

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$$1 \leq x \leq 21$$

$$1 \leq y \leq 21$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$$

Так $f(p) = \left[\frac{p}{2} \right]$, то составим таблицу всех допустимых x

Число	$f(p)$	Разложение на простые множители	$f(p)$	Разложение на простые множители	$f(p)$	Разложение на простые множители	$f(p)$
21 = 3 · 7	4	16 = 2 · 2 · 2 · 2	4	10 = 2 · 5	3	5 = 5	2
20 = 2 · 2 · 5	4	15 = 3 · 5	3	9 = 3 · 3	2	4 = 2 · 2	2
19 = 19	9	14 = 2 · 7	4	8 = 2 · 2 · 2	3	3 = 3	1
18 = 2 · 3 · 3	3	13 = 13	6	7 = 7	3	2 = 2	1
17 = 17	8	12 = 2 · 2 · 3	3	6 = 2 · 3	2	1 = 1	0
		11 = 11	5				

Число	Число	Число	Число	Число
1 = 0	6 = 3	11 = 18	16 = 13	21 = 13
2 = 1	7 = 7	12 = 7	17 = 10	
3 = 1	8 = 7	13 = 13	18 = 7	
4 = 3	9 = 3	14 = 13	19 = 20	
5 = 3	10 = 7	15 = 7	20 = 13	

$$= \sum = 0 + 1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 7 + 7$$

$$\begin{aligned} \sum &= 0 + 2 \cdot 1 + \sum = 0 + (1+1+3+3) + (3+7) + (7+3) + 7 + (18) + (7+13) + (3+7) + 13 \\ &+ 19 + (7+20) + (3+13) = 10 + 10 + 8 + 20 + 20 + 25 + 33 + 20 + 32 = 146 \end{aligned}$$

Отв: 146.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ 22x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

Пусть: $x-1=a$ $ab \geq 0$
 $y-2=b$

$y = b+2$
 $x = a+1$

$$y-2x = \sqrt{(x-1)(y-2)} \Rightarrow \underline{b-2a = \sqrt{ab}}$$

$$b+2-2a-2 = b-2a$$

$$b-2a \geq 0$$

$$\rightarrow \textcircled{b \geq 2a}$$

$$a^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$b^2 = y^2 - 4y + 4$$

$$\begin{cases} 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b-2a = \sqrt{ab} \end{cases}$$

$$1) 2a^2 + 16a^2 - 3 = 0 \quad (b=4a)$$

$$18a^2 = 3$$

$$a^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \quad a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$b_1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad b_2 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$b_1 \neq 2a_1, \text{ так } \frac{2\sqrt{6}}{3} \neq \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$b_2 \neq 2a_2, \text{ так } -\frac{2\sqrt{6}}{3} < -\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}$$

$$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$$

$$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$$

$$a=1 \quad b=-5a \quad c=4a^2$$

$$D = 25a^2 - 16a^2 = 9a^2$$

$$1) b_1 = \frac{5a+3a}{2} = 4a$$

$$2) b=a$$

$$2a^2 + a^2 - 3 = 0 \quad a^2 \geq 0$$

$$3a^2 = 3 \quad a = \pm 1 \quad b = \pm 1$$

$$a=1 \quad b=1$$

$$a=-1 \quad b=-1$$

$$\textcircled{a = -1}$$

$$\textcircled{b = -1}$$

$$172 = 2 \text{ нег}$$

$$\textcircled{-12 - 2 = -14}$$

$$y = b + 2$$

$$x = a + 1$$

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = \frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6} + 1$$

$$x = -1 + 1 = 0$$

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 2$$

$$y = -1 + 2 = 1$$

$$\text{Ответ: } \left(x_1 = \frac{\sqrt{6}}{6} + 1, y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 2\right); \left(x_2 = 0, y_2 = 1\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано:

a, b, c - натур.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$c = ?$

Реш-ие:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = a \quad b = b \quad c = c$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{c}{a} \Rightarrow b^2 = 4ac$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{-b}{2a}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{-b}{2a}$$

$$ac^2 = -b^2$$

$$c^2 = \frac{-b^2}{a}$$

$$b^2 = ac$$

⇓

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{-ac} \quad (c = -1)$$

Ответ: $c = -1$

\mathbb{N}_2

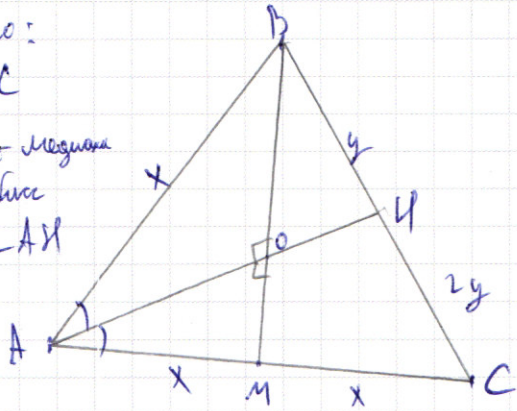
Доказ:

$\triangle ABC$

BM — медиана

AM — высота

$BM \perp AM$



1) $\triangle ABO = \triangle AOM$ по II пр

: $\angle AOM = \angle AOB = 90^\circ$

$\angle OAM = \angle OAB$

OA — общая $\Rightarrow AM = AB = x$

2) По свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BO}{OC} = \frac{1}{2}$$

Из этого $BO = y \Rightarrow OC = 2y$

$$P = 3x + 3y = 1200$$

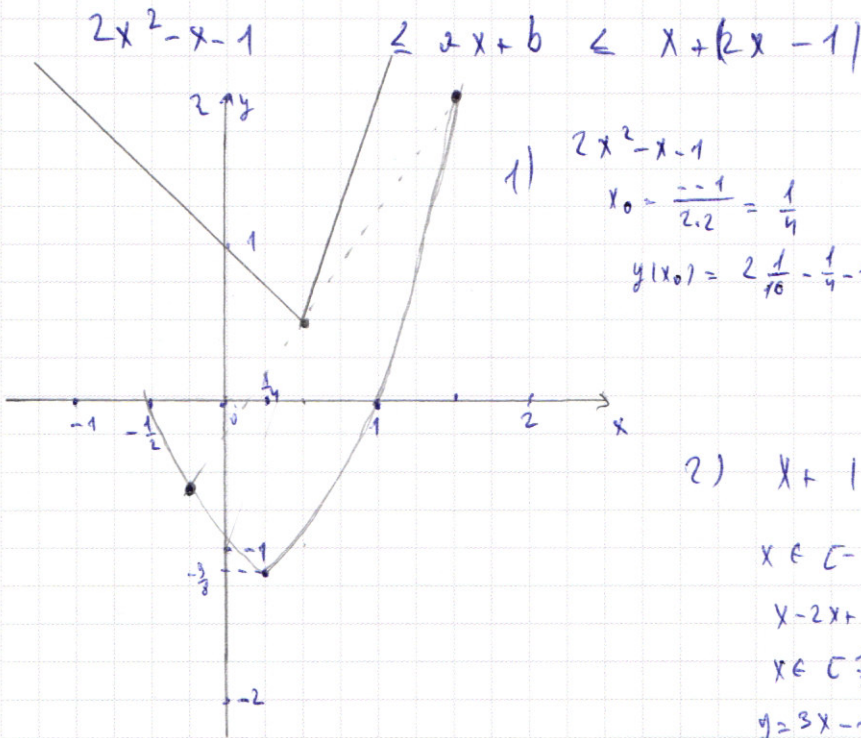
$$x + y = 400$$

Для уникальных берем $x = 1, \dots, 200 \Rightarrow 200$ комбинаций

Ответ: 200 треугольников

№ 6

$$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$$



3 контрольные точки лежат на одной прямой \Rightarrow только одна пара.
 В противном случае выполнялось только одно из неравенств

$$\begin{cases} a \cdot \frac{1}{4} + b = -\frac{5}{8} \\ a \cdot \frac{3}{2} + b = 2 \end{cases}$$

$$a \cdot \frac{3}{2} + a \cdot \frac{1}{4} = 2 \frac{5}{8}$$

$$a \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{8} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = \frac{9}{4}$$

$$\frac{9}{4} + b = 2$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{4}$$

Ответ: $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Доказ:

ΔABC
AC - кат
AB - гип

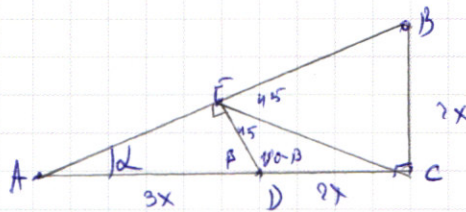
$D \in AC$; $E \in AB$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \quad DE \perp AB$$

$\text{tg} \angle BAC = ?$

$$\angle CED = 45^\circ$$

Реш-ие:



1) четырехугольник $EBCD$; можно описать окр., т.к.

$$\angle DEB = 90^\circ; \angle C = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle DEB + \angle C = \angle B + \angle CDE = 180^\circ$$

2) По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = 2R = \frac{DC}{\sin 45^\circ}, \text{ т.к. } R \text{ одна и та же}$$

ц. 17.1

$$\Rightarrow BC = DC$$

3) Пусть $AD = 3x$; $DC = 2x \Rightarrow BC = 2x$

$$\text{tg} \alpha = \frac{2x}{5x} = 0,4 \quad \text{Отв: } 0,4$$

д) $AC = \sqrt{29}$; ΔCED S-?

$$AC = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

$$\text{tg} \alpha = \frac{2}{5} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{25}$$

$$25 \sin^2 \alpha = 4 - 4 \sin^2 \alpha$$

$$29 \cdot \sin^2 \alpha = 4$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$ED = 3x \cdot \sin \alpha = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$$

$$DC = 2x = \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

$$\sin B = \cos \alpha \Rightarrow \sin(180 - B) = \sin B = \cos \alpha$$

$$S_{\Delta CED} = \frac{DC \cdot ED \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{6}{5} = 1,2 \quad \text{Отв: } 1,2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = 0$$

Резу - + или корки

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_n = x$$

$$f(n_1) + f(n_2) + f(n_3) + \dots + f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{x}{y} = 0 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

$$f\left(\frac{1}{-1}\right) \quad f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$$f(a) - f(b) < 0$$

$$f(b) > f(a)$$

?

$$\sum 1, \dots, 20$$

$$\frac{20+1}{2} \cdot 20 = 210$$

$$20+10+8+20+20+25+33+20$$

$$28+65+53 = 146$$

$$8+1+65 = 146$$

$$21 = 3 \cdot 7$$

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$19 = 19 \Rightarrow 9$$

$$18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$$

$$17 = 17 \Rightarrow 8$$

$$16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$14 = 2 \cdot 7$$

$$13 = 13 \Rightarrow 6$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$11 = 11 \Rightarrow 5$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$9 = 3 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$7 = 7 \Rightarrow 3$$

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$5 = 5 \cdot 1 \Rightarrow 2$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$3 = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$2 = 2$$

$$1 = 1$$

$$21 = 4$$

$$18 = 3$$

$$15 = 3$$

$$20 = 4$$

$$17 = 1$$

$$14 = 4$$

$$19 = 9$$

$$16 = 4$$

$$13 = 6$$

$$12 = 3$$

$$11 = 5$$

$$10 = 3$$

$$9 = 2$$

$$8 = 3$$

$$7 = 3$$

$$6 = 2$$

$$5 = 2$$

$$4 = 2$$

$$3 = 1$$

$$2 = 1$$

$$1 = 0$$

$$2 + 4 + 5 + 5 = 16$$

$$\frac{16}{30}$$

$$\frac{2}{15}$$

$$2 \cdot 5 + 2$$

$$-3a$$

$$y - 2x = \sqrt{4y - 2x - y + 2}$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4x + 4y + 3 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 2x + y - 2 + 4x + 4y - 3 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$$

$$2x^2 + x(6 - 5y) + 5y - 5 = 0$$

$$a = 2 \quad b = 6 - 5y \quad c = 5y - 5$$

$$D = (6 - 5y)^2 - 4(5y - 5) = 36 - 60y + 25y^2 - 40y + 40$$

$$25y^2 - 100y + 76$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y = 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y = -3$$

$$\underline{3y^2} + \underline{12x^2} - 15xy + \underline{6x} + \underline{3y} = -\underline{4x^2} - \underline{2y^2} + \underline{8x} + \underline{8y}$$

$$16x^2 + 5y^2 - 15xy - 2x - 5y = 0$$

$$\underline{16x^2} - 15xy$$

$$16x^2 - x(15y + 2) + 5y^2 - 5y$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 2x = \sqrt{x(y-2) - (y-2)}$$

$$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$x-1 = a$$

$$b+2 = 2(a+1)$$

$$a^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$y-2 = b$$

$$b+2 = 2a+2$$

$$b^2 = y^2 - 4y + 4$$

$$y = b+2$$

$$x = a+1$$

$$1) \quad b - 2a = \sqrt{ab}$$

+8

$$b - 2a \geq 0$$

$$b \geq 2a$$

$$2) \quad 2(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) - 3 = 0$$

29+16

$$2x^2 + b - 3 = 0$$

$$2a^2 + 4a - 3 = 0$$

$$a=2 \quad b=4 \quad c=-3$$

$$D = 16 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 40$$

$$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4}$$

$$b - 2a = \sqrt{ab}$$

$$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$$

$$a_1 = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$a_2 = -1 - \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$$

$$a=1 \quad b=-5a \quad c=4a^2$$

$$D = 25a^2 - 4b a^2 = 9a^2$$

$$b_1 = \frac{5a + 3a}{2} = 4a$$

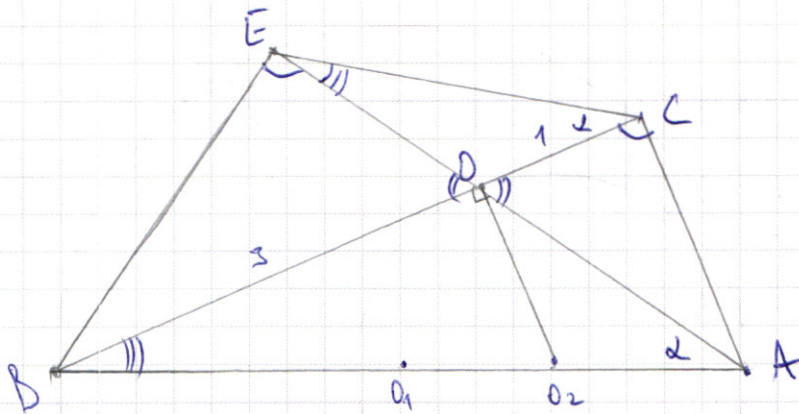
$$b = 4a$$

$$b_1 = 4a_1$$

$$b_2 = \frac{5a - 3a}{2} = a$$

$$b_2 = 4a_2$$

N5



$S_{BACE} = ?$

$r_v = r_m = ?$

$$CD_1 = 1$$

$$BD = 3$$

$\triangle ABC$

$$BC \cdot DC = AE \cdot DE$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{ED}{\textcircled{D}}$$

$$3 = ED \cdot AD$$

$$x + 2x - 1 \geq ax + b$$

$$2x + 1 \geq 0$$

$$2x \geq -1 \quad x \geq -\frac{1}{2}$$

$$x - 2x + 1 \geq 2x + b$$

$$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$$

$$-x + 1 \geq 2x + b$$

$$ax + b \leq -x + 1$$

$$x(a+1) \leq 1-b$$

$$a+1 > 0$$

$$2x^2 - x - 1$$

$$1 + 8 = 9$$

$$x \leq \frac{1-b}{a+1}$$

$$-\frac{1}{4}(a+1) \leq 1-b$$

$$\frac{1}{2}(a+1) \leq 1-b$$

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$\cancel{y^2 - 4xy + 4x^2} - \cancel{xy} + 2x + y - 2 = \cancel{y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3} = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 0x + 5y - 5 = 0$$

$$f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[\frac{x}{4}\right]$$

$$\frac{21}{3}$$

$$\frac{15}{5}$$

$$\frac{20}{4}$$

$$\frac{x}{2y} = 0$$

Если $\frac{x}{y}$ - простое

$$\frac{10}{2}$$

$$\frac{5}{7}$$

2, 3, 5, 7

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{6}{2}$$

$$\frac{9}{3}$$

$$f(4x)$$

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{12}{4}$$

$$\frac{15}{5}$$

$$\frac{18}{6}$$

$$\frac{21}{7}$$

$$\frac{1}{y} \in \left[\frac{1}{21}; 13\right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

OD3:

$$y-2x \geq 0$$

$$xy-2x-y+2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} (y-2x)^2 &= xy-2x-y+2 \\ y^2-4xy+4x^2 &= xy-2x-y+2 \\ y^2-5xy+4x^2+2x+y-2 &= 0 \end{aligned}$$

$$(y^2-4y+4) + 2x^2-4x-1$$

$$\begin{aligned} x(y-2) + 1(y-2) \\ x(y-2) - 1(y-2) \\ (x-1)(y-2) \end{aligned}$$

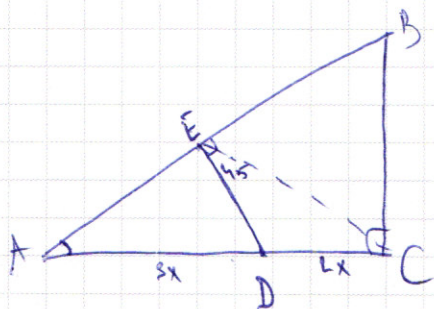
$$y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$$

$$(y-2x)^2 = (x-1)(y-2)$$

$$y^2-4xy+4x^2 = (x-1)(y-2)$$

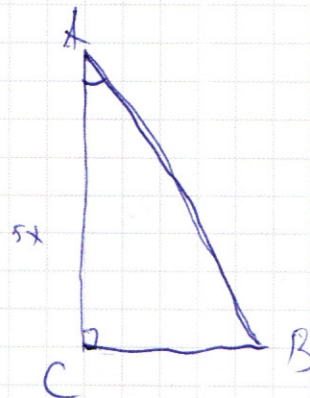
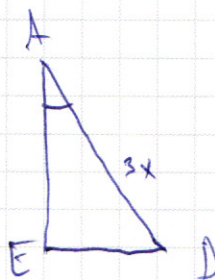
$$y^2+2x^2-4x-4y+3=0$$

y^2



$D \in AC$
 $E \in AB$

$\angle \alpha \triangle BAC$?



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x}$$

$$15x^2 = AB \cdot AE$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y - 2x = \sqrt{x^2 - 4xy + 4x^2 + y^2 + 2} \quad \rightarrow \quad y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x + y + 2$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$(y^2 - 4y + 4) + (2x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$(y - 2)^2 + (2x^2 - 4x - 1) = 0$$

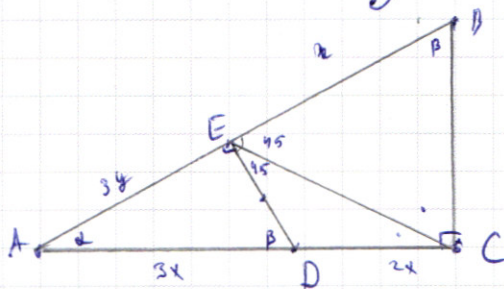
$$(y - 2)^2 = -(2x^2 - 4x - 1)$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x - y - 2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x - y - 2 = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 3y - 5 = 0$$



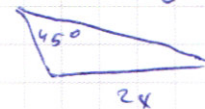
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$135 - \beta$$

$$180 - (\alpha + \beta) = 90$$

$$\frac{3x}{3x} = \frac{AB}{5x}$$

$$AB = \frac{15x^2}{3x} = \frac{5x^2}{x}$$



$$135 + \alpha + x = 180$$

$$x = 45 - \alpha$$

$$\alpha + \beta = 90$$

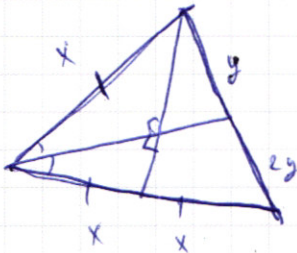
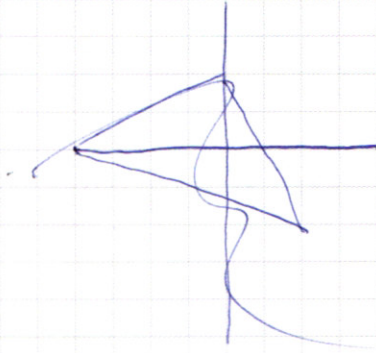
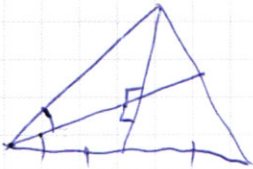
$$x = \frac{\sqrt{25}}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg}(90 - \alpha) = \frac{\sin(90 - \alpha)}{\cos(90 - \alpha)} = \frac{\sin 90 \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos 90}{\cos 90 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin 90} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{ED}{3x}$$

$$ED = \sin \alpha \cdot 3x$$



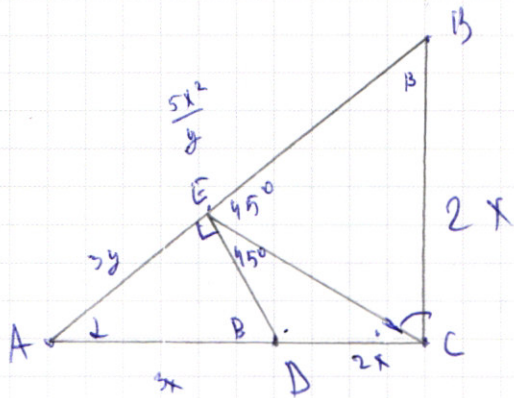
$$3x + 3y = 1200$$

$$1. \quad 2 = 2$$

$$x + y = 400$$

$$200$$

$$x = 1, \dots, 200$$



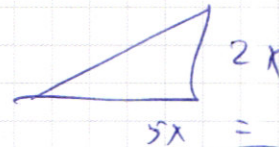
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle y \alpha - ?$$

$$\angle y \alpha \quad \frac{BC}{AC} = \frac{ED}{AE}$$

AD

$$180 - \beta$$



$$180 - \beta + 45 = 135 - \beta$$

$$180 - \beta$$

$$180 - \beta + 45 + x = 90$$

$$x = \beta - 45$$

$$\beta + 45 + x = 180$$

$$x = 135 - \beta$$

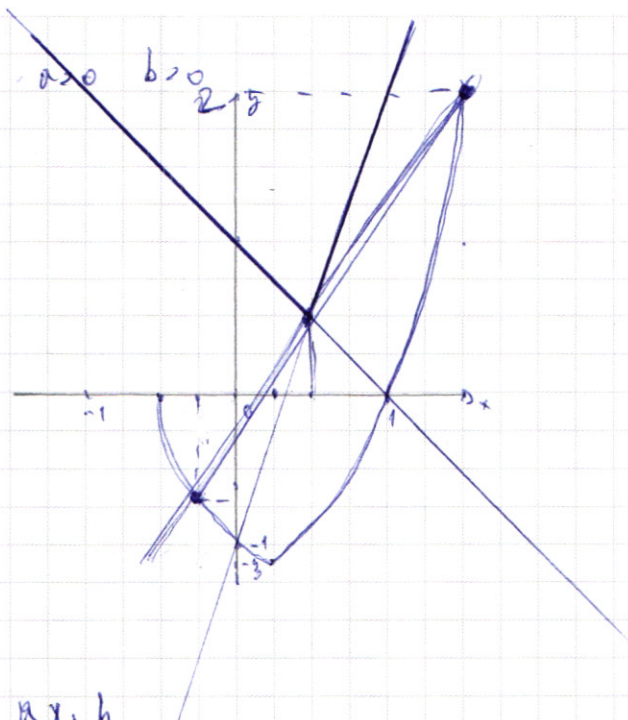
$$\frac{2}{5}$$

$$\angle y \alpha = \frac{ED}{y} = \frac{3x^2 - 3y^2}{y} \quad ED^2 = 9x^2 - 9y^2 \Rightarrow ED = 3\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\sin 45^\circ$$

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\frac{DC}{\sin 45^\circ} = 2R \Rightarrow DC = 4R$$



$$y = 2x^2 - x - 1$$

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

$$-\frac{b}{2a}$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$a=2 \quad b=-1 \quad c=-1$$

$$-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{9}{8} - 1 = 2$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$$

$$kx + b$$

$$k \cdot \frac{3}{2} + b = 2$$

$$k \cdot -\frac{1}{2} + b = -\frac{5}{8}$$

$$b = 2 - \frac{3}{2}k$$

$$-\frac{1}{4}k + 2 - \frac{3}{2}k = -\frac{5}{8}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}k - \frac{6}{4}k = -\frac{5}{8} - \frac{16}{8}$$

$$\frac{-7}{4}k = \frac{-21}{8}$$

$$k = \frac{21 \cdot 4}{8 \cdot 7}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$b = 2 - \frac{9}{4}k = -\frac{1}{4}$$

$$x + kx - 1$$

$$x = -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$$

$$x - 2x + 1$$

$$-x + 1$$

$$x + 2x - 1$$

$$3x - 1$$

$$2 - \frac{3}{2}y = -\frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x + 4y - 3$$

$x(y-2) - 1(y-2)$
 $(x-1)(y-2)$

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
 $y-2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$

$y \geq 2x$

$$(y^2 - 4y + 4) + (x^2 - 4x + 4) + x^2 - 5 = 0$$

$$\frac{(y-2)^2}{20} + \frac{(x-2)^2}{20} + x^2 - 5 = 0$$

№6

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + 12x + 1$$

$$ax + b \geq 2x^2 - x - 1$$

$a \cdot \frac{3}{2} + b \geq 2$

$a \cdot -\frac{1}{4} + b \geq \frac{11}{8}$

$b = 2 - a \cdot \frac{3}{2}$

$$-\frac{1}{4}a + 2 - \frac{3}{2}a = \frac{11}{8}$$

$$\frac{-1-6}{4}a = \frac{11-16}{8}$$

$$-\frac{7}{4}a = \frac{-5}{8} \Rightarrow a = \frac{-5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{-5}{14}$$

$b = 2 - a \cdot \frac{3}{2} = 2 - \frac{-5 \cdot 3}{14 \cdot 2} = 2 + \frac{15}{28}$

$a \geq \frac{-5}{14}$
 $b \geq 2 \frac{15}{28}$

№5

$$2x^2 - x - 1$$

$a = -2, b = -4, c = -1$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$$\frac{2 \cdot 1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$$

$$\frac{2 \cdot 9}{18} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$$

$$\frac{2 \cdot 1}{16} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$$

$$\frac{2 \cdot 1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$$