МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Т.к. a, b, c члены арифм. прогрессии (при этом a-первый, b-второй, c-третий): $b = a + d$ $\quad c = a + 2d = b + d$

d - разница первого и второго члена прогрессии, $d < 0$ (т.к. $c < a$)

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D: 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 4((a+d)^2 - a(a+2d)) = 4(a^2 + 2ad + d^2 - a^2 - 2ad)$

$D = 4d^2$

$$x_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2a - 2d \pm 2d}{2a} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ -1 - \frac{2d}{a} \end{array}\right.$$

$-\frac{2d}{a} > 0$ т.к. $d < 0$ и $a > 0$ (по условию)

$-1 - \frac{2d}{a} > -1 \quad \Rightarrow \quad -1$ — четвёртый член прогрессии

Ответ: -1

3. Пусть m_{10} - это остаток от деления на 10

$m_{10^4} + m_{10^3} + m_{10^2} < 10^4 + 10^3 + 10^2 = 11100$

$11100 < 12468$ то есть берут остатки от деления числа на 10^5, 10^4 и 10^3 (если степени 10 меньше, то сумма остатков меньше 12468 и если степени 10 будут больше, то сумма остатков включала бы и само шестизначное число).

$10^n > 0$

Сумма остатков от деления на положительное число положительна, значит само число тоже положительно.

Пусть число равно $10^5 \cdot a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10e + f$, где

$0 < a < 10$ и $0 \le b, c, d, e, f \le 9.$

$m_{10^3} = 10^2 d + 10e + f$

$m_{10^4} = 10^3 c + 10^2 d + 10e + f$

$m_{10^5} = 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10e + f$

$m_{10^3} + m_{10^4} + m_{10^5} = 10^4 b + 2 \cdot 10^3 c + 3(10^2 d + 10e + f)$

$10^2 d + 10e + f < 1000$

$3(10^2 d + 10e + f) < 3000$

$468 \vdots 3 \quad \Rightarrow \quad 3(10^2 d + 10e + f) = 468 \quad \Rightarrow \quad 10^4 b + 2 \cdot 10^3 c = 12000$

$1468 \not\vdots 3$

$2468 \not\vdots 3$

$10^2 d + 10e + f = 468 \cdot \frac{1}{3} = 156$

$10b + 2c = 12 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 0 \\ c = 6 \end{cases} \end{array}\right.$

Число равно $10^5 \cdot a + 11156$ или $10^5 \cdot a + 6156$

$a \in [1; 9]$

Количество подходящих чисел равно $9 \cdot 2 = 18$

Ответ: 18

4 $AB \parallel CD$, AC - секущ. | $\angle BAC = \angle ACD$ (накрест леж.) | $\triangle ENA \sim \triangle CND$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{EA}{CD} = \frac{AN}{NC} = \frac{8}{4} = 2$

$\angle ENA = \angle CND$ (вертик.)

$EC \perp AC \Rightarrow \triangle EAC$ - прям-ый

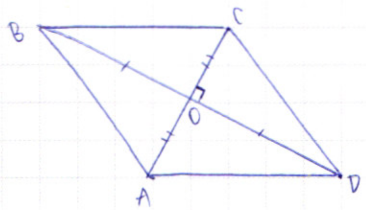
$EA = 2CD$, $AB = CD$ (ABCD-паралл-мм) | $EB = AB \Rightarrow CB$ медиана прямоуг-го $\triangle EAC$, $CB = EB = AB$

$CB = AB$, $AB = CD$, $CB = AD$ | $ABCD$ - ромб $\Rightarrow \triangle CAD$ - равн/бедр.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $BD \cap AC = O$, $AO = OC$ (ABCD - паралл-мм)



$AO = OC$ | $\triangle CAD$ - р/бедр | DO - высота, бисс, медиана

$\angle ADO = \frac{1}{2} \angle ADC$

$AC = AN + NC = 8 + 4 = 12$

$AO = \frac{AC}{2} = 6$

$tg \angle ADO = \frac{AO}{OD} = \frac{2}{5}$

$tg \angle BAC = \frac{BO}{OA} = \frac{OD}{OA} = \frac{5}{2}$

$OD = \frac{5 \cdot AO}{2} = 15$

По т° Пифагора:

$AD^2 = AO^2 + OD^2$

$EC^2 = AE^2 - AC^2$

$AE = 2AD$

$AE^2 = 4AD^2$

$EC^2 = 4AD^2 - AC^2 = 4AO^2 + 4OD^2 - AC^2 = 4 \cdot 36 + 4 \cdot 225 - 144 = 900$

$EC = \sqrt{900} = 30$

$S_{\triangle ENA} = S_{\triangle ECA} - S_{\triangle ECN} = \frac{1}{2} \cdot EC \cdot AC - \frac{1}{2} EC \cdot CN = 15(12-4) = 120$

Ответ: $tg \angle BAC = \frac{5}{2}$, $S_{\triangle} ENA = 120$

5. По свойству секущ. и касат. $AB^2 = BM \cdot BN = MB \cdot (BM + MN)$

$BM \cdot MN = AB^2 - BM^2 = 10 - 2 = 8$

$MN = \frac{8}{BM} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$

Пусть $\angle BAM = \alpha$ и $\angle NAC = \beta$

$\angle BAC = 2\alpha$
внеш $\angle A = 2\beta$

внеш$\angle A + \angle BAC = 180°$
т.к. смежные

$2\beta + 2\alpha = 180°$

$\beta + \alpha = 90°$

$\angle NAM = \angle NAC + \angle CAM = \beta + \alpha = 90°$ $\Rightarrow$ MN - диаметр окр-ти

$r = \frac{MN}{2} = 2\sqrt{2}$

Пусть O - центр окр-ти

$\angle OAB = \angle OAM + \angle MAB = 90°$
т.к. AB - касат OA - радиус

$\angle OAM = 90° - \angle MAB = 90° - \alpha = \beta$

Пусть OA второй раз пересекает ок-ть в т. D

AD - диаметр $\Rightarrow$ $\angle AMD = 90°$

$\angle ADM = 180° - \angle AMD - \angle MAO = 180° - 90° - \beta = \alpha$

$\angle AKM = \angle ADM = \alpha$
опираются на дугу AM

$\angle NKM = 90°$ - опирается на NM $\Rightarrow$ $\triangle NKM$ - прямоуг.

$\angle KNM = \angle KAM = \alpha$
опираются на KM

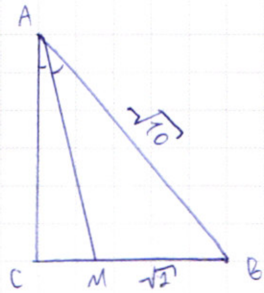
$\angle KMC = 180° - \angle NKM - \angle KNM = 180° - 90° - \alpha = \beta$

$\angle AKM = \angle KAM$ $\Rightarrow$ $\triangle KAM$ - р/бедр.

$\angle KCM = 180° - \angle AKM - \angle NMK = 180° - \alpha - \beta = 90°$ $\Rightarrow$ MC - высота

$\angle ACB = 180° - \angle KCM = 180° - 90° = 90°$
смежные

$\triangle AMK$ - р/бедр $\Rightarrow$ MC - бисс. $\Rightarrow$ $\angle AMC = \angle KMC$



$\angle AMC = \angle KMC$
MN - общий
| $\triangle ANM = \triangle NKM$ (по гипотенузе и острому углу)

$S_{ANKM} = S_{\triangle ANM} + S_{\triangle KMN} = 2S_{\triangle ANM}$

AM - бисс $\Rightarrow$ $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MC} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

$AC = CM \cdot \sqrt{5}$

По т° Пифагора:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5CM^2+(BM+CM)^2=AB^2$

$6CM^2+2\sqrt{2}CM+2=10$

$6CM^2+2\sqrt{2}CM-8=0 \qquad CM>0$

$3CM^2+\sqrt{2}CM-4=0$

$d: 2+48=50$

$CM_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\pm5\sqrt{2}}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} \text{ искл.}\end{array}\right.$

$AC=\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{2}{3}\sqrt{10}$

По т° Пифагора:

$AM^2=AC^2+CM^2=\frac{4}{9}\cdot10+\frac{4}{9}\cdot2=\frac{48}{9}$

$AN^2=NM^2-AM^2=16\cdot2-\frac{48}{9}=\frac{240}{9}=\frac{80}{3}$

$AM=\sqrt{\frac{48}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$

$AN=\sqrt{\frac{80}{3}}=4\sqrt{\frac{5}{3}}$

$S_{\triangle ANM}=\frac{1}{2}\cdot AN\cdot AM=\frac{1}{2}\,\frac{16\sqrt{5}}{3}$

$S_{ANKM}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{16\sqrt{5}}{3}=\frac{16\sqrt{5}}{3}=5\frac{1}{3}\cdot\sqrt{5}$

Ответ: $r=2\sqrt{2}$, $\angle ACB=90°$, $S_{ANKM}=5\frac{1}{3}\sqrt{5}$

6. Пусть m-кол-во чисел дел-ся на 5, n-кол-во оставшихся чисел.

$m\cdot n\cdot\frac{(m+n-2)}{2}=49$

Делим на 2 так как будут повторения (5; 7 и 14 и 5, 14 и 7)

$49=49\cdot1=7\cdot7$

Если и m и n равны 1, то $\frac{(m+n-2)}{2}\neq49$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда либо m либо n равны 7 и $\frac{m+n-2}{2} = 7$

$\begin{cases} n = 7 \\ m+n-2 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = 9 \end{cases}$ $\quad m \cdot n \cdot \frac{m+n-2}{2} \neq 49$

Таким образом $m = 2$, $n = 7$ и $m+n-2 = 7$

или $n = 2$ $m = 7$ $m+n-2 = 7$

$m + n = 2 + 7 = 9$

Ответ: 9

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $ax^2 + 2bx + c = 0$ 1 ✓ 2 ? 3 ✓ 4 ✓ 5 ✓ 6 ✓ 7

$ax^2 + 2a+2d\,x + a+2d = 0$

$D: 4a^2+8ad+4d^2-4a^2-8ad = 4d^2$

$x_{1,2} = \frac{-2a-2d \pm 2d}{2a} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ -1-\frac{2d}{a} \end{array}\right.$ $d<0$

ОТВ: -1 11/30

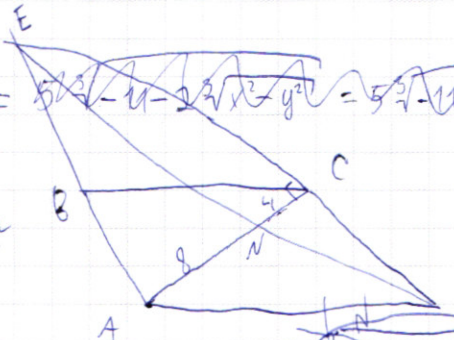
2. $\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2-y^2} = 57 \\ y + \sqrt[3]{x^2-y^2} = -68 \end{cases}$ $x-y=125$ $x = y+125$

$x+y+2\sqrt[3]{x^2-y^2} = -11$

$y+\sqrt[3]{(y+125)^2-y^2} = y+\sqrt[3]{y^2+250y+5^6-y^2} = y+5\sqrt[3]{2y+5^3}$

$y+5\sqrt[3]{2y+125} = -68$

$\sqrt[3]{x^2-y^2} = \sqrt[3]{(x+y)(x-y)} = 5\sqrt[3]{x+y} = 5\sqrt[3]{-11-2\sqrt[3]{x^2-y^2}} = 5\sqrt[3]{-11-10\sqrt[3]{x+y}}$



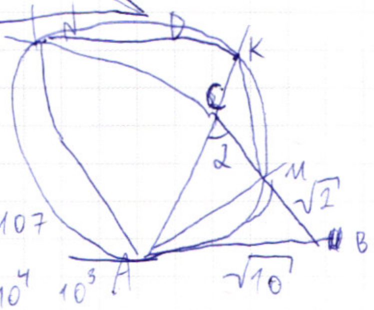
$\angle ACB$ − ?
r − ?

$\sqrt[3]{x^2-y^2} = 57-x$

$\cancel{x(\sqrt[3]{x^2-y^2})^2 + x^2-y^2 = 57(\sqrt[3]{x^2-y^2})^2}$

$x\sqrt[3]{(x+y)^2} + 5(x+y) = 57\sqrt[3]{(x+y)^2}$

$x+y = \frac{\sqrt[3]{(x+y)^2}}{5}(57-x)$



1000

10 100 1000
9 99 999 = 1110 − 3 = 1107

12 468

сумма < 10000 + 1000 + 100 = 11100

10^5 10^4 10^3

$10 = \sqrt{2}\cdot(x+\sqrt{2})$

$\boxed{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}$

$468 : 3 = 156$, $-\,3$, 16

X 1 1 1 5 6
a b c d e f

$10 = 2 + \sqrt{2}x$

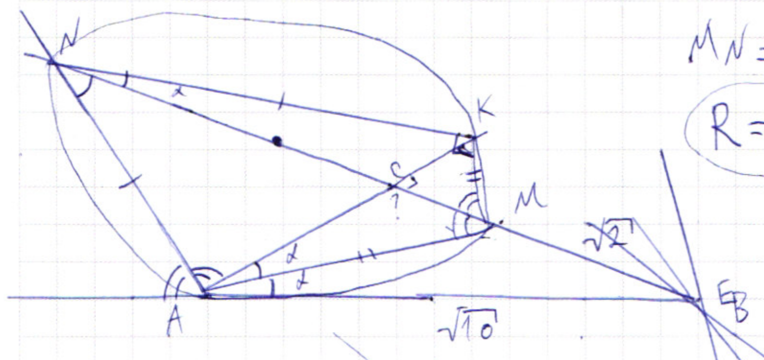
$x = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

1 0 0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0

4 $10^4 b + 2\cdot 10^3 c + 3(10^2 d + 10e + f) = 12468$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$MN = 4\sqrt{2}$

$R = 2\sqrt{2}$ ✓

$S = \frac{1}{2}(AN \cdot AM + KN \cdot KM)$

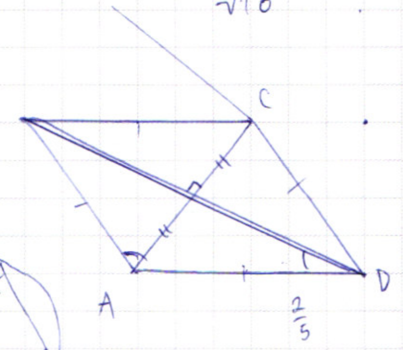
$\frac{EC}{12} = ?$

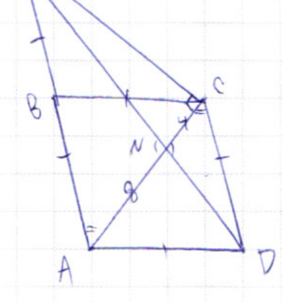
$\triangle ENA \sim \triangle CND$

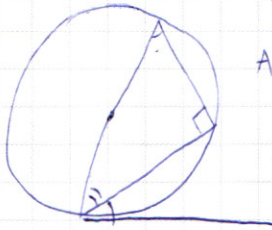
$\frac{EA}{CD} = \frac{8}{4}$

$CB = EB$ как медиана $\triangle$

$AC = \sqrt{5} \cdot CM$







$\frac{AO}{OD} = \frac{2}{5}$

$OD = \frac{5AO}{2} = 15$

$tg\angle BAC = \frac{BO}{OA} = \frac{5}{2}$

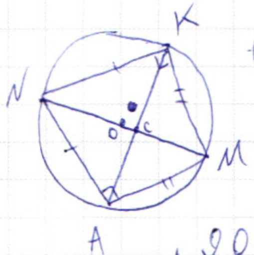
$S = AN \cdot AM$

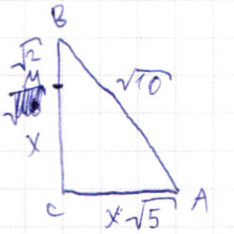
$\angle ACB = 90°$ ✓

ABCD - ромб

$AD = \sqrt{36+225} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$

$EA = 6\sqrt{29}$





$+900$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ 9 \\ \hline 288 \end{array}$$

$(x+\sqrt{2})^2 + 5x^2 = 10$

$6x^2 + 2\sqrt{2}x = 8$

$3x^2 + \sqrt{2}x = 4$

$$\begin{array}{r} -288 \\ 48 \\ \hline 240 \end{array}$$

$\frac{80}{3}$

$d: 2 + 48 = 50$

$CM = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

$AC = \frac{2}{3}\sqrt{10}$

$x = \frac{-\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ \text{стор-ц искл.} \end{array}\right.$

$AM^2 = \frac{40}{9} + \frac{8}{9} = \frac{48}{9}$

$AM = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

5n 7m

n-чисел m чисел

~~[illegible]~~ = 49

5 · 7 14

5 · 14 7

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА