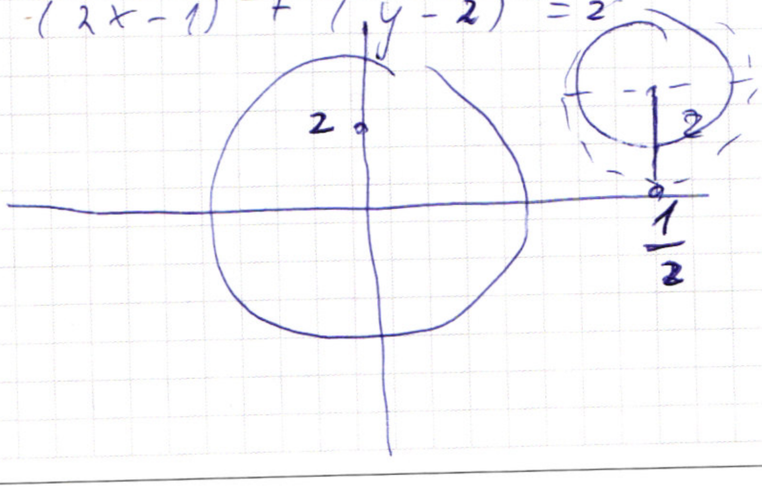
$tg\alpha = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}$

$8x = \sqrt{29} \qquad x = \frac{\sqrt{29}}{8}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 - 4x + 1 \quad + y^2 - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$(2x-1)^2 + (y^2 - 4y + 4) - 2 = 0$

$(2x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)}$

$x\in[-\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}]$.

$2x^2+y^2-4y+4+\cancel{2u}-4x-1=0$.

$\cancel{x\in}\ 0\ge 2x-1$

$y\cancel{-2x}$

$\frac{1}{2}\ge x$

$(y-2)^2+2x^2-4x-1=0$.

$2x^2-x-1\le ax+b\le x+2x-1$

$\cancel{m^2-4m+2=0}$.

$\cancel{4-2}$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$.

$\frac{1}{2}a+b\ge$

$y^2-3xy+4x^2+2x+y-2=0$.

$3x-1\ge ax+b$.

$\cancel{y^2-4xy+4x^2+2x+y+xy-2=0}$ 2

$\cancel{(y-2x)^2}$

$\frac{1}{2}a+b\ge-1$

$2x^2+y^2-4y+$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}a+b\le\frac{1}{2}$

$2\sqrt{2}\cdot 3\vee 4$.

$2x^2+y^2-4x-4y=-3$.

$2\cdot 9\vee 4$.

$\cancel{4x^2+2y^2-8x-8y}=-6$

$3x-1$

$\cancel{3y^2}-9xy+\cancel{12x^2}+\cancel{6x}+\cancel{3y}=6$

$\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$.

$16x^2+5y^2-2x+5y-3+y=0\ |:$

y^2

$\cancel{16\frac{x^2}{y^2}+5-2\frac{x}{y}+}$

$\frac{6}{\sqrt{2}}\vee 4$

$\frac{36}{2}\vee 16$.

$2x^2-x-1\le ax+b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{x+y-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $2(x^2-2x)+y^2-4y+3=0.$

$2(x^2-2x+1)+y^2-4y+1=0.$

$2(x-1)^2+y^2-4y+1=0.$

$\cancel{2(x-1)^2+}$ $D_1=4-1=3.$

Для того чтобы выполнялось для всех $x\in[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}]$.

Необходимо, чтобы минимум $ax+b$ на промежутке был больше максимума на

$\cancel{ax}$ $-\frac{1}{4}a+b\geq-1$

№1.

$a=\cancel{b}d$ $\quad$ $\cancel{ax}$ $c=dq^3$, корень

$b=dq$ $\quad$ $ax^2+2bx+c=0.$

$c=dq^2$ $\quad$ $d\cdot d^2q^6+2\cdot dq\cdot dq^3+dq^2=0.$

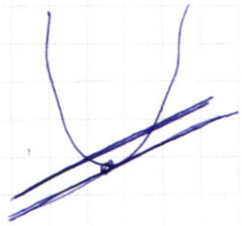
$dq(d^2q^5+2dq^3+q)=0.$

$dq^2(d^2q^4+2dq^2+1)=0.$

$$\left[\begin{array}{l} d=0 \\ q=0 \\ \cancel{d^2q^4+2d} \\ (dq^2+1)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ q=0 \\ dq^2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

a

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ q=0 \\ c=dq^2=-1. \end{array}\right.$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underbrace{2x^2 - x - 1}_{f(x)} \le ax + b \le x + |2x-1|$ для $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

П: 1) $2x-1 \ge 0$ $\frac{3}{2} \ge x \ge \frac{1}{2}$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 3x - 1$

Д-т 1) $a > 0$ $ax+b$ — возр $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}$

a) $\Rightarrow$

$ax+b$

$-\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b > f(\frac{3}{2}) \\ \frac{1}{2}a + b > f(\frac{1}{2}) \end{cases}$

$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 =$

$=$

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) =$

$= 2(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

$-\frac{1}{2} - 1$

$2 \cdot \frac{9}{4} -$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a + b > 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 > 2 \cdot \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}a + b > -1 \end{cases}$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 =$

$-\frac{1}{4}$ $\frac{3}{2}$

$2x^2 - x - 1 - ax - b \le 0$. $= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$2x^2 - x(1+a) - 1 - b \le 0$ при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$= -\frac{1}{8} - 1$

$2x^2 - x - 1 = 3x - 1$

$-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$

$\begin{cases} f(-\frac{1}{4}) \le 0 \\ f(\frac{3}{2}) \le 0 \end{cases}$

$m^2 - m - 2 = 0$

$m = 2$

$2x^2 - 4x = 0$ $m = -1$

$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(1+a) - 1 - b \le 0 \\ 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2}(1+a) - 1 - b \le 0 \end{cases}$

$x = 0$

$x = 2$.

$D = (1+a)^2 + 8(1+b) \ge 0$ на $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} \quad \frac{3}{8} - 1 =$

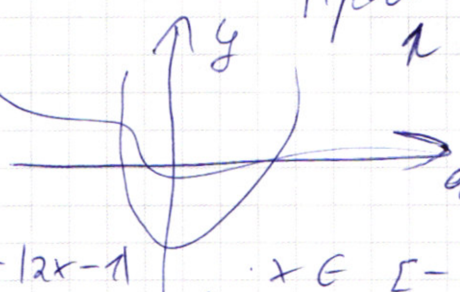
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a^2+2a+1+8+8b \geq 0$



Простые числа

$1\ 2,\ 3\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,$

$2x^2-x-1 \leq ax+b \leq x+|2x-1|,\quad x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

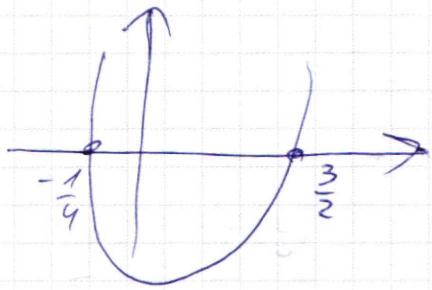
$2x^2-x-1-ax-b \leq 0$

$2x^2-x(1+a)-1-b \leq 0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$b=\frac{1}{k}$

$f(\frac{a}{k})=f(a)+f(\frac{1}{k})$



$\begin{cases} f(-\frac{1}{4})=0 \\ f(\frac{3}{2})=0 \end{cases}$ ← даст нам ~~минимал~~ максимальное b

$x \neq 1.$

$3x-1 \geq ax+b$

~~$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$~~

$3x-ax \geq b+1.$

$x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$x(3-a) \geq b+1.$

$f(5) = f(5)+f(1)$

$x \geq \frac{b+1}{3-a}$

$3>3>a$

$f(1)=0$

$b=-1 \quad a=3$

подходит.

$a=21$

$\frac{b+1}{3-a} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.$

$\frac{1}{2} > \frac{b+1}{3-a}$

$\frac{3-a}{2} > b+1.$

$3-a > 2b+2.$

Любое нат. число от

$1 > 2b+a.$

~~$f(a) < f$~~

$ab=\frac{x}{y} \quad by=$

$f(a)+f(\frac{1}{k})<0$ 190, 21

$10 <$

$f(a) < f(\frac{1}{k})$

комбинация простых.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)