МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c - члены геометрической прогрессии, значит $b^2 = ac$;

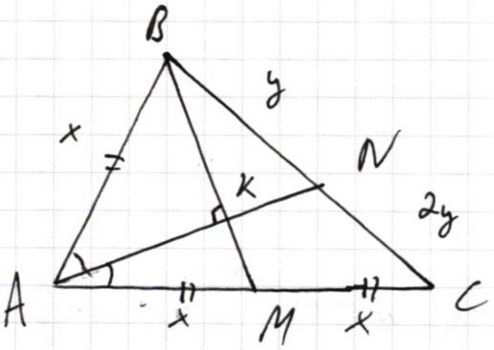
$ax^2 - 2bx + c = 0$; $\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$, значит

$x_1 = \frac{b}{a}$ - четвертый член прогрессии, тогда

$c^2 = b \cdot \frac{b}{a}$; $b^2 = ac^2$, значит $ac = ac^2$; $ac(c-1) = 0$,

значит $c = 0$ или $c = 1$

Ответ: 0 или 1



№2

Пусть в $\triangle ABC$ AN - биссектриса, BM - медиана, $BM \perp AN$, $BM \cap AN = K$

в $\triangle ABM$ AK - биссектриса и высота, значит $\triangle ABM$ - равнобедренный,

$AM = AB$; по свойству биссектрисы $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

Обозначим стороны: $AB = x$; $AC = 2x$; $BC = 3y$,

$x \in \mathbb{N}$, зн. $2x \in \mathbb{N}$, $P_{ABC} = 3(x+y) = 500$; $x+y = 300$;

$y = 300 - x$, значит $y \in \mathbb{N}$.

из неравенства треугольника: $\begin{cases} BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases}$, $AB < AC + BC$ - выполняется всегда т.к. $AC > AB$.

$\begin{cases} 3y < 3x \\ 2x < 3y + x \end{cases}$; $\begin{cases} y < x \\ x < 3y \end{cases}$

$y < x < 3y$; $x = 300 - y$; $y < 300 - y < 3y$

$2y < 300 < 4y$

$y < 150 < 2y$, $y \in \mathbb{N}$, $y_{max} = 150 - 1 = 149$.

$y_{min} = 76$, т.к. $2 \cdot 76 = 152$, $76 < 150 < 152$

y может быть от 76 до 149, $149 + 1 - 76 = 74$ варианта, $x = 300 - y$, x определяется однозначно, а зная значение y определяется стороны треугольника. Количество треугольников, подходящих под условие задачи, 74.

Ответ: 74

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} \\ (x^2 - 12x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x-6} = A$; $\sqrt{y-1} = B$, $A \geq 0$, $B \geq 0$,

$x = A^2 + 6$; $y = B^2 + 1$; $x - 6y = A^2 + 6 - 6B^2 - 6 = A^2 - 6B^2$

$$\begin{cases} A^2 - 6B^2 = AB \\ A^4 + 2B^4 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A^2 - AB - 6B^2 = 0 \quad (*) \\ A^4 + 2B^4 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 3B \\ 81B^4 + 2B^4 = 18 \end{cases}$$

$(*)$ $A^2 - AB - 6B^2 = 0$

$D = B^2 + 24B^2 = 25B^2$

$$\left[\begin{array}{l} A = \frac{B + 5B}{2} = 3B \\ A = \frac{B - 5B}{2} = -2B, \ B \geq 0, \text{ значит} \end{array}\right.$$

$-2B \leq 0$, но $A \geq 0$, значит $A \neq -2B$.

$$\begin{cases} A = 3B \\ B = \sqrt[4]{\frac{18}{83}} \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3\sqrt[4]{\frac{18}{83}} \\ B = \sqrt[4]{\frac{18}{83}} \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y - 1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

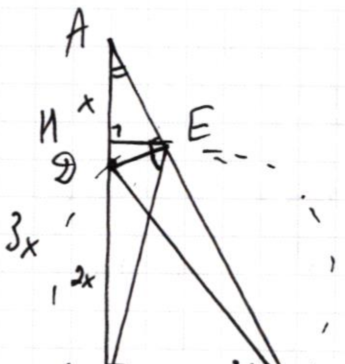
$$\begin{cases} x = 6 + \dfrac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ y = 1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 + \dfrac{2241\sqrt{166}}{83} \\ y = 1 + \dfrac{249\sqrt{166}}{83} \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-6)(y-1)} \iff \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-6}\cdot\sqrt{y-1} \\ \sqrt{6-x}\cdot\sqrt{1-y} \end{array}\right.$$, тогда

$$\begin{cases} x = 6 - \dfrac{2241\sqrt{166}}{83} \\ y = 1 - \dfrac{249\sqrt{166}}{83} \end{cases}$$

Ответ: $\left(6 - \dfrac{2241\sqrt{166}}{83}; 1 - \dfrac{249\sqrt{166}}{83}\right)$ или $\left(6 + \dfrac{2241\sqrt{166}}{83}; 1 + \dfrac{249\sqrt{166}}{83}\right)$

№4



Дано: $\triangle ABC$ − прямоугольный, $\angle C = 90°$; $D \in AC$; $AD : AC = 1:3$; $E \in AB$; $DE \perp AB$; $\angle CED = 30°$; $AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg\angle BAC$

б) $S_{\triangle CED}$

Решение:

а) Заметим, что $\angle DEB = 90°$, т.к. $DE \perp AB$; $\angle DCB = 90°$, т.к. $\triangle ABC$ − прямоугольный, значит около четырехугольника $DEBC$ можно описать окружность; ~~$\angle CAB$ пересекает эту окружность~~ $\angle DEC = \angle DBC = 30°$ как углы, опирающиеся на одну $\cup DC$, $\triangle DBC$ − прямоугольный; $CB = ctg\,30° \cdot DC = \sqrt{3}\cdot 2x = 2\sqrt{3}x$

Тогда из $\triangle ABC$ $\quad tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ по двум углам, $\angle ACB = \angle AED = 90°$;

$\angle A$ - общий; $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$; по т. Пифагора для $\triangle ABC$

$AB = \sqrt{CB^2 + AC^2} = \sqrt{12x^2 + 9x^2} = \sqrt{21}x$;

$\frac{\sqrt{21}x}{x} = \frac{3x}{AE}$; $AE = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Проведем $EH \perp AC$, тогда $\triangle AEH \sim \triangle ABC$ по двум углам, $\angle A$ - общий; $\angle AHE = \angle ACB = 90°$;

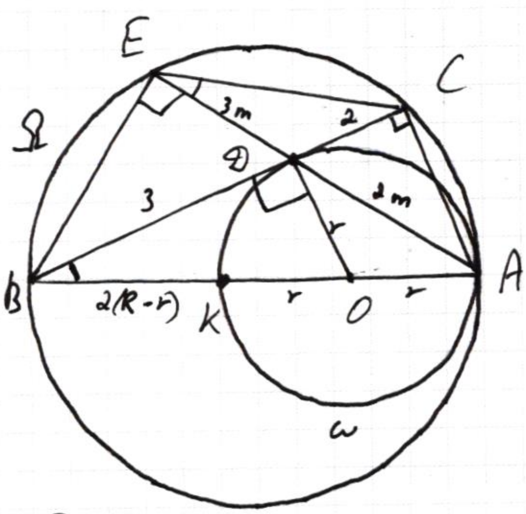
$\frac{AE}{AB} = \frac{HE}{CB}$; $\frac{\cancel{\sqrt{21}}\cancel{x}}{7\cdot\cancel{\sqrt{21}}\cancel{x}} = \frac{HE}{2\sqrt{3}x}$; $HE = \frac{2\sqrt{3}}{7}x$

По условию $AC = \sqrt{7}$, $AC = 3x$, тогда $x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2}\cdot EH \cdot DC = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{\cancel{7}}\cdot\frac{\cancel{7}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

№5.



Дано: окружности Ω и ω касаются в т. A внутренним образом. AB - диаметр Ω, хорда BC касается ω в т. D; $AD \cap \Omega = E$; $CD = 2$; $BD = 3$

Найти: R, r (радиусы Ω и ω соответственно); S_{BACE}

Решение:

Отметим т. O - центр ω и т K, $BA \cap \omega = K$.

BA - диаметр Ω, те $BA = 2R$; тогда AK - диаметр ω, $AK = 2\omega$; $BO = 2R - r$; $r = DO$ - радиус, проведенный в точку касания, BD - касательная, тогда $\angle BDO = 90°$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BDO$ – прямоугольный, по т. Пифагора: $BO^2 = DO^2 + BD^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + 9$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0 \quad (1)$

BA - диаметр Ω, тогда $\angle BCA = 90°$ - как вписанный, опирающийся на $\cup BA$; $\triangle BCA$ – прямоугольный,

$\triangle BCA \sim \triangle BDO$ – по двум углам, т.к. $\angle BDO = \angle BCA = 90°$; $\angle DBO$ – общий.;

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA}$; $\frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2(R+r)}$; $10R - 5r = 6R + 6r$

$r = \frac{4}{11}R$, подставляем в (1),

$9 = 4R^2 - \frac{16}{11}R^2$

$99 = (44-16)R^2$

$R = \sqrt{\frac{9 \cdot 11}{4 \cdot 7}} = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{77}}{14}$

$r = \frac{4}{11}R = \frac{\cancel{12}^{6}\sqrt{77}}{11 \cdot \cancel{14}_{7}} = \frac{6\sqrt{77}}{77}$

Из подобия $\triangle BCA$ и $\triangle BDO$ $CA = \frac{5}{3}r = \frac{30\sqrt{77}}{3 \cdot 77} = \frac{10\sqrt{77}}{77}$

$S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{10\sqrt{77}}{77} = \frac{25\sqrt{77}}{77}$. $S_{\triangle DCA} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{10\sqrt{77}}{77} = \frac{10\sqrt{77}}{77}$.

$S_{\triangle BDA} = S_{\triangle BCA} - S_{\triangle DCA} = \frac{(25-10)\sqrt{77}}{77} = \frac{15\sqrt{77}}{77}$.

$\triangle BDA \sim \triangle ECD$ – по двум углам $\angle EDC = \angle BDA$ - как вертикальные; $\angle CEA = \angle CBA$ - как вписанные, опирающиеся на одну $\cup CA$; $BD : DC = 3:2$. $S_{\triangle EDC} : S_{\triangle BDA} = 4 : 9$.

$S_{\triangle DEC} = \frac{4}{\cancel{9}_{3}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}\sqrt{77}}{77} = \frac{20\sqrt{77}}{3\cdot 77}$

$\triangle BED \sim \triangle CAD$ по двум углам $\angle BDE = \angle CDA$ – как вертикальные, $\angle BED = \angle BCA = 50^\circ$ – как вписанные опирающиеся на $\cup BA$;

$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle DCA}} = \frac{9}{4}$; $S_{\triangle BED} = \frac{9}{4} \cdot \frac{10\sqrt{77}}{77} = \frac{45\sqrt{77}}{2\cdot 77}$

$S_{BECA} = \frac{45\sqrt{77}}{2\cdot 77} + \frac{20\sqrt{77}}{3\cdot 77} + \frac{10\sqrt{77}}{77} = \frac{(135+40+60)\sqrt{77}}{6\cdot 77} =$

$= \frac{235\sqrt{77}}{462}$

Ответ: 1) $\frac{3\sqrt{77}}{14}$; $\frac{6\sqrt{77}}{77}$; 2) $\frac{235\sqrt{77}}{462}$

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Построим график $f(x) = 8x - 6|2x-1|$,

$f(x) = \begin{cases} -4x+6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$ $f(\frac{1}{2}) = 4$; $f(1) = 2$; $f(0) = -6$

Построим $g(x) = -8x^2+6x+7$; – парабола с ветвями вниз, $x_0 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$; $y_0 = -\frac{9}{8} + \frac{6\cdot 3}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$.

$g(1) = -8+6+7 = 5$; $g(-\frac{1}{2}) = -2-3+7 = 2$.

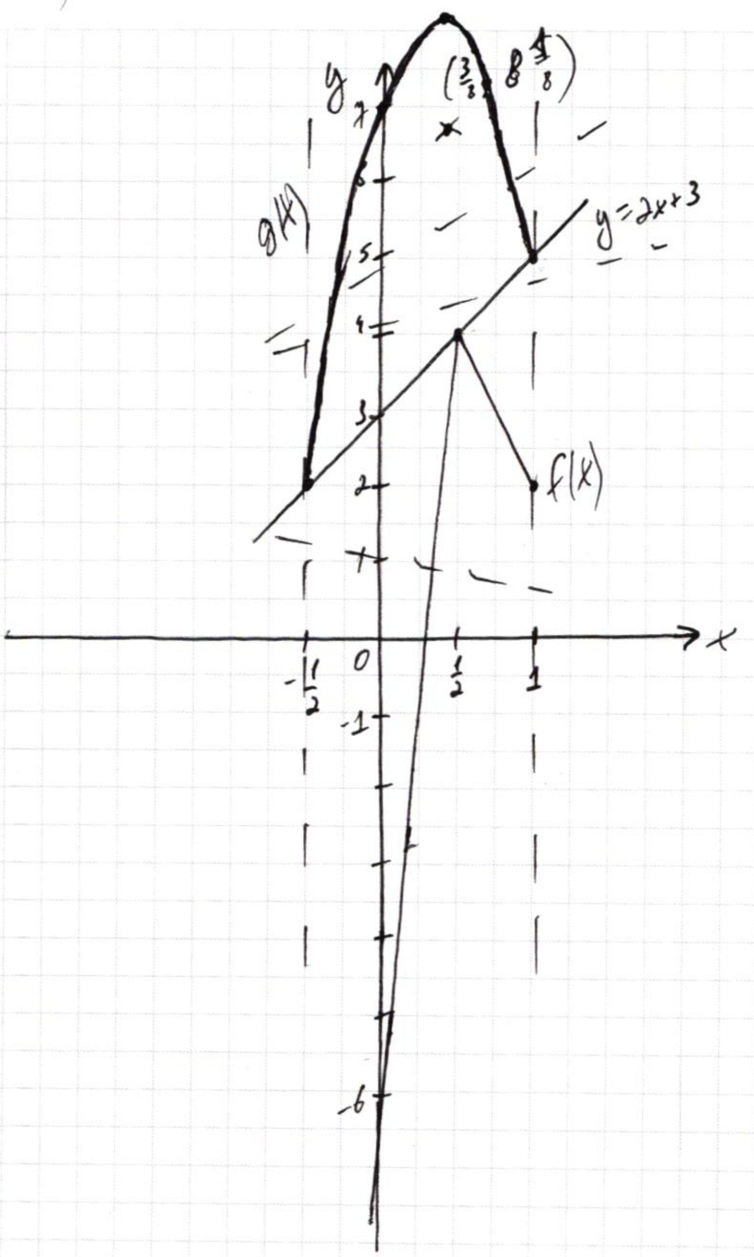
$g(0) = 7$

Прямая $y = ax+b$ должна быть ниже всех точек графика функции $f(x)$ и выше графика функции $g(x)$, может иметь общие точки с $f(x)$ и $g(x)$.

Проведем такую прямую и заметим что ~~ни одна точка прямой не может быть выше~~

$y(-\frac{1}{2}) \le 2$; $y(1) \le 5$, но $y(\frac{1}{2}) \ge 4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Однако точки $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, $(1; 5)$ и $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ лежат на одной прямой $y = 2x+3$, тогда также возможно только с ~~это~~ прямой $y=2x+3$, т.е. $a=2$; $b=3$.

Ответ: $(2; 3)$.

№7.

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

Пусть $a = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$; $b = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_k$, где $a_1, \ldots, a_n$ – простые числа; $b_1, \ldots b_n$ – простые числа, тогда

$$f(a_1 \cdot (a_2 \ldots a_n)) = \left[\frac{a_1}{2}\right] + f(a_2 \cdot (a_3 \ldots a_n)) = \ldots = \left[\frac{a_1}{2}\right] + \left[\frac{a_2}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{a_n}{2}\right] = \frac{a_1 + \ldots + a_n - n}{2}$$

$$f(ab) = \frac{(a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_k) - n - k}{2}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b^2=ac$; $ax^2-2bx+c=0$; $c-?$

$x_1=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\dfrac{b}{a}$

$ac=ac^2$

$ac(1-c)=0$

$a, b, c, \frac{b}{a}$ – прогрессия геометрическая, $c^2=\frac{b\cdot b}{a}$, $c=\pm b$;

1. Прогрессия или c, b, c, b, где $c=-b$, т.е. $c; -c; c; -c$.

2. или c, c, c, c, тогда

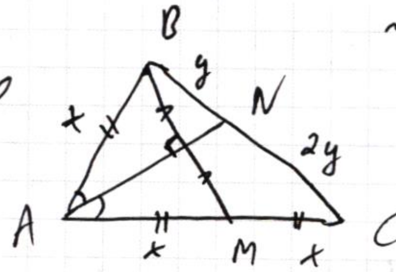
1. $cx^2+2cx+c=0$; $x^2+2x+1=0$; $x=-1$, т.е. $b=-1$; $c=+1$

2. $cx^2-2cx+c=0$; $x^2-2x+1=0$; $x=b=c=1$.

Ответ: 1.

№2.

$p=300$



$3(x+y)=300$; $x+y=300$

$\begin{cases}3y<3x\\2x<3y+x\end{cases}$ $\begin{cases}y<x\\x<3y\end{cases}$ $y<x<3y$

$\begin{cases}x+y=300\\y<x<3y\end{cases}$

$x\in N$, т.к. $x=AB$; $x+y=300$; $y=300-x$ $y\in N$.

$y<300-y<3y$

$2y<300<4y$

$y<150<2y$

$\underset{y_{max}}{149}<150<2y$; $y<150<152$, $76=y_{min}$

Кол-во Δ:

$149-76+1=150-76=74$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x(y-1)-6(y-1)=(x-6)(y-1)$

$(x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)+\cancel{8}-28=0$

$\sqrt{x-6}=A,\ A\geq 0$

$\sqrt{y-1}=B,\ B\geq 0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$$\begin{cases} \cancel{x-6y}=AB\cancel{A^2(B^2-2B)} \\ A^4+2B^4=18 \end{cases}$$

$\cancel{(B^2+1)A^2=(x-6)(y-1+1)}$

$x=A^2+6$

$y=B^2+1;\ -6y=-6B^2-1$

$$\begin{cases} A^2+\cancel{6}-6B^2-\cancel{6}=AB \\ A^4+2B^4=18 \end{cases}$$

$A^2-AB-6B^2$

$$\begin{cases} A^2-6B^2-AB=0 \\ A^4+2B^4=18 \end{cases}$$

$D=B^2+24B^2=25B^2$

$$\left[\begin{aligned} A&=\frac{B+5B}{2}=3B \\ A&=\frac{B-5B}{2}=-2B\ \times \end{aligned}\right.$$

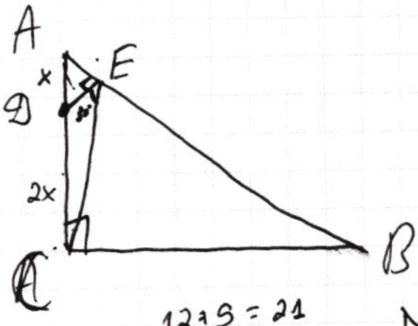
$$\begin{cases} A=3B \\ 81B^4+2B^4=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 83B^4=18 \\ A=3B \end{cases} \qquad \begin{cases} B^4=\frac{18}{83} \\ A=3B \end{cases} \qquad \begin{cases} B^2=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} \\ A^2=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}} \end{cases}$$

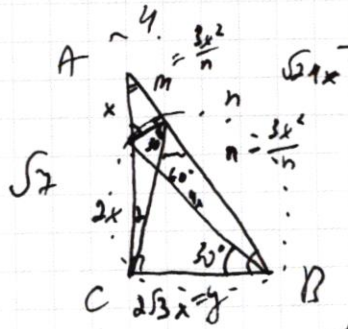
$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ 27 \\ \hline 581 \\ 166\ \ \\ \hline 2241 \end{array}$$

$x=6+\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}};\quad y=1+\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}$

~4



12+9=21



$\cancel{30+\alpha=180-60-(50-\alpha)}$

$\frac{m}{3x}=\frac{\cancel{x}}{n}=\frac{e}{y}$

$\cancel{\frac{m}{n}=\frac{3}{4}}$

$mn=3x^2$

$m=\frac{3x^2}{n}$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13\ \end{array}$

$tg30°=\frac{2x}{CB}$

$CB=$

$tg=\frac{2\sqrt3}{3}$

$\frac{\sqrt{21}}{4}=\frac{3}{m}$

$m=\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{21}}{21}=\frac{2\sqrt7}{3}$

$=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$h=\frac{2\sqrt3}{3}$

$S=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}\sqrt3}{3}\cdot\frac{2\sqrt7}{3}=$

$=\frac{2\sqrt{21}}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

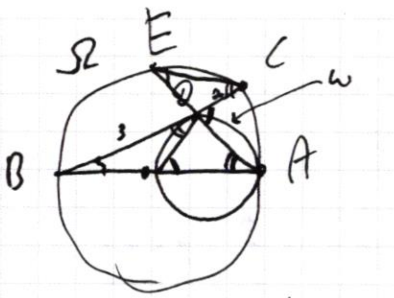
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

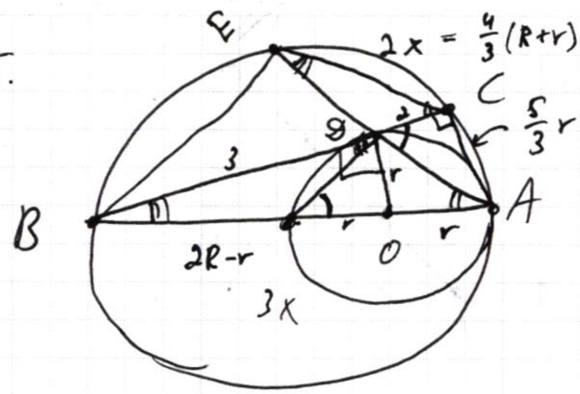
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~5.

$6 = E\mathcal{D} \cdot \mathcal{D}A$



$(2R-r)^2 = r^2 + 9$

$4R^2 + \cancel{r^2} - 4Rr = \cancel{r^2} + 9$

$4R^2 - 4Rr - 9 = 0.$

$9 = 2(R-r) \cdot 2R$

$9 = 4R^2 - 4rR$

$4(R+r)^2 = 25 + \frac{25}{9}r^2$

$4R^2 + 8Rr + 4r^2 = 25 + \frac{25}{9}r^2$

$36R^2 + 72Rr + 36r^2 - 25r^2 = 25 \cdot 9.$

$36R^2 + 72Rr + 11r^2 -$

$\frac{2R-r}{2(R+r)} = \frac{3}{5}.$

$10R - 5r = 6R + 6r$

$4R = 11r$

$r = \frac{4}{11}R$

$9 = 4R^2 - \frac{16}{11}R^2$

$9 = \frac{(44-16)R^2}{11}$

$99 = 28R^2$

$R = \sqrt{\frac{9 \cdot 11}{4 \cdot 7}} = \frac{3\sqrt{11}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{77}}{14}$; $r = \frac{\cancel{4} \cdot 3\sqrt{77}}{11 \cdot \cancel{14}} = \frac{6\sqrt{77}}{77}$

$\frac{3}{3k} = \frac{2k}{2}$

$\frac{3}{5} = \frac{r}{x}$

$77 \times 6 = 462$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

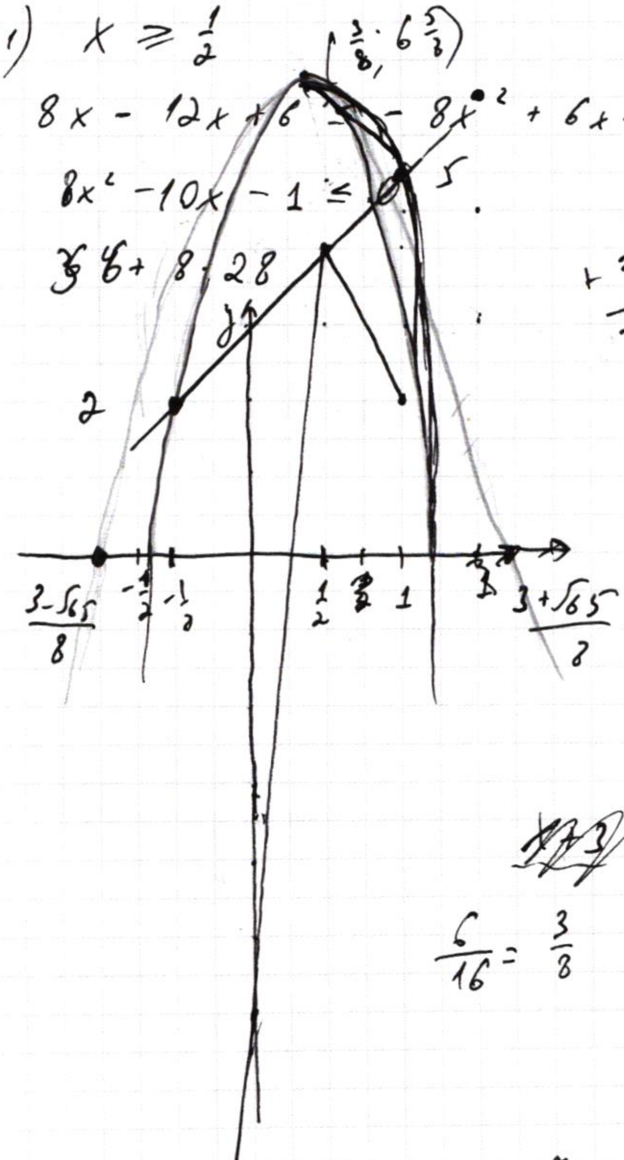
№6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$; $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

1) $x \ge \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 - 10x - 1 \le 0$



$-4x+6$, $x \ge \frac{1}{2}$

$20x - 6$, $x < \frac{1}{2}$

$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$-\frac{9}{8} + \frac{36}{8} + 7 = +\frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$

$9 + 56 = 65$

$\frac{-3 \pm \sqrt{65}}{-8} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$

$-8 + 6 + 7 = 5$

$-2 - 3 + 7 = -5 + 7 = 2$

$2 = -\frac{1}{2} \cdot a + b$

$5 = a + b$

$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$1{,}5a = 3$

$\boxed{a = 2 \quad b = 3}$

№7

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = [\frac{p}{2}] = \frac{p}{2} - 0{,}5$, p – прост. ч.

$2 \le x \le 22$ 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19, $2\cdot2\cdot5$, $3\cdot7$, $11\cdot2$.

$2 \le y \le 22$ $2\cdot2$, $2\cdot3$, $2\cdot2\cdot2$, $2\cdot5$, $2\cdot2\cdot3$, $2\cdot7$, $3\cdot5$, $3\cdot2\cdot3$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(ab) = f(a) + f(b) = f(a_1 \cdot a_2) + f(b_1 \cdot b_2) = \frac{a_1}{2} - 0{,}5 + \frac{b_2}{2} - 0{,}5 + \ldots + \frac{a_n}{2} - 0{,}5 = \frac{(a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)}{2} - n$

$f(\frac{x}{y}) = \frac{x_1 + \ldots + x_n - n}{2} + f(\frac{1}{y})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)