МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\{a_n\}$; a_1; a_2; a_3 $\quad ax^2+2bx+c=0 \quad a_3-?$

$a_1=a \quad a_2=b; \quad a_3=c-?$ $\quad b=\frac{a+c}{2}$

$ax^2+2bx+c=0$

$\cancel{D=b^2-4ac} \Rightarrow x_1=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ $\quad \frac{\frac{-a-c}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}}{a}$

$D'=b^2-ac \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=$ $\quad D'=\frac{a^2+c^2}{2}$

$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{a^2+2ac+c^2}{2}-ac=\frac{a^2+c^2}{2}$ $\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{a}$

$D'=0 \Rightarrow b^2=ac$ $\quad x_{1}=\frac{-\sqrt{ac}}{a}=$ $\quad \boxed{a_3-?}$

$b=\sqrt{ac}$

$a_1=a; \; a_2=b; \; a_3=c; \quad a_4=x$

$a_3=\frac{b+x}{2}=0 \Rightarrow \frac{b+\frac{-b\pm\sqrt{D}}{a}}{2}=\frac{ab-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{b(a-1)\pm\sqrt{D}}{2a}$

$a_1=a; \; a_2=b; \; a_3=c; \; a_4=-\frac{b}{a}, \; b=\sqrt{ac} \Rightarrow b^2=ac$ $\quad q \quad \frac{b}{a}=\frac{1}{q^3}$

$a^2+2bx+c=0$ $\quad a_1=a$

$a_3=\sqrt{b\cdot\frac{-b}{a}}=\sqrt{\frac{-b^2}{\sqrt{a}}}$ $\quad a_2=aq=b$

$D'=b^2-ac=0$ $\quad a_3=aq^2 \quad a_3=a$

$a_4=x=\frac{-b}{a} \quad a_1=a \quad a_2=aq=b$ $\quad a_4=aq^3=-\frac{b}{a} \quad -b=q^3a^2$

$\frac{b}{a}=q^2= \quad a_3=aq^2=c \quad a_4=aq^3=-\frac{b}{a}$

$q^3=-\frac{b}{a} \quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{b}{a}=q \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{q}= \quad aq^3=-\frac{b}{a}$

$q=\frac{b}{a}; \quad aq^3=-\frac{b}{a}$

$\frac{a_4}{a_3}=\frac{-b}{ac}=q$

$\frac{\cancel{b}}{a}=-\frac{\cancel{b}}{a\cdot c} \Rightarrow 1=-\frac{1}{c}$

$c=-1$

$b_1=a$ $\quad \frac{b_2}{b_1}=\frac{b}{a}=q$

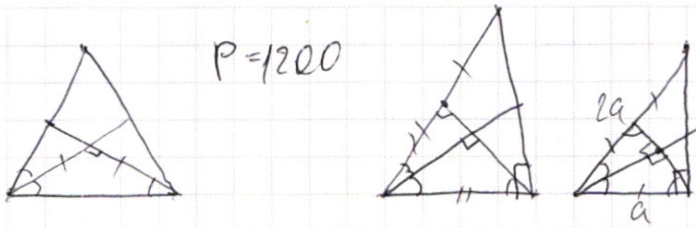
$b_2=aq=b$ $\quad q=q$

$b_3=c=aq^2$ $\quad \frac{b_4}{b_3}=\frac{-b}{ac}=q$ $\quad \frac{\cancel{b}}{a}=-\frac{\cancel{b}}{a}\cdot\frac{1}{c}$

$b_4=-\frac{b}{a}=aq^3$ $\quad 1=-\frac{1}{c}$

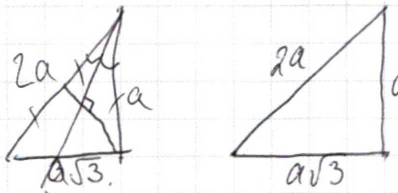
$c=-1$

2. $P = 1200$

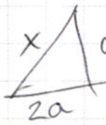


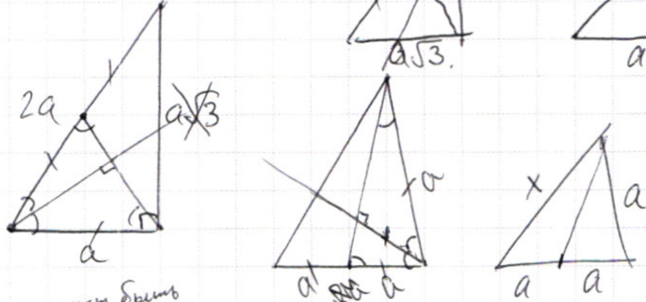
$2a \quad 4a^2 - a^2 = a\sqrt{3}$

$2a + a + a\sqrt{3} = 1200$



Устраивают:





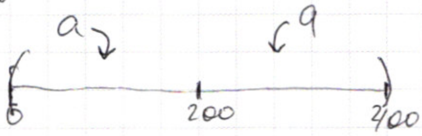
$a + 2a + x = 1200$

$\boxed{3a + x = 1200}$

$3a + x = 1200$

$1200 : 3$
$3a : 3$ $\Rightarrow x : 3$

I не может быть



$(3a + 3q) = 1200 \qquad x = 3q$

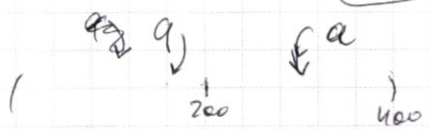
$a + q = 400 \qquad a = 200;\ q = 200 \qquad a = 200,\ x = 600$

$\begin{cases} a \neq 0 \\ q \neq 0 \end{cases}$

~~ОТВЕТ: 200.~~

$3a > x > 3q$

II



1. $a > q$
2. $2a + \cancel{a} > a \quad a + \cancel{a} > 0$, верно
3. $a + \cancel{a} > \cancel{2a} \quad \cancel{a} > a$

$\begin{cases} a > q \\ q > \frac{a}{3} \end{cases}$

$q = 50;\ a = 350$
$q = 100;\ a = 300$
$q > 101;\ a < 300$

$a + x > 2a \quad x > a \Rightarrow 3q > a$

$q > \frac{a}{3} \quad a \in [201; 299]$

ОТВЕТ: 99

3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$y > 2x$ и $y > 2;\ x > 1$

$2x^2 - 4x$

$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 + 5xy + 4x^2 + 2x + y + 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$-5xy + 2x^2 + 6x + 5y - 1 = 0$

$y - 2x = \quad y(x-1) +$

$y^2 - 4y + 4 - 1$

$\sqrt{y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(y-2)(x-1)}$

$(y-2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ y^2 - 4y + \cancel{4} + 2x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$

$y \geq 2;\ x \geq 1 \qquad y \geq 2x$

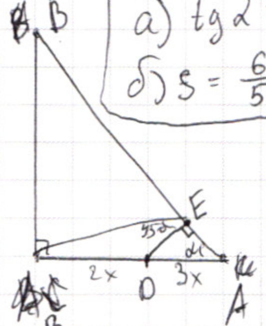
$(y-2x)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2$

$90 + 45 = 135$

$(y-2)^2 + 2x^2 - 4x - 1 = 0$

$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = (y-2)(x-1) \\ (y-2)^2 + 2x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases}$

4.



$\boxed{\begin{array}{l} а)\ tg\alpha = \frac{2}{5} \\ б)\ S = \frac{6}{5}. \end{array}}$

$5AD = 3AC.$

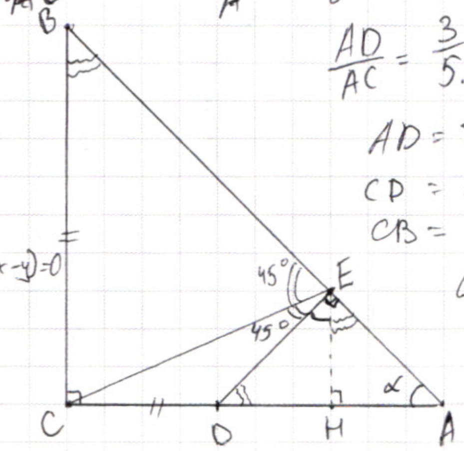
$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}. \qquad AC = \frac{5}{3}AC.$

$tg\alpha = ?$

а)

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{CA} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$



$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}.$

$AD = 3x$

$CD = 2x$

$CB = 2x$

$CA = CD + AD = 5x$

б) $AC = \sqrt{29}$, S_{CED}

$x = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5}, \quad x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$x(2x - y) = 0$

$(6x+5)(y-1) + \cancel{2x}$

$CD = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot 2$; $EH =$

$\frac{AE}{AD} = \frac{ABC}{AB} = \frac{5\cancel{x}}{\sqrt{29}\cancel{x}}$

$AE = \frac{5 \cdot 3x}{\sqrt{29}} = \frac{15x}{\sqrt{29}} \qquad \frac{AE}{AB} =$

$AC = 5x;\ BC = 2x$

$AB = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = x\sqrt{29}$

$\Rightarrow \frac{15x}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{29}} = \frac{15}{29} = \frac{EH}{BC} \Rightarrow EH$

$EH = \frac{15}{29} \cdot 2x = \frac{30x}{29} = \frac{30 \cdot \sqrt{29}}{29 \cdot 5} = \frac{6\sqrt{29}}{29}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot 2 \cdot \frac{6\sqrt{29}}{29} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$S_{ABC} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} = \frac{58}{10} = 5{,}8$

6. Продолжение.

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

3. $y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \qquad y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \qquad 2x^2 - 4x + 3 + y^2 - 4y = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 - y + 2 = 0$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y + 2 = 0 \quad y - 2x = \sqrt{xy + 2 - (y + 2x)}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \quad -5xy + 2x^2 + 6x + 5y - 5 = 0.$

$2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 3 = 0. \quad -5xy + 2x^2 + 6x + 5y - 5 = 0.$

$-6xy + 6x + 5y - 5$

$6x(y-1) + 5(y-1) - xy + 2x^2 = 0$

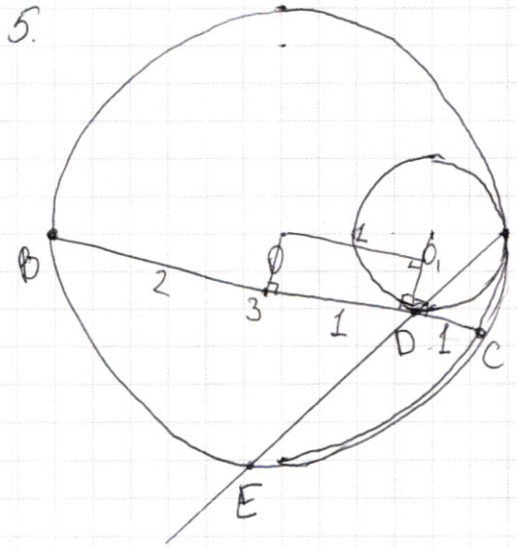
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5.

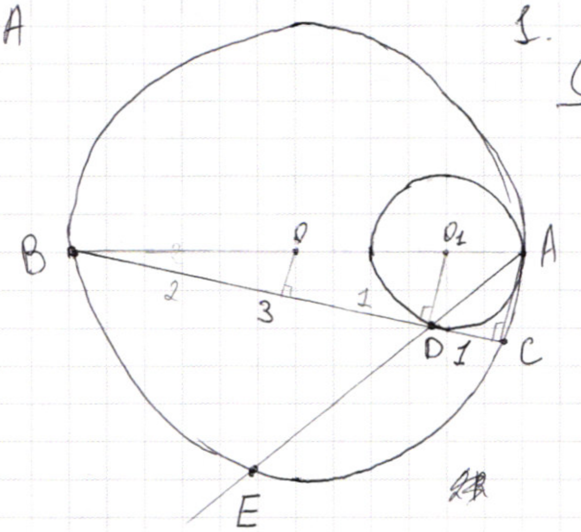


$O - \Omega \quad O_1 - \omega \qquad 3 = \sqrt{3}\cdot DE \Rightarrow DE = \sqrt{3}$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE = 3$

$AC \cdot BE + AB \cdot CE = AE \cdot BC = 4AE$

1.



$\frac{(R-r)+R}{2R} = \frac{3}{4}$

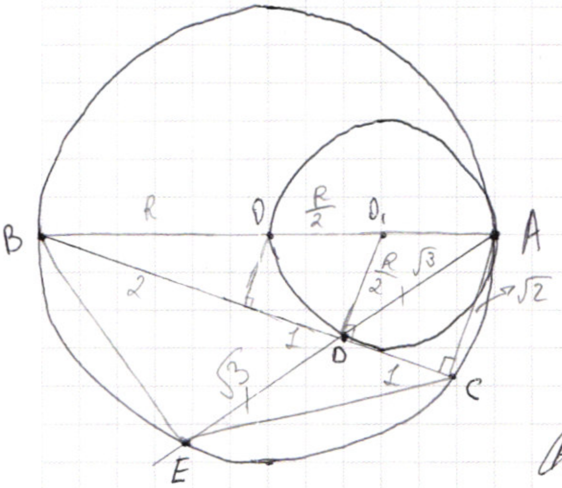
$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4} = \frac{r}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \quad 2r = R$

2.



$\frac{R}{\frac{3}{2}R} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = 3 \qquad R\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = 3$

$AC\sqrt{\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right)^2 - 16} =$

$= \sqrt{\frac{144}{10} - 16}$

$\boxed{R = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{18}} \quad r = \frac{3}{\sqrt{18}}}$

$\frac{8}{4} = 2$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

~~AC~~

$\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 16} =$

$= \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

$AD = \sqrt{3}$

$S_\square = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} =$

$= 4\sqrt{2}$

~~$\sin(2\alpha) = \sin(\pi - 2\alpha)$~~

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 3\cdot\sqrt{3} +$

$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot 1$

$+ \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot 1\cdot\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}\cdot 3$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{3}(3+1+1+3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 8 = 4\sqrt{2}$

$-1 \le \frac{1}{2}a + b$

$\frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2}$

~~$1 - x \le 1$~~

$1 - 2x \le 1$

$-2x \le 0$

$x \ge 0$

6. $(a;b) \quad 2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|, \ x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

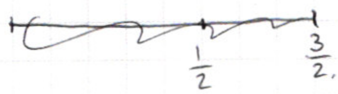
$2x^2 - 2x + x - 1 \qquad x = \frac{1}{2} \qquad -1 \le \frac{1}{2}a + b \le \frac{1}{2}$

$2x \le 1$

$x \le \frac{1}{2}$

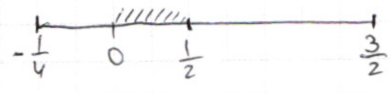
$2x(x-1) + (x-1)$

$\cancel{2x(2x}\ (x-1)(2x+1) \le ax + b \le x + |2x-1|$



$(x-1)(2x+1) \le ax + b \le x + 2x + 1$

$(1-x)(1-2x) \le ax + b \le -x + 1$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $(x-1)(2x+1) \le ax+b \le x+|2x-1|$

$-1 \quad -\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$

1 Если $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$;

$(x-1)(2x+1) \le ax+b \le -x+1$

$3x-1$

$(x-1)(2x+1) \le 1-x$

$-2x-1 \le 1$. $\quad (x-1)(2x+1) \le ax+b \le 1-x$. $\quad ax+b \ge 0$.

$-2x \le 2$. $\quad \begin{cases}(x-1)(2x+1) \le ax+b \\ ax+b \le 1-x\end{cases} \Rightarrow 2x^2 - x(1+a) - (1+b) \ge 0$

$x \ge -1$, да.

$D = (1+a)^2 - 8(1-b) =$

$= 1+2a+a^2-8+8b$

$2x^2-x-1=0 \quad \begin{cases}-\frac{5}{8} \le ax+b \\ ax+b \le \frac{5}{4}\end{cases} \quad \begin{cases}-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \\ -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4}\end{cases}$

$-\frac{1}{4} = \left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right) =$

$= -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{8}$

$x_в = \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}a+b-\frac{5}{8} \ge 0$

1. $\begin{cases}-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \quad -\frac{5}{8}-\frac{1}{4}a \le b \\ -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4} \quad b \le \frac{5}{4}+\frac{1}{4}a\end{cases}$ $\quad \cancel{-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}a \le \frac{5}{4}+\frac{1}{4}a}$ $\quad \cancel{-\frac{5}{8}-\frac{10}{8} \le \frac{1}{2}a}$

$-\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{6}{4} =$

$= -\frac{1}{4}+\frac{6}{4} =$

$= \frac{5}{4}$

$\frac{5}{4}+\frac{14}{4} = \frac{19}{4}$

$\begin{cases}-5 \le -2a+8b \\ \cancel{-2a+8} \\ -a+4b \le 5.\end{cases}$ $\quad \cancel{-\frac{15}{8} \le \frac{1}{2}a \Rightarrow a \ge -\frac{15}{4}}$

1. $-\frac{5}{8} \le \frac{1}{4}a+b \le \frac{1}{2}$

2. $x = \frac{1}{2}$. $\quad -\frac{5}{8} \le ax+b \le \frac{1}{2}$.

2. $\cancel{-1 \le \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2}} \Rightarrow$

$-1 \le \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2}$ $\quad 2 \le ax+b \le \frac{7}{2}$

3. $2 \le \frac{3}{2}a+b \le \frac{7}{2}$

3. $x \in (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$ax+b$

$-\frac{5}{8}-\frac{8}{8}+\frac{16}{8} =$ $\quad \Rightarrow 2. -2 \le a+2b \le 1$.

$\frac{1}{2} \cdot 4$

$= \frac{3}{8}$ $\quad -2 \le a+2b \le 1$.

$-\frac{5}{8}+\frac{16}{8} = \frac{11}{8}$

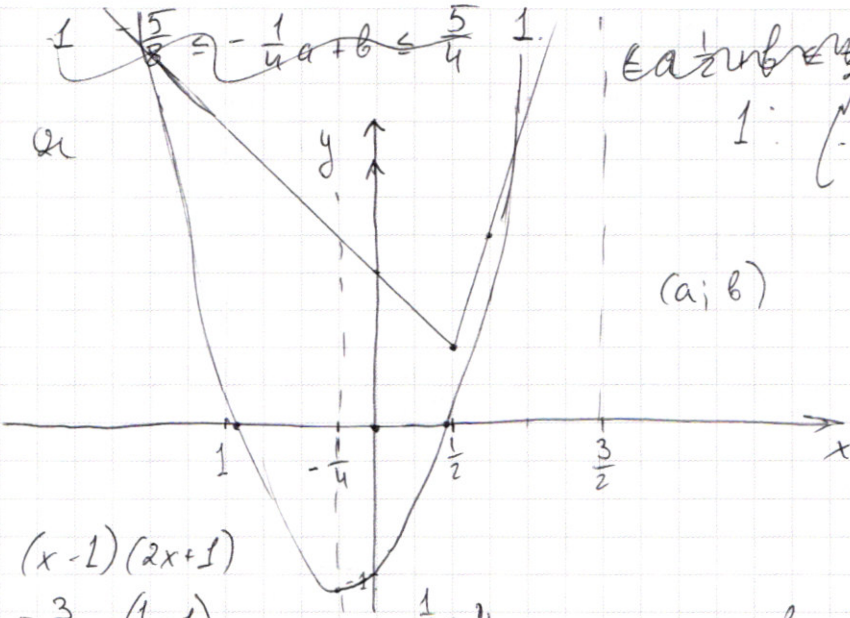
$-2-\frac{11}{8} \le -\frac{a}{4} \le -\frac{15}{4}$

$-\frac{27}{2} \le -a \le -15 \quad -\frac{27}{8} \le -\frac{a}{4} \le -\frac{15}{4}$. $\quad \frac{11}{8} \le \frac{5}{4}a+2b \le \frac{19}{4}$

$-13{,}5 \le -a \le -15$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$-\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} \le -\frac{1}{4}a+b \le \frac{5}{4} \\ -1 \le \frac{1}{2}a+b \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

$1+1$

$3x-1$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=$

$=\frac{1}{8}-\frac{2}{8}-\frac{8}{8}=$

$=-\frac{1}{8}-\frac{8}{8}=-\frac{9}{8}$

$(a;b)$

$(x-1)(2x+1)$

$-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)$

$-\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9}{8}$

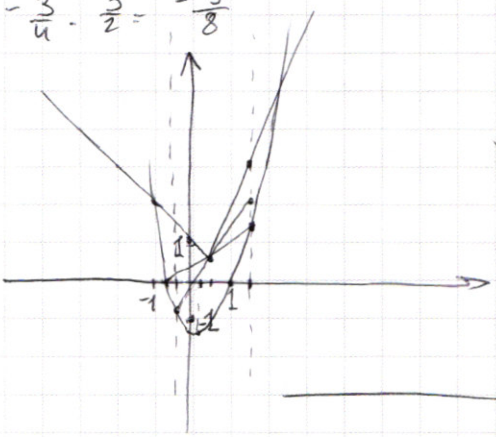
$x+|2x-1|$

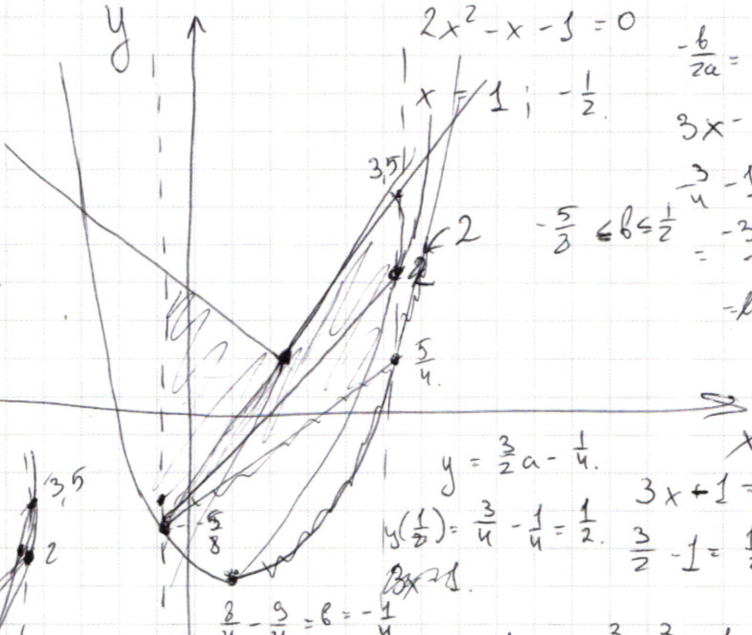
$x=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\quad y=\frac{1}{2}$

$-x+1$

$3x+1$

$ax+b$





$2x^2-x-1=0$

$x=1;\ -\frac{1}{2}$

$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$

$3x-1$

$\frac{3}{4}-1=$

$-\frac{5}{8}\le b\le\frac{1}{2}$

$=\frac{-3-4}{-4}=$

$y=\frac{3}{2}a-\frac{1}{4}$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$3x+1=$

$\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}-\frac{9}{4}=b=-\frac{1}{4}$

$2=\frac{9}{4}+b$

$-x+1$

$3\cdot\frac{3}{2}-1=$

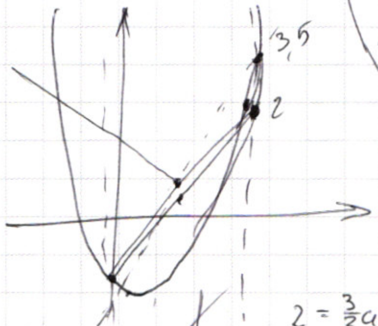
$=\frac{7}{2}=3{,}5$

$(x-1)(2x+1)$

$\left(\frac{3}{2}-1\right)(3+1)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

$-\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)$



$y=ax+b$

$2=\frac{3}{2}a+b$

$-\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}a+b$

$\frac{16+5}{8}=\frac{7a}{4}\quad b=$

$\frac{21}{8}=\frac{7a}{4}\quad\frac{3}{2}$

$a=\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} 2=a\cdot 2+b \\ -\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}a+b \end{cases}$$

$2+\frac{5}{8}=\frac{5a}{4}$

$\frac{13}{8}=\frac{5a}{4}\quad a=\frac{13}{10}$

$\frac{13}{2}=5a$

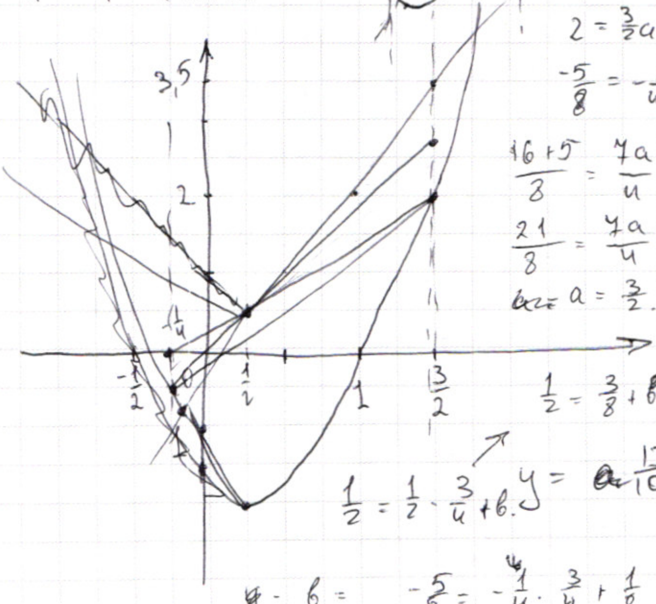
$2=\frac{13}{5}+b$

$\frac{10-13}{5}=b=-\frac{3}{5}$

$y=\frac{13}{10}a-\frac{3}{5}$

$y=\frac{13}{10}\cdot\frac{1}{2}-\frac{3}{5}=$

$=\frac{13}{20}-\frac{12}{20}=\frac{1}{20}=$



$\frac{1}{2}=\frac{3}{8}+b\quad\frac{4}{8}-\frac{3}{8}=b$

$b=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+b$

$y=\frac{13}{10}x-\frac{3}{5}$

$\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b$

$\frac{3}{2}=2a+b$

$a=\frac{3}{4}$

$2=\frac{3}{2}a+b$

$b=$

$y-b=\quad -\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\quad -5=-\frac{3}{2}+1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $b_1 = a;\ b_2 = b;\ b_3 = c$

~~Тогда~~ По характер. свойств. геом. прогрес: $b = \sqrt{ac} \Rightarrow b^2 = ac$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D' = b^2 - ac = 0 \nearrow x = \frac{-b}{a}$, пусть q „знаменатель арифм прогрессии"

$b_1 = a$

$b_2 = aq = b$

$b_2 = aq^2 = c$

$b_3 = aq^3 = -\frac{b}{a}$

$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b}{a} = q$

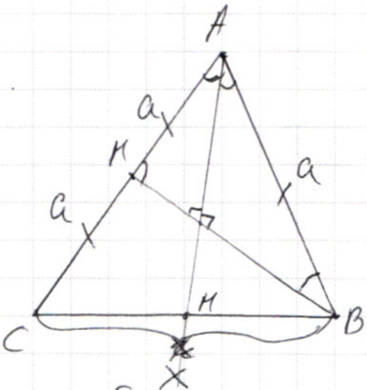
$\frac{b_4}{b_3} = \frac{-b}{ac} = q$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{c}$

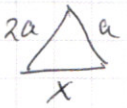
$c = -1$

ОТВЕТ: -1.

2.



Пусть нас устраивают Δ типа



Тогда $2a + a + x = 1200$

$3a + x = 1200$

$3a \vdots 3$

$1200 \vdots 3$ $\Rightarrow x \vdots 3 \Rightarrow x = 3q$

$3a + 3q = 1200$

AM - биссектр. BM - медиана

$a + q = 400$, Из правила существования треугольников:

$$\begin{cases} a > q \\ q > \frac{a}{3} \\ a + q = 400 \end{cases} \Rightarrow a \in [201; 299]$$

(т.к при $a = 300$ $q = 100$ и $q = \frac{a}{3}$, нельзя, при $a = 200 = q = 200$, нет и при $a < 200$, $q > a$, тоже нет)

$3a > x = 3q \Rightarrow a > q$

$2a + x > a$ $a + x > 0$, да

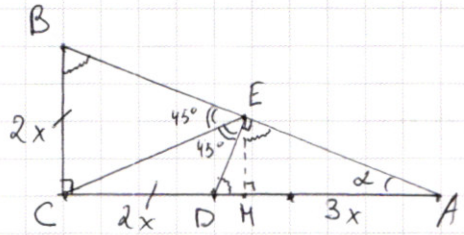
$a + x > 2a \Rightarrow q > \frac{a}{3}$

ОТВЕТ: 99

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4



а) $\frac{AD}{AC} = \frac{3x}{5x} \Rightarrow AD = 3x;\ AC = 5x;\ CD = 2x$

Т.к $\angle CED = 45°$; $\angle DEA = 90° \Rightarrow \angle CBD = 45°$

Рассмотрим BEDC – $\angle BED = 90°$ и $\angle BCD = 90° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \angle BED + \angle BCD = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ BEDC - вписанный четырёхугольник

Т.к $\angle BEC$ и $\angle CED$ равны то и их хорды (BC и CD) тоже равны.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AD} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$ ОТВЕТ: $\frac{2}{5}$

б) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot EH$

$AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$\triangle ABC \sim \triangle AEH$ (по 3-м углам) $\Leftrightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle AED$ (по 3-м углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE = \frac{15x}{\sqrt{29}}$

$\Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{15}{29}$ $(AB = \sqrt{25x^2 + 4x^2} = \sqrt{29} \cdot x)$

Тогда $\frac{EH}{BC} = \frac{15}{29} \Rightarrow EH = \frac{15 \cdot 2x}{29} = \frac{6\sqrt{29}}{29}$, $CD = 2x = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

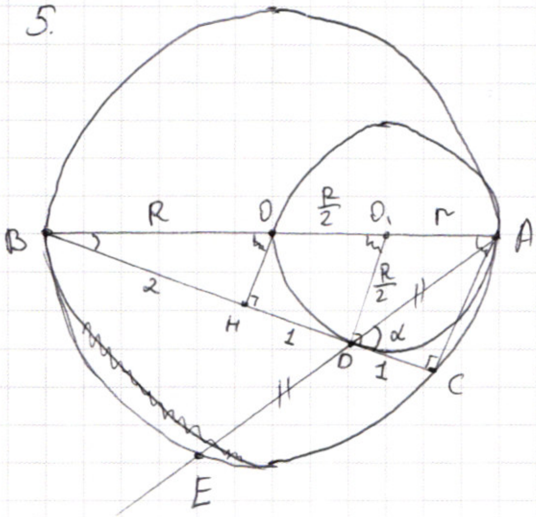
$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6\sqrt{29}}{29} = \frac{6}{5}$ ОТВЕТ: $\frac{6}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$O - \Omega$; $O_1 - \omega$ $O(R)$ $O_1(r)$

$BD = 3$; $DC = 1$

Найти R и r и S_{ACEB} - ?

Решение:

Проведём OH ($OH \perp BC$) $\Rightarrow BH = HC = 2$, т.к. ($\perp$ хорде из центра).

Рассмотрим: $\triangle BAC \sim \triangle BO_1D$ (по 3-м углам)

$$\frac{(R-r)+r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{1}{2}.$$

$r = \frac{R}{2}$. OO_1 и OD равны, как r в одной окр. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = 3.$$

$$R \cdot \sqrt{2} = 3 \Rightarrow \boxed{R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \ ; \ r = \frac{3\sqrt{2}}{4}}$$

Рассмотрим $\triangle BAC$, $BA = 2R = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2} = AC = \sqrt{2}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$, по свойству хорд ($AE$ и BC) $BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 = \sqrt{3} \cdot ED \Rightarrow ED = \sqrt{3}$.

Рассмотрим четырехугольник $ACEB$ (с диагоналями $2\sqrt{3}$ и 4) $\Rightarrow$

$d_1 = 2\sqrt{3}$; $d_2 = 4$ $\quad S_{ACEB} = \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot d_1 d_2$, где $\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$S_{ACEB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$ $\quad$ ОТВЕТ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $4\sqrt{2}$.

6.

$$\textcircled{1}\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ ax + b \le x + |2x - 1| \end{cases}$$

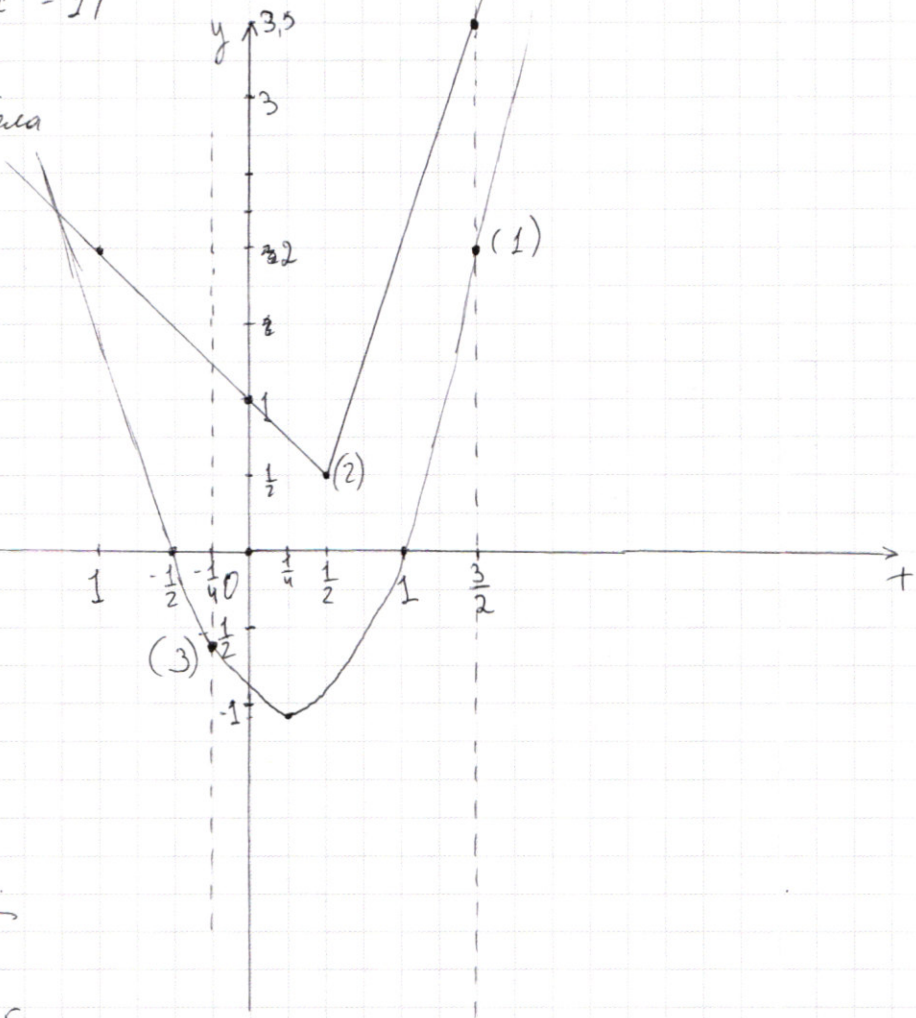
1. $y = 2x^2 - x - 1 \overset{=y}{\cancel{\ge 0}}$, парабола

$x_в = \frac{1}{4}$; $y_в = -\frac{9}{8}$

$x_{1,2} = 1; -\frac{1}{2}$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = 2$

$y\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{8}$



2. $x + |2x - 1| \cancel{\ge 0} = y$

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$\cancel{y \ge}$ $x \le \frac{1}{2}$ $y = -x + 1$

$x > \frac{1}{2}$ $y = 3x - 1$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2} = 3{,}5$

3. $ax + b = y$, прямая в пределах $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ и выполняется система (1)

~~Прямая пересекает точка (3) и (2); (1) и (2):~~

~~(1) и (2)~~ $\cancel{\begin{cases} 2 = \frac{3}{2}a + b \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \end{cases} \frac{3}{2} = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{4} \text{ и } b = \frac{1}{8}}$; ~~(3) и (2)~~ $\cancel{\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \end{cases}}$

Рассмотрим случай когда прямая пересекает точки (3) и (1):

$$\begin{cases} 2 = \frac{3}{2}a + b \\ -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \end{cases} \Rightarrow \frac{21}{8} = \frac{7a}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{4}}$$, проверим при $y\left(\frac{1}{2}\right)$:

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, то есть точка (2), значит (1), (2) и (3), лежат на одной прямой ($\cancel{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}}$) при котором (1) выполняется ОТВЕТ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$