МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

пусть q – знаменатель геом пр-ии

т.е. $b = a \cdot q$

$c = a \cdot q^2$

d – 4-ый член прогрессии $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = a \cdot q^3$ и $ad^2 - 2bd + c = 0$

$a \cdot a^2 q^6 - 2 \cdot aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$(aq^2)^3 - 2(aq^2)^2 + (aq^2) = 0$

заметим что $c = aq^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c^3 - 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 - 2c + 1) = 0$

$c(c-1)^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = 1 \end{array}\right.$

пример для $c = 0$:

$a = 0, b = 0, c = 0, d = 0, q = 1 \Rightarrow ad^2 - 2db + c = 0$

пример для $c = 1$:

$a = b = c = d = q = 1 \Rightarrow ad^2 - 2bd + c = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

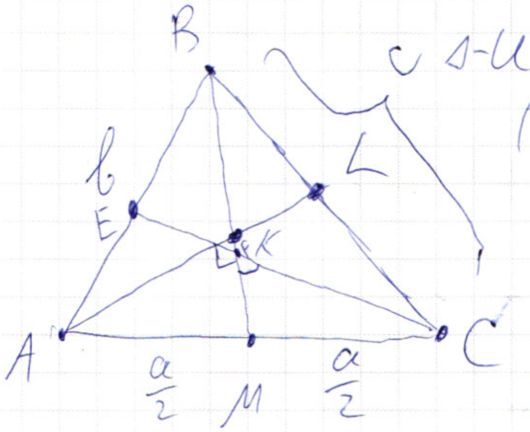
(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит Ответ: $\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$

возможно, есть огр-ия на (a, в, c) - что они $\neq 0$
я спросил и мне ответили
что $q \neq 0$, а насчёт a, в, c - без ком-ев.
в моих примерах $q \neq 0$

№2

пусть a, в, c - длины сторон Δ-а
они целые и положительные $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ натуральные.



Δ-ик со сторонами (a, в, c) = Δ-ику со сторонами (в, a, c) ~~ж~~ т.е. нам не важен порядок, в котором указаны длины сторон.

Пусть тогда медиана проводится к стороне AC = a

есть 2 случая:

1) AL - бис-са угла A $\perp$ BM
2) CE - бис-са угла C $\perp$ BM

(BM - медиана к стороне AC)

т.е. либо $в = \frac{a}{2}$ либо $c = \frac{a}{2}$ (бис-са = высота $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Δ - р/б)

N_1 - число Δ-ов в случае 1

N_2 - число Δ-ов в случае 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 - продолжение

однако, в силу неважности порядка указания длинн сторон для задавания Δ-а мы можем считать $в = \frac{a}{2}$ и ответом тогда будет N_1

заметим кстати, что условие $в = \frac{a}{2}$ - критерий нужного утв. про Δ-ики (Δ-ик без важности указания порядка сторон).

Считаем N_1:

$$a + \frac{a}{2} + c = 900$$

$$b = \frac{a}{2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a \vdots 2 \Leftrightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$2k + k + c = 900$$

$$3k + c = 900$$

$k \in \{1, 2, 3, \dots, 299\}$ - выбирая любое такое k мы однозначно задаём a, $в$ и c. ($c = 900 - 3k \in \mathbb{N}$)

~~но 299 - ещё не ответ. (случай в=с был посчитан дважды) (именно случай, он~~

~~один)~~ но есть требования на к:
выполнении нер-а Δ-а:

$$\begin{cases} 2k+k > 900-k \\ 2k+(900-k) > k \\ k+(900-k) > 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4k > 900 \\ k+900 > k \\ 900 > 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} k > 225 \\ k < 450 \end{cases}$$

$k \in \{226, 227, \dots, 299\}$
$(k < 300$ т.к. $c = 900-3k > 0)$
Случай $b = c = \frac{a}{2}$ здесь не будет посчитан т.к. это не подходит под условие нер-а Δ-а.

выбирая $\forall k$ мы однозначно задаём Δ-ик с нужными св-вами $\Rightarrow$

$\Rightarrow N_1 = 299-225 = 99-25 = 99-30+5 = 69+5 =$
$= 74$

Ответ: 74

№3

$$x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6}$$

$$xy-6y-x+6 = y(x-6)-(x-6) = (x-6)(y-1)$$

значит ОДЗ: $(x-6)(y-1) \geq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 - продолжение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geq 6\\ y \geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x \leq 6\\ y \leq 1\end{cases}\end{array}\right.$$ - ОДЗ, также $x-6y=\sqrt{\dots} \geq 0$ значит $x \geq 6y$

нестрогое неравенство, т.к. при $x=6$ подходит $\forall y \in R$ и при $y=1$ подх. $\forall x \in R$

но можно за ОДЗ не следить, т.к.:

~~если~~

$$\sqrt{f(y,x)} = g(y,x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(y,x) = (g(y,x))^2 \geq 0 \\ g(y,x) \geq 0 \end{cases}$$

вып. автоматом

т.е. система (исходная) $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \quad (1) \\ x \geq 6y \\ 20 = -x^2 - 2y^2 + 12x + 4y \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (-6) = -\frac{18}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}y^2$$

$(1) \Leftrightarrow x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$

подставляем из (2) -6 и:

$x^2 - 13yx + 36y^2 + 6y + x - \frac{18}{5}x - \frac{6}{5}y + \frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{5}y^2 = 0$

домножим всё на 10:

$10x^2 - 130xy + 360y^2 + 60y + 10x - 36x - 12y + 3x^2 + 6y^2 = 0$

$13x^2 + 366y^2 - 130xy + 48y - 26x = 0$

$y = 0$: $13x^2 - 26x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{26}{13} < 6 \end{array}\right.$$

$x = y = 0$ — не подходит в ур-ие (1)

$y = 0$ и $x = \frac{26}{13}$:

~~$6 - \frac{26}{13} = \frac{6 \cdot 13 - 26}{13} = 1$~~

$\frac{26}{13} \overset{?}{=} \sqrt{0 - 0 - \frac{26}{13} + 6}$

$\frac{26}{13} \overset{?}{=} \sqrt{6 - \frac{26}{13}}$

$\sqrt{6 - \frac{26}{13}} > \sqrt{6 - 2} = \sqrt{4} = 2$

$\frac{26}{13} < 2 \Rightarrow$ тоже не подходит $\Rightarrow$

$\Rightarrow y \neq 0 \Rightarrow$ на y^2 можно делить.

вот и поделим:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

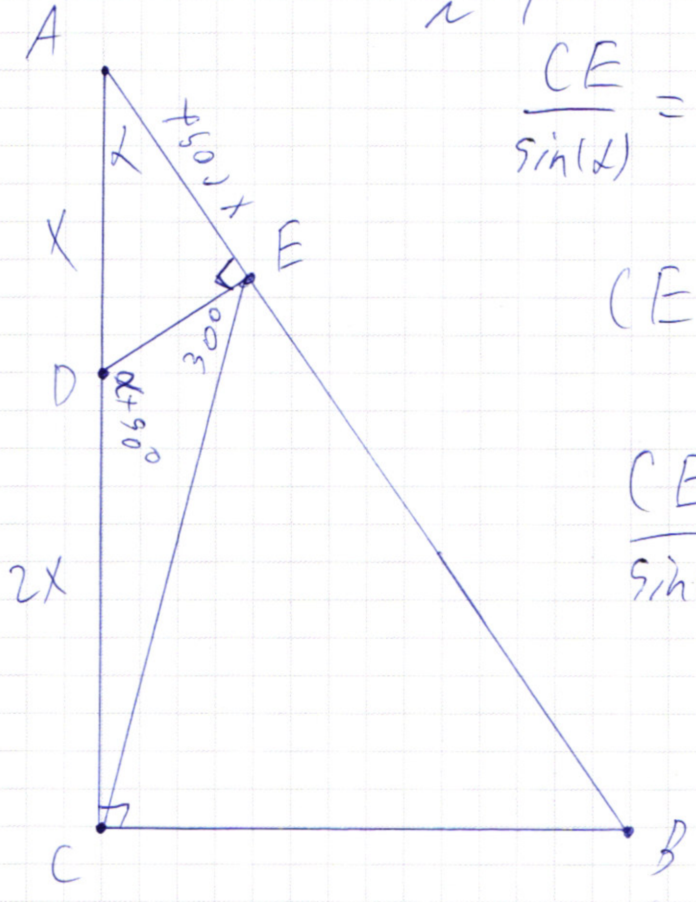
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 - продолжение:

$$\cancel{73\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 336 - 130\left(\frac{x}{y}\right)}$$

Решение возможно будет, но потом.

№4



$$\frac{CE}{\sin(\alpha)} = \frac{AC}{\sin(120^\circ)}$$ Т. sin-ов для △AEC

$$CE = \frac{3x\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}\,x\sin\alpha$$

$$\frac{CE}{\sin(90^\circ+\alpha)} = \frac{DC}{\sin(30^\circ)}$$

Т. sin-ов для △DEC.

$$\frac{2\sqrt{3}\,x\sin\alpha}{\sin(\alpha+90^\circ)} = 4x$$, т.к. $x \neq 0$!

$$2\sqrt{3}\sin\alpha = 4\sin(\alpha+90^\circ)$$

$\sin(90^\circ+\alpha) = -\sin(-90^\circ-\alpha) =$

$= -\sin(90^\circ - (180^\circ+\alpha)) = -\cos(\alpha+180^\circ) =$

$= -(-\cos(180^\circ - (\alpha+180^\circ))) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

то есть $2\sqrt{3}\sin\alpha = 4\cos\alpha$

$tg(\alpha) = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(ясно, что раз $\alpha \in (0; 90^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha \neq 0.$) т.е. а) Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{7}/3$

$DE = AE \cdot tg\alpha$, пусть $AE = a \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = a\,tg\alpha = \frac{a \cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

из ΔADE: $AD^2 = \frac{7}{9} =$

$= AE^2 + DE^2 = a^2 + \frac{4a^2}{3} = a^2\left(1+\frac{4}{3}\right) = a^2 \cdot \frac{7}{3}$

$\frac{7}{9} = a^2 \cdot \frac{7}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

$DC = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

найдём $\sin(\alpha+90^\circ) = \cos(\alpha)$:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$\exists \cos\alpha = t \Rightarrow 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-t^2} = t\cdot 4$

$(\ldots)^2 \Rightarrow \quad 12 - 12t^2 = t^2\cdot 16$

$28t^2 = 12$ $\qquad \cos\alpha = t \geqslant 0$ т.к. $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$

$t^2 = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

$S(\triangle CED) = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot DC\cdot \sin(\angle EDC) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5

$\alpha = \angle KAD$ (изначально)

рисунок см. на сл. странице

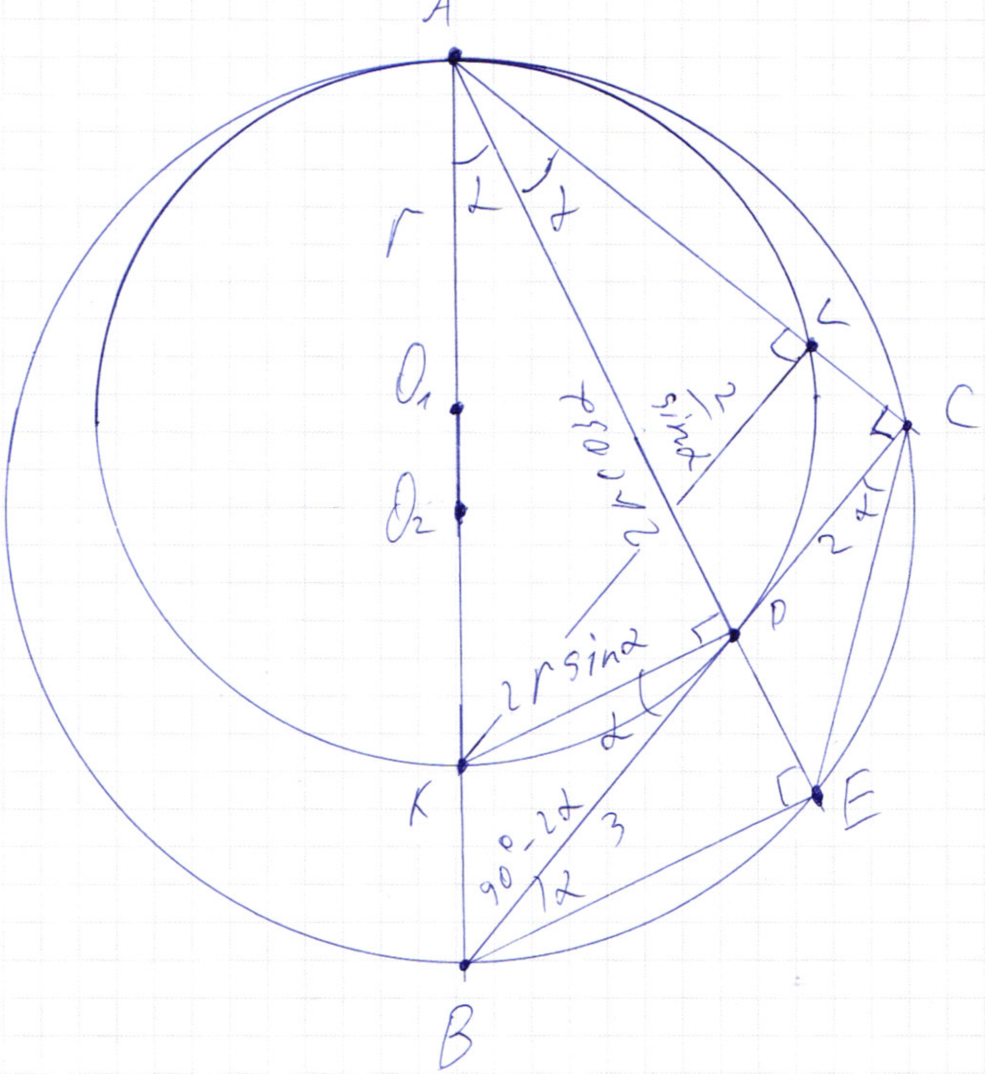
$\angle ADB = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{CE}) = \frac{1}{2}(180^\circ + \breve{CE}) = 90^\circ + \frac{\breve{CE}}{2}$

$\alpha + 90^\circ = \frac{\breve{CE}}{2} + 90^\circ \Rightarrow \breve{CE} = 2\alpha \Rightarrow \angle CAE = \alpha$

r - радиус маленькой окр-и.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$$AD = 2r\cos\alpha = \frac{2}{\sin\alpha} \Rightarrow r\cdot\sin(2\alpha) = 2$$

$$\frac{5}{\sin(2\alpha)} = 2R = 2\cdot\frac{5}{4}r = \frac{5}{2}r$$

заметим что $\frac{KL}{\sin(2\alpha)} = 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow KL = 2r\sin(2\alpha) = 4$

$\triangle ALK \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{2r}{2R} = \frac{KL}{BC} = \frac{4}{5}$

$R = \frac{5}{4}r$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC = \frac{2}{tg\alpha}$ – из ΔACD

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{\frac{2}{tg\alpha}}{\cos(2\alpha)} = \frac{2}{tg(\alpha)\cos(2\alpha)} = 2R$$

$$\begin{cases} R \cdot tg\alpha \cdot \cos(2\alpha) = 1 \quad (1) \\ r \cdot \sin(2\alpha) = 2 \quad (2) \\ R = \frac{5}{4} r \quad (3) \end{cases}$$

(2) : (1) – будет:

$$\frac{r \sin(2\alpha)}{R\, tg\alpha \cos(2\alpha)} = 2$$

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{tg(2\alpha)}{tg(\alpha)} = 2$$

$$4 tg(2\alpha) = 10 tg(\alpha)$$

$$2 tg(2\alpha) = 5 tg(\alpha)$$

$2 \cdot \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = 5 tg\alpha$, $tg\alpha = t \Rightarrow$

$$\frac{4t}{1-t^2}=5t$$

$tg\alpha \neq 0$ т.к. $\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4}{1-t^2}=5$$

$$4=5-5t^2$$

$$5t^2=1$$

$$t^2=\frac{1}{5}$$

$t=\frac{1}{\sqrt{5}}$ $(\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow tg\alpha \geq 0)$ $tg(\alpha)$

$$tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{5}}=\frac{1\cdot 5}{2\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{5}}$ $(\alpha \in (0;\frac{\pi}{2}))$

$$1-\cos^2\alpha=\frac{1}{5}\cos^2\alpha$$

$$5=6\cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=\frac{5}{6}$$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{5}{6}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 1 - 2\cdot\frac{1}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$R\cdot tg\,\alpha\cdot\cos(2\alpha) = 1$

$R\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{3} = 1$

$R = \frac{3\sqrt5}{2}$

$r = \frac{4}{5}R = \frac{4}{5}\cdot\frac{3\sqrt5}{2} = \frac{6\sqrt5}{5}$

в $\triangle BEC$: $\left.\begin{array}{l}\angle BCE = \angle BAE = \alpha\\ \angle CBE = \angle EAC = \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow BE = EC$

$BE = 2R\sin\alpha = 2\cdot\frac{3\sqrt5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{3\sqrt5}{\sqrt6} = 3\sqrt{\frac{5}{6}} = EC$

$S(\triangle EBC) = \frac{1}{2}\cdot EB\cdot BC\cdot\sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot3\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot5\cdot\frac{1}{\sqrt6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{5\sqrt5}{6} = \frac{5\sqrt5}{4}$

$S(\triangle BCA) = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC = \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{1/\sqrt5} = 5\sqrt5\cdot\frac{2}{2} =$

$= 5\sqrt5$

$S(ACEB) = S(\triangle EBC) + S(\triangle BCA) =$

$= \frac{1}{4}5\sqrt5 + 5\sqrt5 = \frac{5\cdot5\sqrt5}{4} = \frac{25\sqrt5}{4}$

№16

$8x - 6|2x-1| \le -8x^2 + 6x + 7$

следствие из условия

$8x^2 + 2x + 7 - 6|2x-1| \le 0$

1) $x \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 \ge 0$:

$8x^2 + 2x + 7 - 12x + 6 \le 0$

$8x^2 - 10x + 13 \le 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 8 \cdot 13 < 0 \Rightarrow (8 > 0) \Rightarrow$ нет корн.

2) $x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 < 0$;

$8x^2 + 2x + 7 + 12x - 6 \le 0$

$8x^2 + 14x + 1 \le 0$

$\frac{D}{4} = 49 - 8 = 41$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{8} = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{41}}{8}$

$x \in \left(-\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{41}}{8}; -\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{41}}{8}\right) \cap \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

очевидно $-\frac{7}{8} + \frac{\sqrt{41}}{8} < 0 < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{41}}{8} - \frac{7}{8}\right)$

См. след стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1|=-8x^2+6x+7$ – хочу найти корни.

$8x^2+2x-7-6|2x-1|=0$

1) $x\geq\frac{1}{2}$:

$8x^2+2x-7-12x+6=0$

$8x^2-10x-1=0$

$\frac{D}{4}=25+8=33 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{8}$

$\frac{5-\sqrt{33}}{8}<\frac{5-5}{8}=0<\frac{1}{2}$

$\frac{5+\sqrt{33}}{8}>\frac{5+5}{8}>1$ – не попадает на интер. $[-\frac{1}{2};1]$

2) $x<\frac{1}{2}$:

$8x^2+2x-7+12x-6=0$

$8x^2+14x-13=0$

$\frac{D}{4}=49+8\cdot13=49+80+24=50+80+23=153$

$x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{153}}{8}$, $\frac{-7-\sqrt{153}}{8}<\frac{-7-10}{8}<-1<-\frac{1}{2}$

$\frac{-7+\sqrt{153}}{8}>\frac{-7+12}{8}=\frac{5}{8}>\frac{1}{2}$

№7

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

$f(2) = 1 \Rightarrow f(2x) = f(x) + 1$

$f(3) = 1 \Rightarrow f(3x) = f(x) + 1$

$f(5) = 2 \Rightarrow f(5x) = f(x) + 2$

$f(7) = 3 \Rightarrow f(7x) = f(x) + 3$

$f(11) = 5 \Rightarrow f(11x) = f(x) + 5$

$f(13) = 6 \Rightarrow f(13x) = f(x) + 6$

$f(17) = 8 \Rightarrow f(17x) = f(x) + 8$

$f(19) = 9 \Rightarrow f(19x) = f(x) + 9$

$f(23) = 11 \Rightarrow f(23x) = f(x) + 11$

$f(3x) = f(2x) \Rightarrow f(6) = f(4)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(x \cdot \frac{y}{y}\right) = f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

т.е. нужно найти кол-во пар (x, y):

$f(x) \neq f(y)$; $f(n^k) = k f(n)$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2$

$f(6) = f(3 \cdot 2) = f(3) + f(2) = 2$

$f(8) = f(2 \cdot 2 \cdot 2) = 3$

$f(9) = f(3^2) = 1 + 1 = 2$

$f(10) = f(5 \cdot 2) = f(5) + f(2) = 2 + 1 = 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(11)=5$

$f(12)=f(3\cdot 4)=1+2=3$

$f(13)=6$

$f(14)=f(2)+f(7)=1+3=4$

$f(15)=f(3)+f(5)=1+2=3$

$f(16)=f(4^2)=2f(4)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=f(2)+f(9)=1+2=3$

$f(19)=9$

$f(20)=2f(2)+f(5)=2+2=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=1+3=4$

$f(22)=f(2)+f(11)=6$

X	~~1~~	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(x)	~~1~~	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5
X	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
f(x)	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

$x=2$: ~~11~~ 19 в-анф для y

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$x = 3$ − 19 в-ант

$x = 4$ − ~~19~~ 15 в-ов

$x = 5$ − ~~19~~ 15 в-ов

$x = 6$ − ~~19~~ 15 в-ов

$x \in \{7; 8; 10; 12; 15; 18\}$ − ~~(...)~~ = ~~15~~ 9 в-ов

$x \in \{14, 16, 20, 21\}$ − ~~(...)~~ = ~~8~~ 5 в-ов (всм для каждого x)

$x \in \{11\}$ − ~~1~~ 4 варианта

$x \in \{13, 22\}$ − ~~0~~ 1 вариант

$x = 19$ − 0 в-ов.

~~19 + 19 + 15 + 15 + 9 + 5 + 4 + 9 + 19 = ответ~~

$19 + 19 + 15 + 15 + 15 + 9 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 + 1 =$

$=$ ответ $= 38 + 45 + 54 + 20 + 5 =$

$= 38 + 45 + 54 + 25 = 38 + 70 + 45 =$

$= 135 + 38 = 173$

Ответ: 173 пары

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 – черновик.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}=\sqrt{y(x-6)-(x-6)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad (+36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2-2\cdot 6x+6^2+(\sqrt{2}y)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}y)+\sqrt{2}^2+18=36 \end{cases}$$

$$\cancel{(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2+18=0}$$

$$x^2-2\cdot 6x+(\sqrt{2}y)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}y)+\sqrt{2}^2+18=0$$

$$(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2=18=(3\sqrt{2})^2$$

$$\cancel{(x-6)\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-1\right)\geq 0}$$

с ОДЗ: $x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

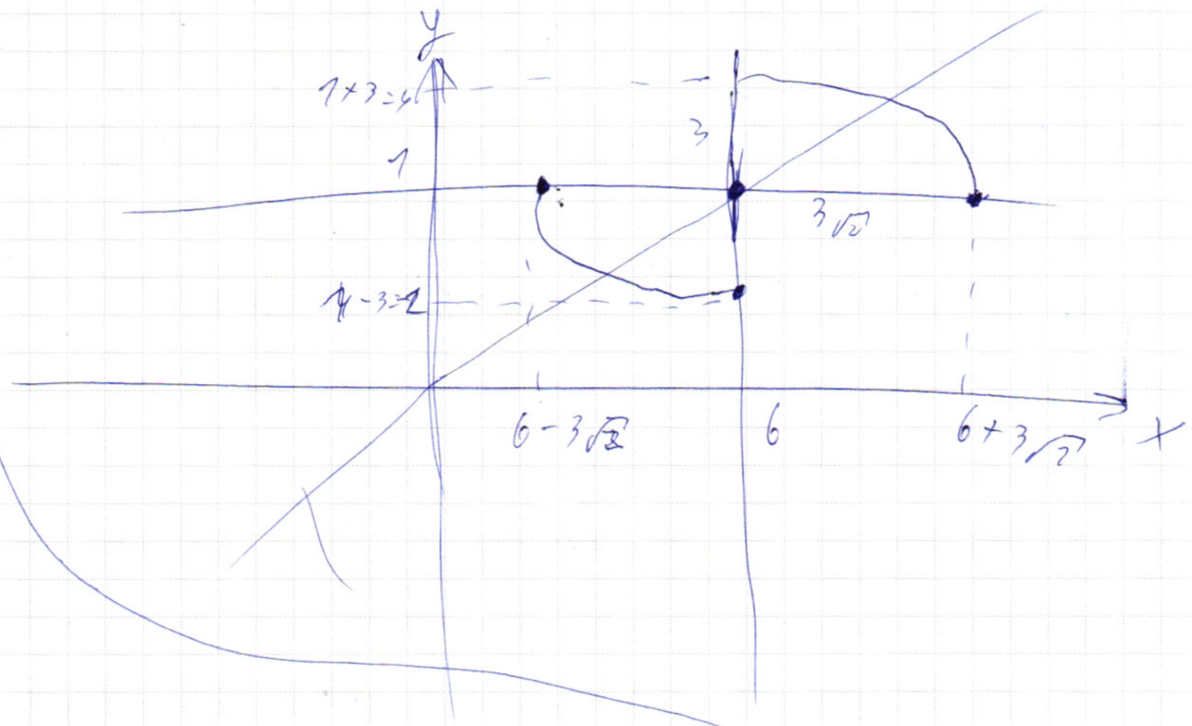
$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$ и :

$(x-6)^2 + (\sqrt{2}y - \sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^2$

$$\frac{(x-6)^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

Эллипс с $a = 3\sqrt{2}$, $b = 3$ центром в $(6, 1)$



$x^2 + 2y^2 = 12x + 4y - 20$

$(x^2 + 2y^2) - 13xy + 34y^2 + 6y + x - 6 = 0$

$12x + 4y - 20 - 13xy + 34y^2 + 6y + x - 6 = 0$

$13x - 13xy + 10y - 26 + 34y^2 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 & (1) \\ x^2+x-13xy+36y^2+6y-6=0. & (1) \end{cases}$$

$(2): x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0.$

~~$D=144$~~

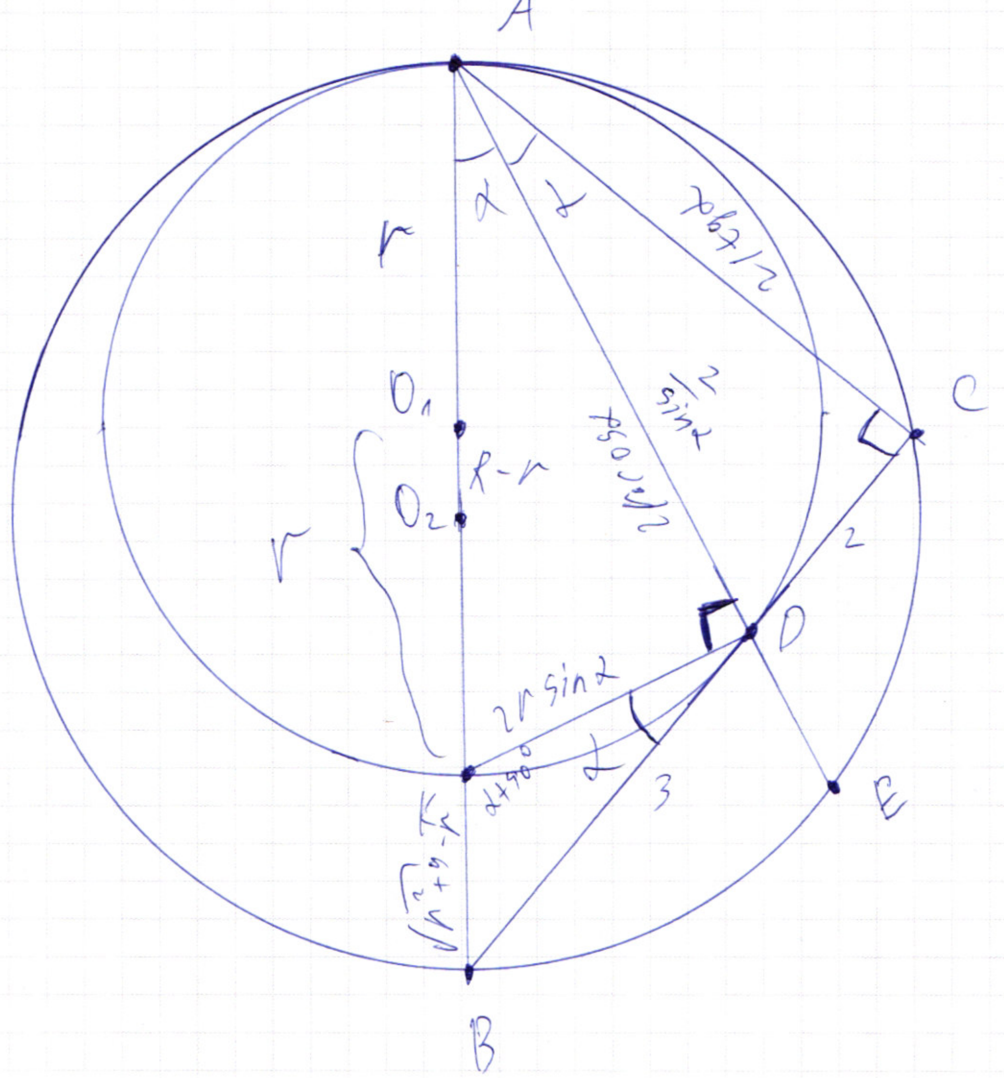
$\frac{D}{4}=36-2y^2+4y-20=-2y^2+4y+14$

$\frac{D}{4}=4-(-2)\cdot 14 = 32=(4\sqrt{2})^2$

~~$(1): 36y^2-y(13x-6)+(x-6)=0.$~~

$y_{1,2}=\frac{-2\pm 4\sqrt{2}}{-2}=1\pm 2\sqrt{2}$

$$\frac{2}{\sin\alpha} = 2r\cos\alpha \Rightarrow 2 = r\sin(2\alpha)$$



$$BK\cdot(BK+2r)=3^2$$

$$BK^2+2rBK-9=0$$

$$BK=\frac{-\cancel{2}r+\sqrt{\cancel{4}r^2+9}}{\cancel{2}}=\sqrt{r^2+9}-r$$

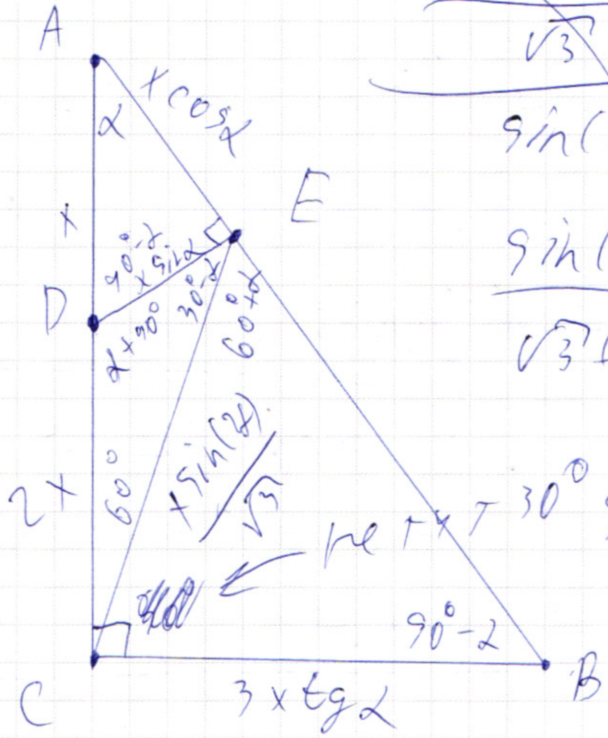
$$90^0+\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{CE}}{2}=\frac{180^0+\overset{\frown}{CE}}{2}=90^0+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}\Rightarrow\angle EAC=\alpha$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{\frac{x\sin(2\alpha)}{\sqrt{3}}}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{3x\,tg\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}$$

$$\frac{\sin(2\alpha)}{\sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha\,\sin(60^\circ+\alpha)}$$

$$\sin(2\alpha) = 3\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}$$

$$2\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{\sin(60^\circ+\alpha)}$$

~~из подобия~~ $\frac{\sin}{\cancel{\cos}}(\alpha) = \frac{DE}{x} \Rightarrow DE = x\sin\alpha$

$$\frac{DE}{CB} = \frac{AC}{}$$

$$\frac{CE}{\sin\cancel{\alpha}} = \frac{A\cancel{D}E}{\sin(60^\circ)}$$

$$CE = \frac{AE\cdot\sin\alpha}{\sin(60^\circ)} = \frac{x\cos\alpha\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x\sin2\alpha}{\sqrt{3}}$$

Черновик $f(2x) = f(x)+1$

$f(3x) = f(x)+1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(2x) = f(3x)$

$f\left(a\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) < 0$

$f(x\cdot 2) = f(x) + f(2) = f(x)+1$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(5x) = f(x) + 2 = f(3x)+1 =$

$= \cancel{f(3x)}\ f(3x)+$

$8\cdot 0 - 6 \le a+b \le 7$

$4 \le ax+b \le a\frac{1}{2}+b \le -2+3+7 = 8$

$8-6 \le a+b \le$

~~$f(1) = f(2) = f(4) = f(8) = f(16) = f(32)$~~

~~$f(1) \le f$~~

$f(2) = f(3)$

$f(4) = f(6)$

$f(6) = f(9)$

$f(8) = f(12)$

$f(10) = f(15)$

$f(12) = f(18) = f(8)$

$8x - 6|2x-1| \le -8x^2+6x+7$

$8x^2+2x-6|2x-1|-7 \le 0.$

1) $x \ge \frac{1}{2}$:

$8x^2 - 10x - 13 \le 0.$

$D = 10^2 + 4\cdot 8\cdot 13 > 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2=12x+4y-20 \end{cases}$$

$$34y^2-12xy+12x+4y-20=xy-6y-x+6$$

$$34y^2-13xy+13x+10y-26=0$$

$$34y^2-13x(y-1)+10y-26=0$$

$$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$$

$$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$$

$$20=12x+4y-x^2-2y^2 \quad \left(\cdot\frac{6}{20}\right)$$

$$6=\frac{6\cdot 12}{20}x+\frac{4\cdot 6}{20}y-\frac{6}{20}x^2-\frac{6\cdot 2}{20}y^2$$

$$6=\frac{18}{5}x+\frac{6}{5}y-\frac{3}{10}x^2-\frac{3}{5}y^2$$

$$-6=-\frac{18}{5}x-\frac{6}{5}y+\frac{3}{10}x^2+\frac{3}{5}y^2$$

$$x^2-13xy+36y^2+6y+x-\frac{18}{5}x-\frac{12}{5}y+\frac{3}{10}x^2+\frac{3}{5}y^2=0$$

$$10x^2-130xy+360y^2+60y+10x-36x-24y+3x^2+6y^2=0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 – черновик

пусть q – шаг прогрессии

a – 1-ый член

$b = a \cdot q$ – 2-ой член

$c = a \cdot q^2$ – 3-ий член

d – 4-ый член $\Rightarrow d = a \cdot q^3$ и

$a \cdot d^2 - 2bd + c = 0$

$a \cdot a^2q^6 - 2 \cdot aq \cdot aq^3 + a \cdot q^2 = 0$

$a^3q^6 - 2a^2q^4 + a \cdot q^2 = 0$

~~$aq(aq - 2aq^2 + 1) = 0$~~

$t = a \cdot q^2 \Rightarrow t^3 - 2t^2 + t = 0$

$t(t^2 - 2t + 1) = 0$

$t(t-1)^2 = 0$

заметим, что если $t = 0$, то

$d = a \cdot q^3 = a \cdot q^2 \cdot q = 0$ $t = 0$ или $t = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

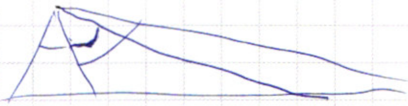
(Поставьте галочку в нужном поле)

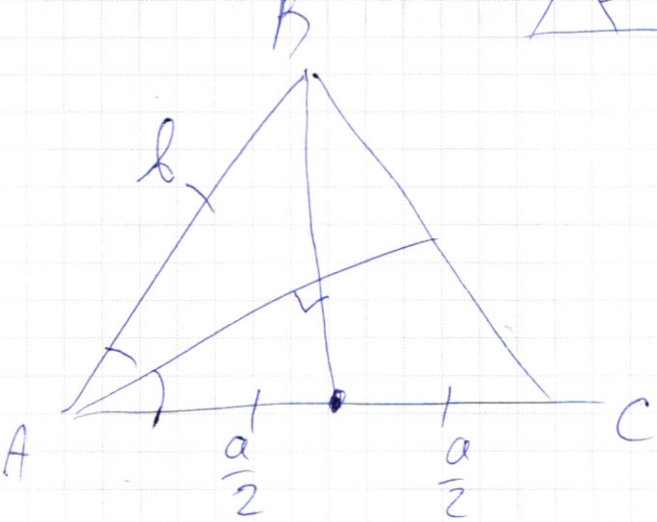
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 – черновик

$a+b+c=900$, $a, b, c \in \mathbb{N}$





$b = \frac{a}{2} \Rightarrow a \vdots 2$ и $b = \frac{a}{2}$

$a + \frac{a}{2} + c = 900$

$\frac{3a}{2} + c = 900$

$a = 2k \Rightarrow 3k + c = 900$

$k \in \{1, 2, \ldots, 299\}$

для каждого такого k $\exists!$ c задающее Δ-ик.

$(2, 4, 3)$ – 

$(3, 4, 2)$ –