МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

№1

$$\begin{cases} a = e \\ b = ed \\ c = ed^2 \end{cases}$$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac$ $\quad a \neq 0$

$x_1 x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

$b^2 = e^2 d^2$; $ac = e \cdot ed^2 = e^2 d^2 \Rightarrow b^2 - ac = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-b}{a} = -\frac{ed}{e} = -d = ed^3$ (4 член прогр.)

$d \neq 0 \qquad -d = ed^3$

3 член пр. $\to ed^2 = -1$

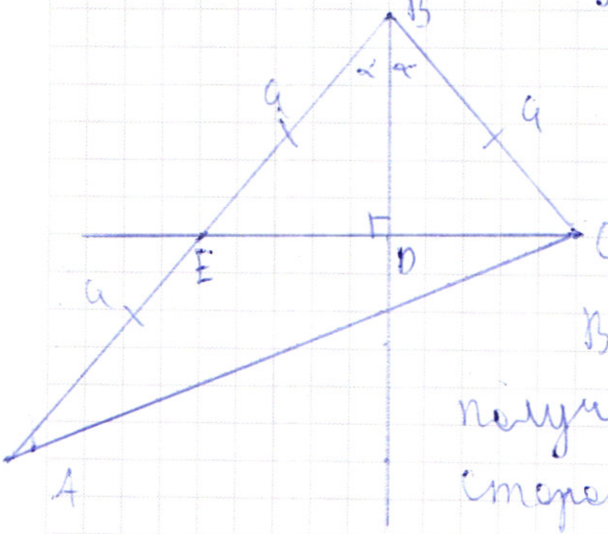
$a = 0 \Rightarrow e = 0 \Rightarrow ed^2 = 0$

$d = 0 \Rightarrow ed^2 = 0$

Отв: $a = 0$ третий член равен 0; знаменатель прогрессии равен 0, третий член равен 0; $a \neq 0$ и знаменатель пр. не равен 0, тогда третий член равен -1

№2

Пусть есть луч B – наша биссектриса.



Пусть есть произвольный перпендикулярный луч C – наша медиана. Выберем на них точки B и C соотв. Тогда отражая BC относительно биссектрисы получаем прямую, содержащую 3-ю сторону треугольника (пусть ABC)

AB пересекает в точке E луч C и $EB = \frac{1}{2} AB$

Таким образом точно устанавливаем общий вид Δ. $D = CE \cup$ луч B $\quad \Delta EDB = \Delta BDC$ по стороне и 2 прилежащим углам. Пусть $BC = EB = EA = a$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad bc \quad = \quad e \quad ed \quad ed^2$ 299 598 303

$\cancel{x \quad xy \quad xy^2}$ 298 596 306

$ax^2+2bx+c=0$ $\quad a\neq 0$ 297 594 309

...

$\cancel{4b^2}$ $\quad b^2-ac$ 201 402 597

$$x_1x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{-b}{a}=-\frac{ed}{e}=-d$$

594

202 404

$4a+x$ $\quad x=4$

$a+4$

$a;\ 2a;\ x+a$ $\quad -d=ed^3$

$e\neq 0$

299

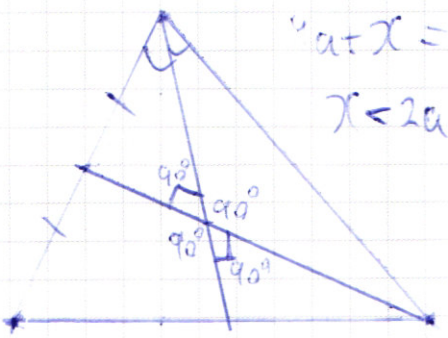
$-ed^2=1$ $\quad ed^2=0$

298

$4a+x=1200$

$ed^2=-1$

$x<2a$



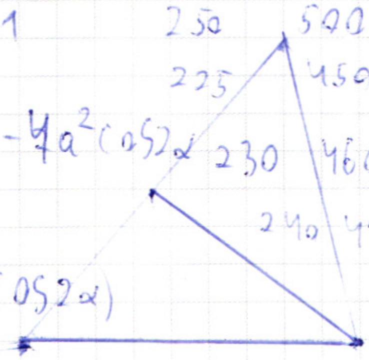
250 500 450

225 450 525

$a^2+4a^2-4a^2\cos 2\alpha$ 230 460 510

$6a-1$ 240 480 480

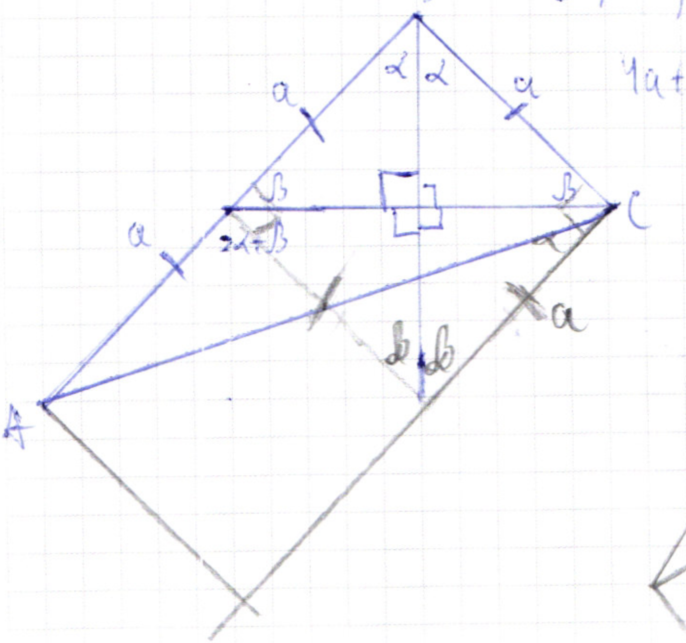
$a^2(5-4\cos 2\alpha)$

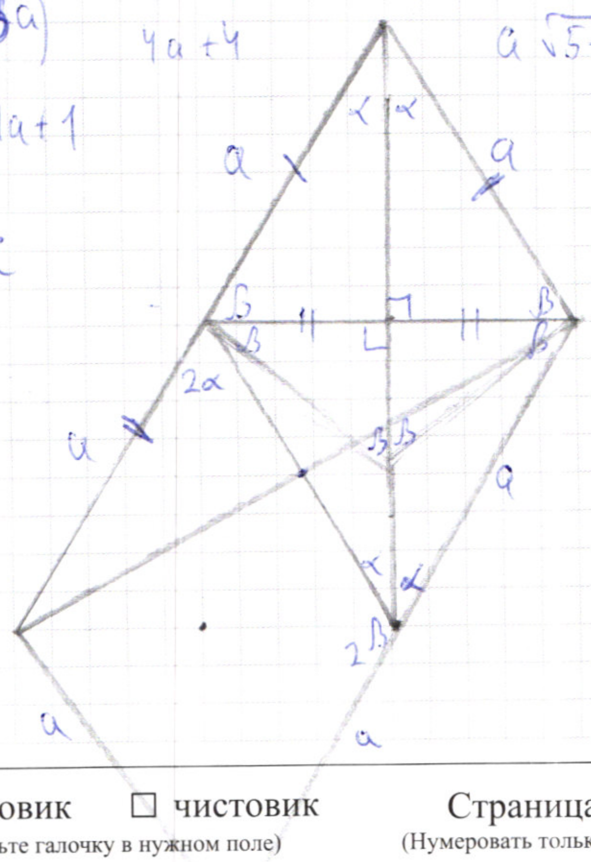


$5-4\cos 2\alpha=$

$B\ 1-9\ (4;3a)$ $\quad 4a+4$ $\quad a\sqrt{5-4\cos 2\alpha}$

$4a+1$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12 (прод.)

$AC < AB + BC$ $\quad AC + BC > AB$ по нер-ву $\triangle$

$AC < 3a$ $\quad AC + a > 2a \Rightarrow AC > a$

Пусть $AC = a + x$ $\quad x \in (0; 2a)$

$1200 = 4a + x$ $\quad 1200 \vdots 4 \quad 4a \vdots 4 \Rightarrow x \vdots 4$

a	$2a$	$a+x$
299	598	303
298	596	306
299	594	309
...	...	...
201	402	597

$a \in (200; 300)$ т.к.

$a = 200 \quad x = 2a$

$a = 300 \quad x = 0$

Могут ли тут быть повторения?

в 1 столбике очев. нет

Пусть $\begin{cases} 2a_i = \cancel{2a_k} = a_k + x_k \\ a_i + x_i = 2a_k \end{cases}$

т.к. $\Sigma = const \Rightarrow a_i = a_k$

противор.

Столбиков $299 - 200 = 99$

~~Отв: ~~ 99

$AC = \sqrt{a^2 + 4a^2 - 4a^2\cos 2\alpha} = \sqrt{a^2(5 - 4\cos 2\alpha)} = a\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$

$\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha}$ должно содержать $(1; 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 - 4\cos 2\alpha$ сод. $(1; 9) \Rightarrow \cos 2\alpha$ сод. $(-1; 1)$, а это очев. выполняется $\Rightarrow$ все ответы могут быть

Отв: 99

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\cancel{x-2}$ $\cancel{(y+2)(x-1)}$

$yx-y-2x+2\ (y-2)(x-1)$

$2(x^2-3x+1)+(y^2-3y+1)=\sqrt{(y-2)(x-1)}$ $\cancel{y>2}$

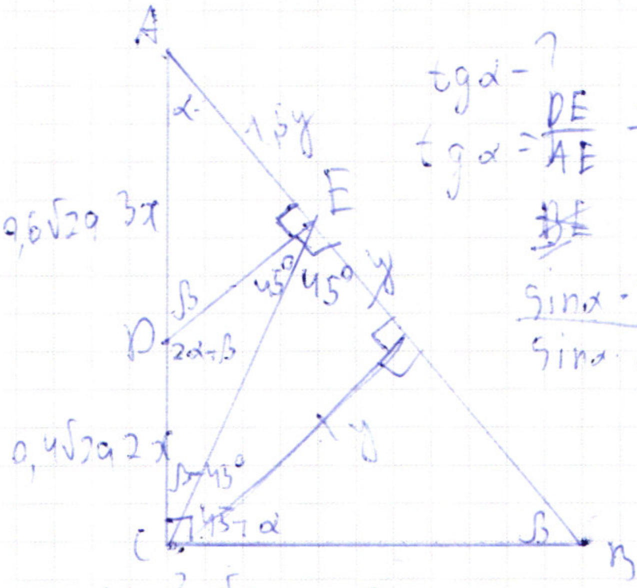
$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$ $y>2$ $x>1$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$ $x<2$ $x<1$

$D=9-4=5$ $f(z)=z^2-3z+1$ $\cancel{x=1}$

$x_1x_2=\frac{3\pm\sqrt5}{2}$ $\cancel{y=2}$

$2f(x)+f(y)=\sqrt{(y-2)(x-1)}$



$tg\alpha-?$

$tg\alpha=\frac{DE}{AE}=\frac{CB}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{DE}{3x}}{\frac{AE}{3x}}=\frac{\frac{CB}{AB}}{\frac{5x}{AB}}$

$\cancel{DE}$

$\frac{\sin\alpha\cdot3x}{\sin\alpha\cdot5x}$ $\frac{5DE}{\cancel{3AB}}=\frac{AE\cdot CB}{3x\cdot\cancel{AB}}$

$5DE=\frac{AE\cdot CB}{x}$

$5xDE=AE\cdot CB$

$2\cdot0{,}6\cdot y^2\cdot\sqrt2$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3x}{AE}=\frac{AB}{5x}$ $15x^2=AE\cdot AB$

$CE=y\sqrt2$ $\sin\alpha\cdot15x^2=AE\cdot CB$

$\frac{\sqrt2}{2}$

$DE=0{,}6y$ $\frac{DE}{AE}$ $\frac{CB}{5x}=\frac{\sin\alpha\cdot3x}{AE}$

$2y^2+0{,}36y^2-1{,}2y^2\sqrt2\cdot\cos45^\circ$

$2{,}36y^2-1{,}2y^2=1{,}16y^2=0{,}16\cdot29$

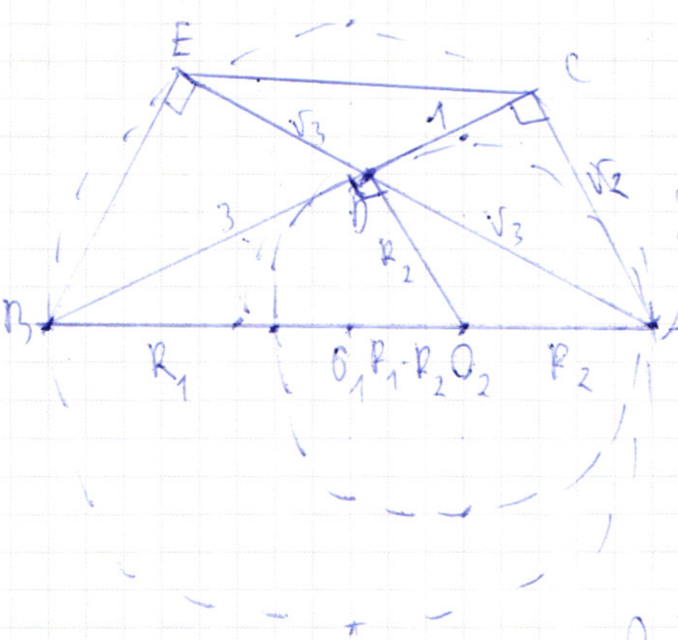
$0{,}04y^2=0{,}16$

$y^2=4$ $y=2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№5



Пусть O_1 – центр Ω, O_2 – центр ω, R_1, R_2 их радиусы соотв.

O_1, O_2, A лежат на одной прямой т.к. O_1, O_2 – центры, а A – точка касания.

$O_2D \perp BD$ т.к. BD – кас.

$\angle BCA = 90^\circ$ т.к. AB – диам.

$O_2D = R_2$; $BO_1 = R_1$; $O_1O_2 = R_1 - R_2$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{3}{4}$ $\left(\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}\right)$

$8R_1 - 4R_2 = 6R_1$

$R_1 = 2R_2$ $\quad BO_2 = 2R_1 - R_2 = 3R_2$

по теор. Пифр. $\triangle BDO_2$ $\quad 9 + R_2^2 = 9R_2^2$ $\quad R_2 = \frac{3\sqrt2}{4}$

$R_1 = 2R_2 = \frac{3\sqrt2}{2}$

$CA = DO_2 \cdot \frac{4}{3} = \sqrt2$

$DA = \sqrt3$ $\quad \triangle DCA$ т. Пифр.

$BD \cdot DC = DA \cdot ED$ (пересек. хорды)

$3 \cdot 1 = ED \cdot \sqrt3$ $\quad ED = \sqrt3$

$S_{BECA} = S_{BED} + S_{CDA} + S_{BDA} + S_{EDC}$

$\angle BEA = 90^\circ$ (AB – диам.) $\quad S_{BED} = BE\sqrt3 \cdot 0{,}5$

$BE = \sqrt{9-3} = \sqrt6$ $\quad S_{BED} = 1{,}5\sqrt2$

$S_{CDA} = \sqrt2 \cdot 1 : 2 = 0{,}5\sqrt2$

$S_{BDO_2} = 3 \cdot \frac{3\sqrt2}{4} \cdot \frac12 = \frac{9\sqrt2}{8} = 1{,}125\sqrt2$

$\angle BDA = \angle EDC$ (верт.) $\quad \angle BAD = \angle ECB$ т.к. опир. на $\smile BE$

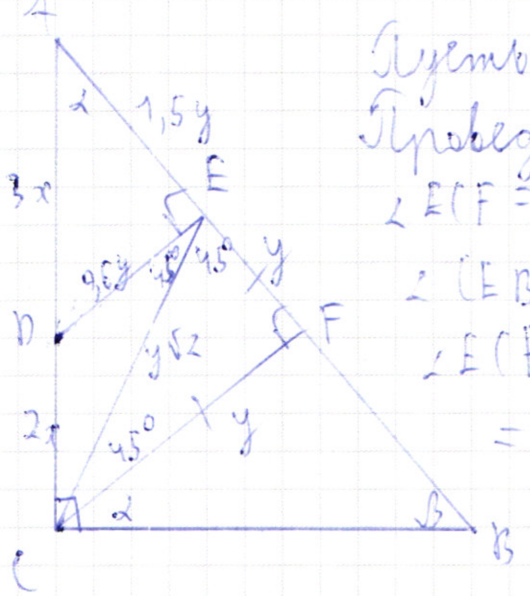
$\triangle BDA \sim \triangle EDC$ $\quad k = \sqrt3 \Rightarrow \frac{S_{BDA}}{S_{EDC}} = k^2 = 3 \Rightarrow S_{EDC} = \frac{3\sqrt2}{8}$

$S_{BECA} = \frac{3\sqrt2}{8} + \frac{9}{8}\sqrt2 + 1{,}5\sqrt2 + 0{,}5\sqrt2 = 3{,}5\sqrt2$ ~~Отв~~

Отв: радиусы равны $\frac{3\sqrt2}{2}$ и $\frac{3\sqrt2}{4}$ окр. Ω и ω соотв.; $S_{BECA} = 3{,}5\sqrt2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$

Проведем высоту CF в $\triangle ABC$

$\angle ECF = \angle CFE - \angle CEF$

$\angle CEB = \cancel{\angle CED}\ \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$

$\angle ECF = 90° - 45° = 45° = \angle CEF \Rightarrow CF = EF =$

$= y$

$tg\,\alpha = \frac{CF}{AF}$

$\triangle ADE \sim \triangle ACF$ по углам $k = \frac{3}{5}$

$AE = EF : (5-3) \cdot 3 = 1,5y$

$tg\,\alpha = \frac{y}{2,5y} = 0,4$

$CE = y\sqrt{2}$ по т. Пифагора $\triangle CFE$

$DE = y \cdot \frac{3}{5} = 0,6y$ из подобия

$DC = 0,4\sqrt{29}$ из усл.

теор. кос. $0,16 \cdot 29 = 0,36y^2 + 2y^2 - 2 \cdot 0,6 \cdot y^2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,16y^2$

$0,16 \cdot 29 = 1,16y^2$

$0,04y^2 = 0,16$

$y^2 = 4$

$y = 2$

$S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot CE \cdot \sin\angle CED =$

$= \frac{1}{2} \cdot 0,6y \cdot y\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,3y^2 = 1,2$

Отв: а) 0,4 б) 1,2

№6 (прод)

Прямые имеющие точки ниже AC пересекут либо $x=-\frac{1}{4}$, либо $x=\frac{3}{2}$ ниже A или C соотв. и очев по графику не будут подходить.

Если есть еще прямая, подходящая нам, она имеет 1 или 2 точки на прямых $x=-\frac{1}{4}$ и $x=\frac{3}{2}$ выше A или C и тогда, исходя из графических соображений, будет иметь точку, выше B, и не будет подходить.

Отв: $a=1,5$ $b=-0,25$

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} +$$

$$2x^2+y^2-6x-3y+3=\sqrt{xy-2x-y+2}$$

$$2(x^2-3x+1)+(y^2-3y+1)=\sqrt{(y-2)(x-1)}$$

$$2(x^2-3x+1)+(y^2-3y+1)=y-2x$$

№7

Отв: 0 т.к. при $f(p)=[\frac{p}{2}]$ при $p>0$ $\frac{p}{2}\geqslant 0$ раскладывая функцию на несколько, до суммы функций от простых мы никогда не получим отрицательное число.

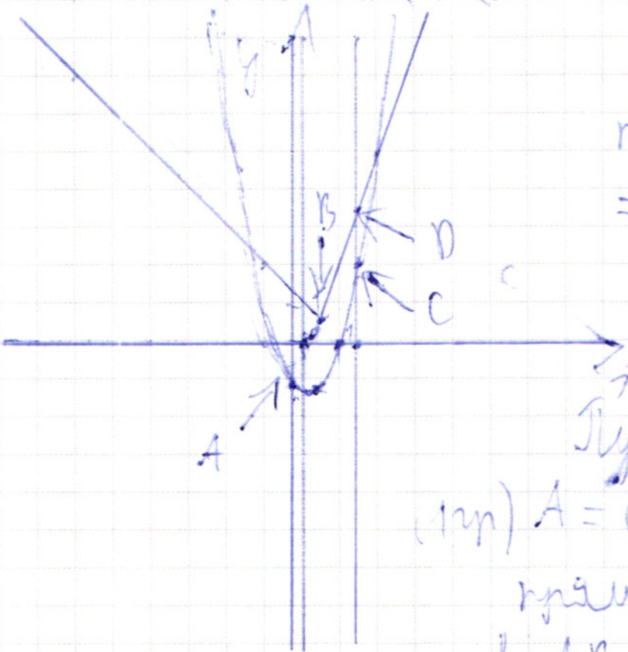
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1б

$\overset{1}{2x^2-x-1} \le \overset{2}{ax+b} \le \overset{3}{x+|2x-1|}$



правая часть 3 графика пересекает прямую $x=-\frac{1}{4}$ в $y=-\frac{?}{4}$, а 1 в $y=-\frac{5}{8}$ (выше)

~~прямая ax+b должна пересекать AB и CD~~

Пусть $E = AB \cup CD$

(1гр) $A=\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ $B=(0,5; 0,5)$ (3гр)

прямая $ax+b$ должна пересекать AB и CE

AB $\begin{cases} -\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8} \\ \frac{2}{4}a+b=\frac{2}{4} \end{cases}$ $\frac{3}{4}a=\frac{9}{8}$ $a=1,5 \Rightarrow b=-0,25$

Прямая должна быть выше 1 гр. и ниже 3 гр. включая соответственно точек на промеж. $x\in\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$AB = 1,5x-0,25$

$C=(1,5; 2)$ гр 1)

$1,5\cdot1,5-0,25=2 \Rightarrow C\in AB$ (прямой)

AC – самая „нижняя" подходящая прямая, то есть в нужном диапазоне x нет прямой, содержащей точку, ниже точек AC т.к AC проходит через точки пересечения 1 гр (нижнего) с прямыми $x=-\frac{1}{4}$ и $x=\frac{3}{2}$ и она содержит B

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

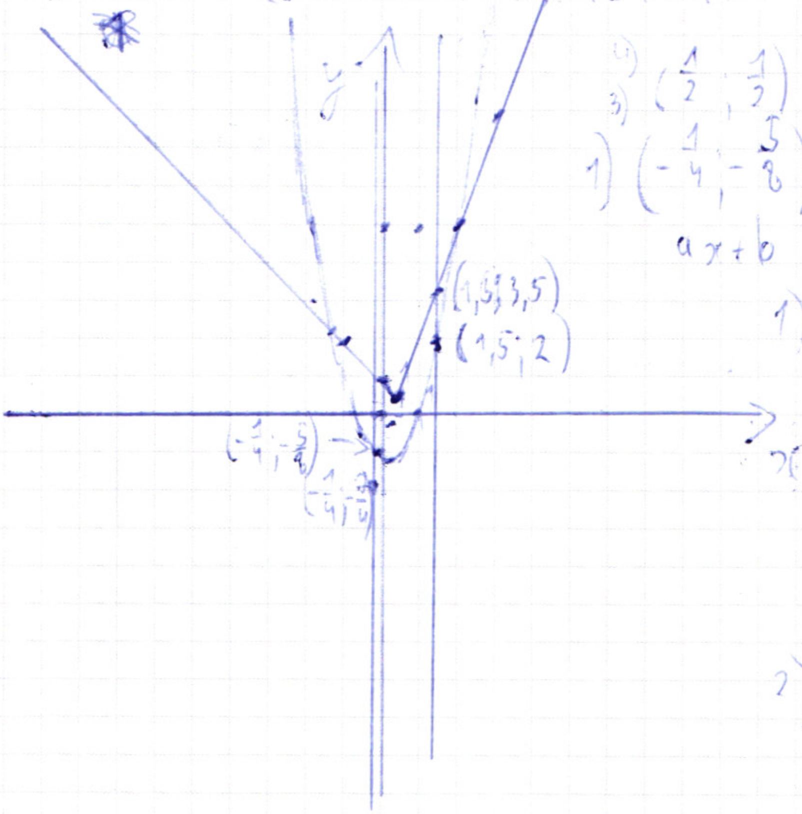
$2(x^2-3x+1)+(y^2-3y+1)=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$2(x^2-3x+1)+(y^2-3y+1)=y-2x$

$2x^2-x-1\le ax+b\le x+|2x-1|$



3) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

1) $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$

2) $(1,5;3,5)$

$(1,5;2)$

$ax+b$

1) $-\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8}$

$\frac{3}{2}a+b=2$

$\frac{7}{4}a=\frac{21}{8}$

$a=1,5$

$b=-\frac{1}{4}$

2) $-\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8}$

$\frac{3}{2}a+b=\frac{7}{2}$

$\frac{7}{4}a=\frac{33}{8}$

$a=$

$\frac{3}{2}$

$\frac{3}{4}-\frac{1}{8}$

$\frac{6}{8}-\frac{1}{8}$ $\quad \frac{5}{8}$

$\frac{3}{8}$ $\quad b=-\frac{1}{4}$

$1,5x-\frac{1}{8}$

$-\frac{1}{4}a+b=-\frac{3}{8}$

$\frac{2}{4}a+b=\frac{2}{4}$

$\frac{3}{4}a=\frac{9}{8}$

$a=1,5$

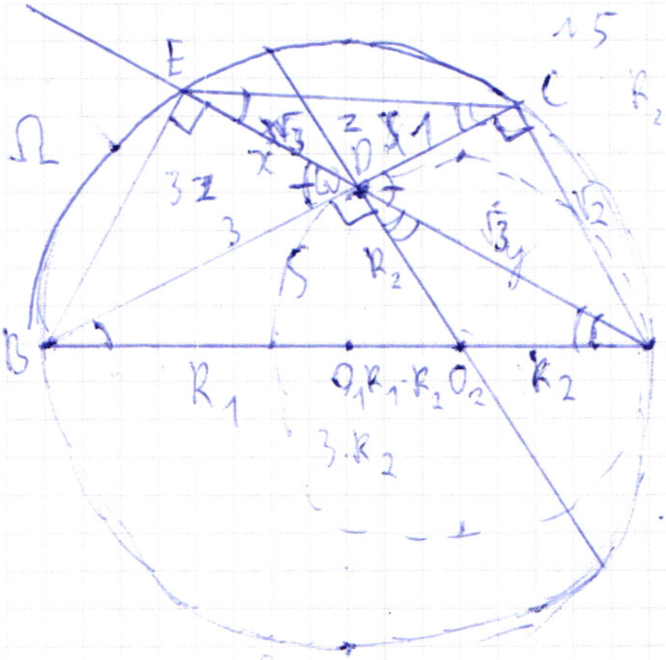
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

$R_2 : R_1 - ?$ S_{BACE}

$xy = 3$

$\frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{3}{4}$

$8R_1 - 4R_2 = 6R_1$

$R_1 = 2R_2$

$9R_2^2 - R_2^2 = 9$

$8R_2^2 = 9$

$R_2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $R_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$

~~$R_2 = 1{,}3$~~

$R_2 = 0{,}75\sqrt{2}$ $R_1 = 1{,}5\sqrt{2}$

$S_{BDO_2} = \frac{9}{4\sqrt{2}}$

$S_{BDA} = 1{,}5\sqrt{2}$

$S_{BCA} = 2\sqrt{2}$

$S_{DCA} = 0{,}5\sqrt{2}$

$1{,}5\, 2\sqrt{2} = \cancel{1{,}52}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)