МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

a, b, c – члены геом. прогр. (послед.)

четвертый член – корень $ax^2-2bx+c=0$

Найти третий член

Представим числа a, b и c как члены геом. прогр:

$a = a_1$

$b = a_1 q$

$c = a_1 q^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$a_1 x^2 - 2a_1 q x + a_1 q^2 = 0$

$a_1(x^2 - 2qx + q^2) = 0$

$a_1(x-q)^2 = 0$

$a_1 = 0$ – не может быть, т.к. это член прогрессии

$x = q$

Пусть четвертый член равен $\cancel{y}$:

$\cancel{y} = a_1 q^3 = q$

$a_1 q^3 - q = 0$

$q(a_1 q^2 - 1) = 0$

$q = 0$ – не может быть, т.к. это шаг прогрессии

$a_1 q^2 - 1 = 0$

$a_1 q^2 = 1$

$a_1 q^2 = c = 1$

Ответ: $c = 1$

☐ черновик ☑ чистовик

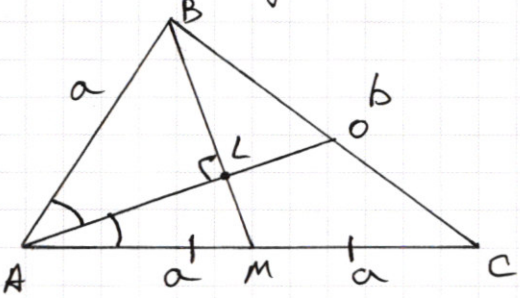
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

Задача № 2

Согласно условию, нарисуем один из треугольников



AO – бис-са ; BM – медиана

$AO \perp BM$

Пусть $AB = a$

$\triangle ABL = \triangle ALM$ ($\angle BAO = \angle OAM$, т.к. AO – бис-са ; $AO \perp BM$; AL – общ.) => $AB = AM = a$

Т.к. $AM = a$, то $AM = MC = a$

Пусть $BC = b$

Т.к. $P = 900$, то $3a + b = 900$. Решим уравнение в целых числах

$3a + b = 900$

$a_0 = 300$; $b_0 = 0$

$$\begin{cases} 3a + b = 900 \\ 3a_0 + b_0 = 900 \end{cases}$$

$3(a - a_0) + (b - b_0) = 0$

$3(a - a_0) = -(b - b_0)$

$$\begin{cases} a - a_0 = -k \\ b - b_0 = 3k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 300 - k \\ b = 3k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Т.к. a и b – стороны треугольника, то справедливы неравенства:

$$\begin{cases} a < 2a + b \\ 2a < a + b \\ b < 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 300 - k < 600 + k & (1) \\ 600 - 2k < 300 + 2k & (2) \\ 3k < 900 - 3k & (3) \end{cases}$$

1. $300 - k < 600 + k$

$-2k < 300$

$k > -150$

2. $600 - 2k < 300 + 2k$

$-4k < -300$

$k > 75$

3. $3k < 900 - 3k$

$6k < 900$

$k < 150$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. a и b – стороны треуг., то a и $b > 0 \Rightarrow 0 < k < 300$

Т.к. $\begin{cases} 0 < k < 300 \\ k > -150 \\ k > 75 \\ k < 150 \end{cases} \Rightarrow 75 < k < 150$

Кол-во целых чисел k в промежутке $(75; 150)$ будет показывать различные значения сторон a и b при периметре 900, а значит и кол-во различных треугольников, удовл. условию.

Таких чисел: ~~…~~ 74

Ответ: ~~…~~ 74

Задача №3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} \\ x^2 - 12x + 36 + y^2 - 2y + 1 + y^2 - 2y - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + (y-1)^2 + y(y-2) = 17 \end{cases}$$

Пусть $x - 6 = a$, $y - 1 = b$ $\Rightarrow$ $x = a + 6$, $y = b + 1$

$$\begin{cases} a + 6 - 6(b+1) = \sqrt{ab} \\ a^2 + b^2 + (b+1)(b+1-2) = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2+b^2-1=17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$a_1=4b\ ;\ a_2=9b$

I. $a=4b$

$16b^2+2b^2=18$

$18b^2=18$

$b^2=1$

$$\left[\begin{array}{l} b=1 \Rightarrow a=4 \\ b=-1 \Rightarrow a=-4 \end{array}\right.$$

1. $b=1\ ;\ a=4$

$$\begin{cases} y-1=1 \\ x-6=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=10 \end{cases}$$

2. $b=-1\ ;\ a=-4$

$$\begin{cases} y-1=-1 \\ x-6=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

II. $a=9b$

$81b^2+2b^2=18$

$83b^2=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$b=\sqrt{\frac{18}{83}}=3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}} \Rightarrow a=27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

$b=-\sqrt{\frac{18}{83}}=-3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}} \Rightarrow a=-27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

1. $b=3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}\ ;\ a=27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

$$\begin{cases} y-1=3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}} \\ x-6=27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1 \\ x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6 \end{cases}$$

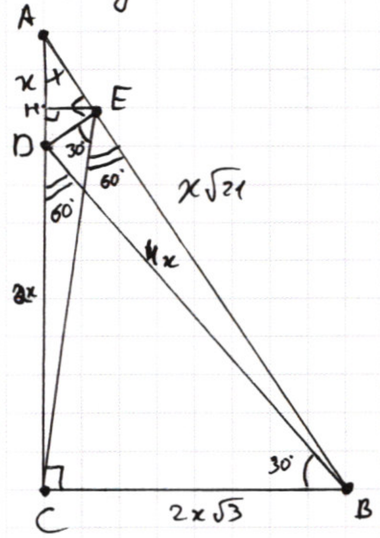
2. $b=-3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}\ ;\ a=-27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}$

$y=-3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+1\ ;\ x=-27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+6$

Ответ: $(10;2);\ (2;0);\ \left(27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right);\ \left(-27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ -3\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг. ($\angle C = 90°$); $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$;

$\angle CED = 30°$; $DE \perp AB$; б) $AC = \sqrt{7}$.

Найти: $tg \angle BAC$

б) S_{CED}

Решение: т.к. $DE \perp AB$, то $\angle DEA = \angle DEB = 90°$

т.к. $\angle DEB = 90°$ и $\angle CED = 30°$, то $\angle CEB = 60°$

$CDEB$ – впис., т.к. $\angle DCB + \angle DEB = 90 + 90 = 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDB = \angle CEB = 60°$ и $\angle DEC = \angle DBC = 30°$, т.к. опираются на одинаковые отрезки CD и BC соответственно

В $\triangle CDB$: $\angle C = 90 \Rightarrow \triangle CDB$ ~~—~~ прямоуг. и CD лежит напротив угла $30° \Rightarrow 2CD = BD \Rightarrow BD = 4x$ ($AD = x \Rightarrow CD = 2x$, т.к. $\frac{AD}{CD} = \frac{1}{3}$)

В $\triangle CDB$ по т. Пиф:

$CB = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow BC = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \Rightarrow AC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

В $\triangle ABC$ по т. Пиф:

$AB = \sqrt{9x^2+12x^2} = x\sqrt{21} = \sqrt{21} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{x}{x\sqrt{21}} = \frac{DE}{2x\sqrt{3}} = \frac{AE}{3x}$

$DE = \frac{2x^{\cancel{2}}\sqrt{3}}{x\sqrt{21}} = \frac{2x\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2x}{\sqrt{7}} = \frac{\frac{2\cdot\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\cancel{\sqrt{7}}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{7}}} = \frac{2}{3}$

$AE = \frac{3x^2}{x\sqrt{21}} = \frac{3x}{\sqrt{21}} = \frac{\frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{7}}{\cancel{3}}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Проведем высоту EH в $\triangle ADE$:

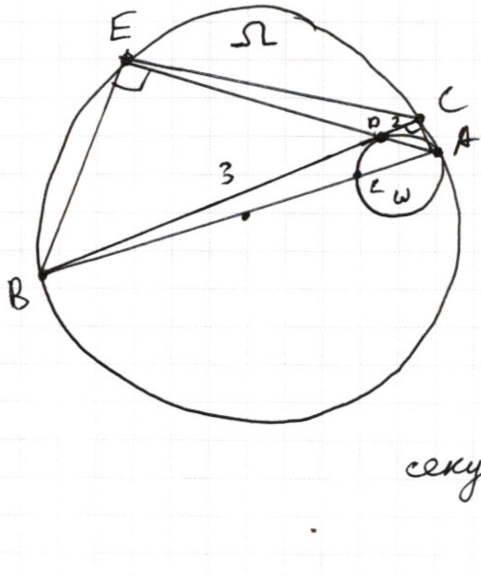
$HE = \frac{AE\cdot DE}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$

$S_{CED} = \frac{CD\cdot HE}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3\cancel{\sqrt{7}}}\cdot\frac{2\cancel{\sqrt{7}}}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\cancel{2}}{9}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Задача №5



Дано: $CD = 2$; $BD = 3$

Найти: $R(\Omega)$; $R(\omega)$; S_{BACE}

Решение:

$ED \cdot AD = BD \cdot CD = 3 \cdot 2 = 6$ по теор. о перес. хордан

$BD^2 = 9 = BL \cdot AB$ по теор. о касат. и секущ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$8x-6|2x-1|\leq ax+b\leq -8x^2+6x+7$

Построим графики уравнений

$8x-6|2x-1|=y$

$2x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 0,5 \qquad 2x-1<0 \Rightarrow x<0,5$

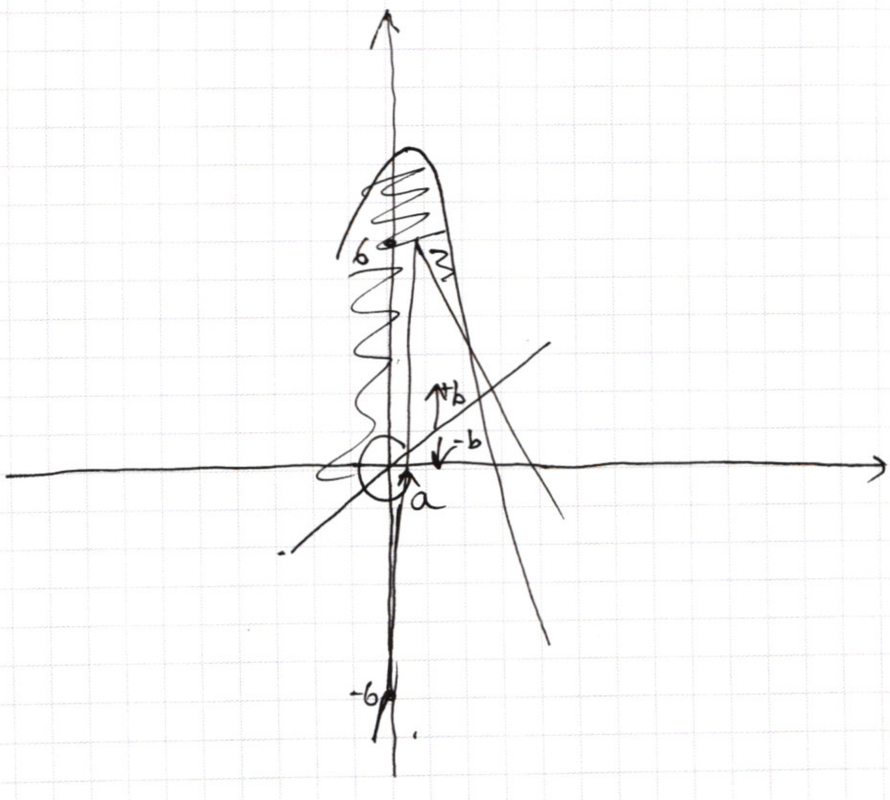
$8x-12x+6=y \qquad 8x+12x-6=y$

$-4x+6=y \qquad 20x-6=y$

$-8x^2+6x+7=y$

$x_0=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$

$y_0=-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=\frac{-9}{8}+\frac{18}{8}+\frac{56}{8}=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8}$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

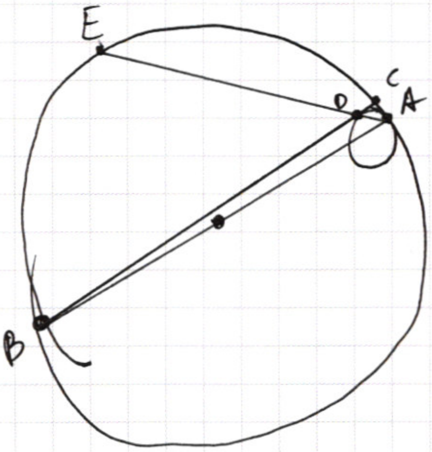
ШИФР
(заполняется секретарём)

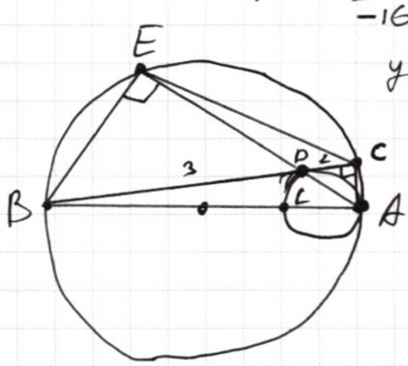
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~8x - 6 | 2x - 1 |~~

$-8x^2+6x+7$

$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$





$y_0 = \frac{9}{64 \cdot 8} \cdot (-8) = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{8} + 7$

$\frac{9}{8} + \frac{56}{8} = \frac{65}{8}$

$8\frac{1}{8}$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = 6$

$BD^2 = BL \cdot AB = 9$

~~$8x^2+6x+7$~~

~~$BD \cdot DC = \frac{BD}{DC}$~~

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(a/b) = f(a) - f(b)$

$AB = \frac{9}{BL}$

$8x - 6 | 2x - 1|$

$2; 2$

$f([3]) =$

$f(3) = [\frac{3}{2}]$

$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(4) = 1 + 1 = 2$

$f(2; 4) = f(8) =$

$\frac{3}{2} = 1{,}5$

$f(2; 3) \Rightarrow f(6) = f(2) + f(3)$

$f(6) = 1 + 1 = 2$

f

$8x - 6 | 2x - 1|$

~~$x \geq 0$~~

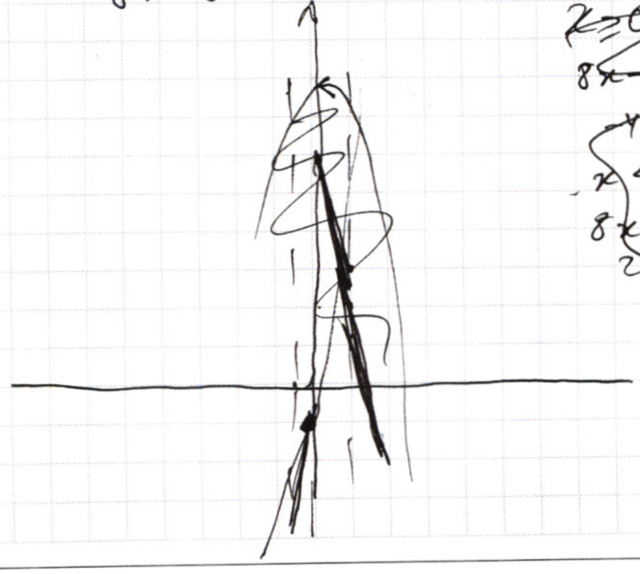
$8x - 12x + 6$

$-4x + 6$

$x < 0$

$8x + 12x - 1$

$20x - 1$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$8x-6|2x-1|$

$2x-1 \geq 0$

$x \geq 0,5$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x = \sqrt{7}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow 3\sqrt{3}\,x = \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{21}}{4}$

$\frac{\sqrt{7} \cdot \frac{3\sqrt{21}}{4}}{2} = \frac{3\sqrt{147}}{4_2} \cdot \frac{1}{2_1} = \frac{3\sqrt{147}}{2}$

~~6. $8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$~~

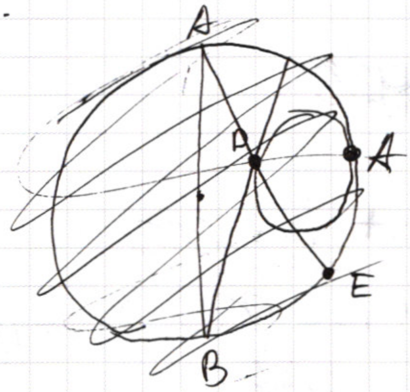
$\frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$

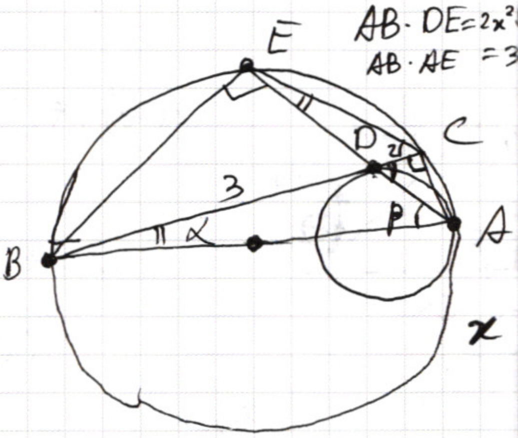
$\triangle DEA \sim \triangle ABC$

$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$\frac{DE}{2x\sqrt{3}} = \frac{x}{AB} = \frac{AE}{3x}$

5.





$AB \cdot DE = 2x^2\sqrt{3}$

$AB \cdot AE = 3x^2$

$3x \cdot DE = AE \cdot 2x\sqrt{3}$

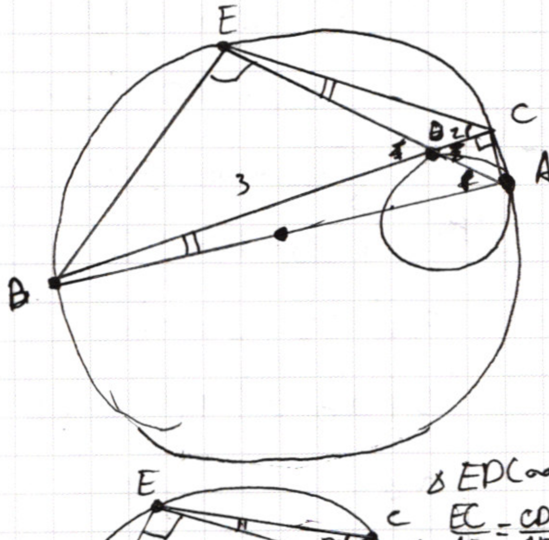
$\frac{DE}{AE}$

$\alpha + \beta = \beta \Rightarrow$

~~$\alpha = 0$~~

$16 + 12$

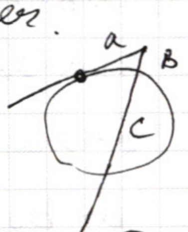
$9 + 12 = 21$

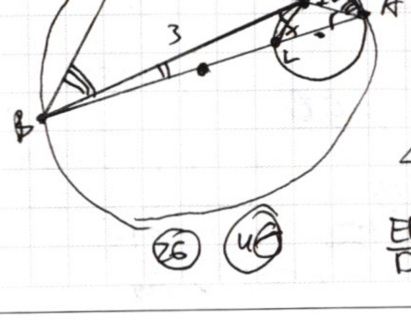


$\triangle BDA \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{BD}{ED} = E$

$\frac{2}{AD} = \frac{3}{ED}$

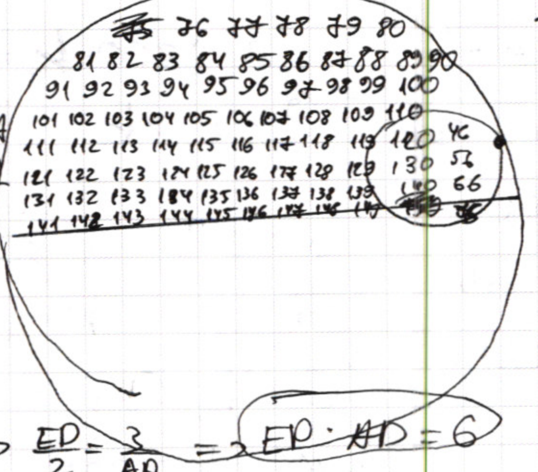
$BC \parallel AB$ — противореч.





$\triangle EDC \sim \triangle BDA$

$\frac{EC}{AB} = \frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD}$



$a^2 = b(b+d)$

$9 = BL \cdot AB$

$6 = ED \cdot AD$

$\| $

$BD \cdot DC$

$\begin{cases} BD \cdot DC = 6 \\ AB \cdot BL = 9 \end{cases}$

$\triangle EAD \sim \triangle EDC$

$\frac{ED}{DC} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{ED}{2} = \frac{3}{AD} \Rightarrow ED \cdot AD = 6$

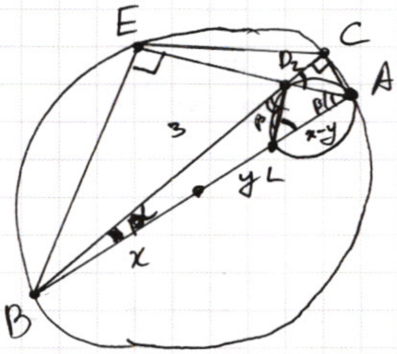
26 46

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

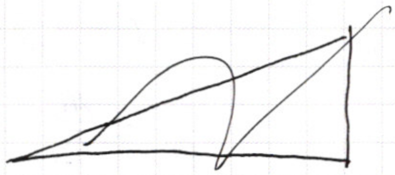


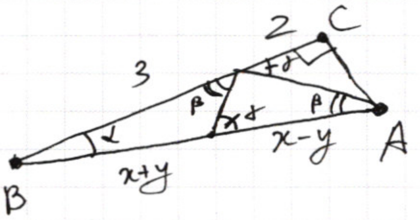
$$\begin{cases} BD \cdot CD = ED \cdot AD = 6 \\ BL \cdot AB = 9 \end{cases}$$

$(x+y) \cdot 2x = 9$

$2x^2 + 2xy = 9$

$EA \cdot \ldots = AB \cdot \ldots$

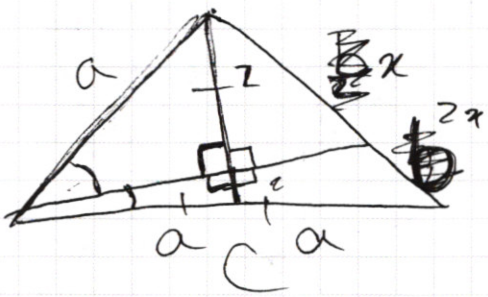




$90 - \gamma + \beta = 90 - \alpha$

$\cancel{90} - \alpha - \cancel{90} + \gamma - \beta = 0$

$\gamma - \beta = \alpha$



$a + b + c = 900$

$a + 2a + b = 900$

$3a + b = 900$

$3x = b \quad 3a$

$b < 3a$

$3a + b = 900$

$a_0 = 300; \; b_0 = 0$

$$\begin{cases} 3a + b = 900 \\ 3a_0 + b_0 = 900 \end{cases}$$

$3(a - a_0) = -(b - b_0)$

$a - a_0 = -k$

$b - b_0 = 3k$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 300 - k \\ b = 3k \end{cases}$$

$3k < 900 - 3k$ $\quad 600 - 2k < 300 + 2k$

$6k < 900$ $\quad 4k > 300$

$k < 150$ $\quad k > 75$

$\cancel{300 - k < 600 + k}$

$\cancel{-2k < 300}$

$\cancel{k > -150}$

$3a + b = 900$

$a_0 = 300; \; b_0 = 0$

$$\begin{cases} 3a_0 + b_0 = 900 \\ 3a + b = 900 \end{cases}$$

$3a_0 + b_0 - 3a - b = 0$

$3(a_0 - a) + 1(b_0 - b)$

a_0

$k \in \mathbb{Z}$

$k > 0 \quad 0 < k < 300$

$$\begin{cases} b < 3a \\ 2a < a + b \\ a < 2a + b \end{cases}$$

$a > 0$

$\cancel{b > 0}$

300

$k = 1: \; a = 299$

$b = 3$

$k = 150$

$k = 76: \; a = 224$

$b = 238$

$$\cancel{\begin{cases} 0 < k < 75 \\ 100 > k > 300 \end{cases}}$$

$\cancel{100 < k < 150}$

$75 < k < 150$

$\cancel{k = 74: \; a = 226}$

$\cancel{b = 222}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. a, b, c – геом. прогр.

$a = a_1$

$b = a_1 q$

$c = a_1 q^2$ $\quad a_1 q^3 = q$ $\quad aq^3 - q = 0$

$ax^2 - 2bx + c = 0$ $\quad q(aq^2 - 1) = 0$

$\cancel{x_{1,2} = 2b \pm \sqrt{4b^2}}$ $\quad \cancel{q = 0}$; $aq^2 = 1$

c

$ax^2 - 2(a_1 q)x + a_1 q^2 = 0$

$a_1 (x^2 - 2q_1 x + q^2) = 0$

$\cancel{a_1 = 0}$ – не может быть

$x^2 - 2q_1 x + q^2 = 0 \Rightarrow (x-q)^2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2q_1 \pm \sqrt{4q^2 - 4q^2}}{2}$

$x_1 = q$

3. $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 1 - 17 = 0$

$(x-6)^2 + (\sqrt{2}y - 1)^2 = 17$

$\cancel{x = 2y}$ $\quad xy - 6y - x + 6 = y(x-6) - (x-6)$

$(y-1)(x-6)$

$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2 + y^2 - 2y + 1 + y^2 - 2y = 17$

$(x-6)^2 + (y-1)^2 + y(y-2) = 17$

$x - 6 = a \Rightarrow x = a + 6$

$y - 1 = b \Rightarrow y = b + 1$

$x - 6y = a + 6 - 6(b+1)$

$a - 6b$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$a^2 + b^2 + (b+1)(b-1) = 17$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + b^2 + b^2 - 1 = 17 \end{cases}$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$\cancel{a^2 = 18}$

$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$13ab - 34b^2 = -18$

$34b^2 - 13ab - 18 = 0$

$b_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169+2448}}{68} = \frac{13\pm\sqrt{2617}}{68}$

$\times\ 34,\ 72,\ 68$ $\quad$ $\times\ 18,\ 4,\ 72$ $\quad$ $+\ 2448,\ 169,\ 2617$

238

2448

$a^2 - 13ab + 36 = 0$

$a_1 = 4b;\ a_2 = 9b$

$a_{1,2} = \frac{13b \pm \sqrt{169b^2 - 144b^2}}{2}$ $\quad \frac{13b \pm 5b}{2}$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

a^2

$81b^2 + 2b^2$

$83b^2 = 18$

$b^2 = \frac{18}{83}$

$b = +\sqrt{\frac{18}{83}}$

$b = \pm$ $\quad a=-4 \Leftarrow b=-1$

$16b^2 + 2b^2 = 18$

$18b^2 = 18$

$b^2 = 1$

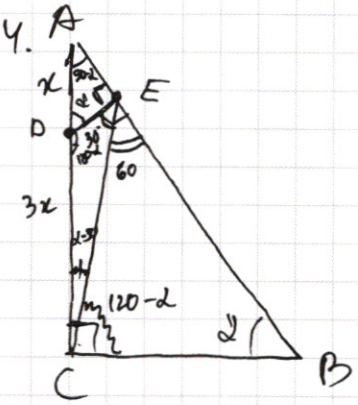
$b = \pm 1$

$b=1 \Rightarrow a=4$

$y = 2 \quad x = 10$

$y = 0;\ x = 2$

4.



$tg\ BAC - ?$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{x}{AB} = \frac{AE}{4x} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AE \cdot BC = 4x \cdot DE$

$AB \cdot AE = 4x^2$

$90 + (120-\alpha) = \alpha - 30$

$\frac{x}{7x} = \frac{AE}{4x} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{1}{7} = \frac{AE}{4x} = \frac{DE}{BC}$

$AE \cdot 7x = 4x^2$

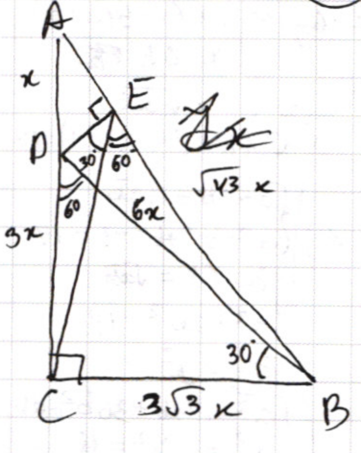
$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{7}$

$BC = 7DE$

$tg\ BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow$ ~~AE·DE = BC·AE~~

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\cos 120 = \cos(90+30) = -\sin 30$



$AB^2 = x^2 + 36x^2 - 2\cdot x\cdot 6x \cdot \cos 120 =$

$= 37x^2 + 12x^2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = 43x^2$

$AB = 7x$

$49x^2 - 16 = 33$

$BC = 36x^2 - 9x^2 = 27$

$3\sqrt{3}x = \sqrt{33}x$

$x(3\sqrt{3} - \sqrt{33}) = 0$

$x = 0$

$\frac{3\sqrt{3}}{4} = tg$ $\quad 27 + 16 = 43$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)