МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$a, b, c, \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a} \quad \left(\frac{D}{2}\right)$

по св-ву геометр. прогрессии

$a\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}\right) = bc$

$(b \pm \sqrt{b^2-ac}) = bc$ => для любых b, c

$\sqrt{b^2-ac} = bc - b$ $[bc-b \geq 0$ или $-\sqrt{b^2-ac} = bc-b$ => $[bc-b<0$

$b^2-ac = b^2(c^2-2c+1)$

$b^2(c^2-2c) = -ac$ или $c=0$

$b^2(c-2) = -a$

$c = -\frac{a}{b^2}+a$

Ответ: $c=0$ или $c = -\frac{a}{b^2}+a$

☐ черновик ☑ чистовик

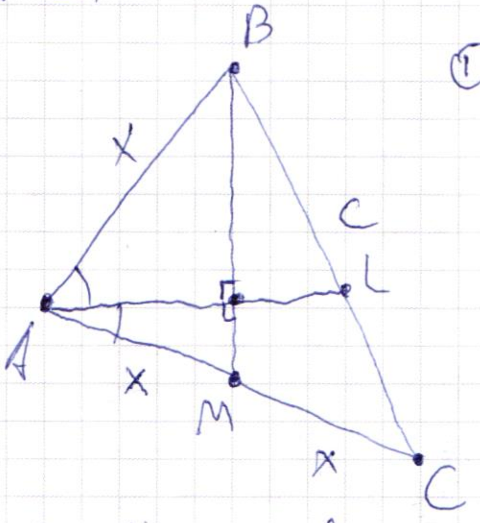
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.



① Пусть в $\triangle ABC$: AL - бис-са ; BM - медиана и $AL \perp BM$.
Пусть $AM = MC = x$, Тогда в $\triangle ABM$ - бис-са (очевидно) совпадая с высотой => по св-ву: ABM - р/б треугольник
<=> $AM = AB$.

② Пусть $BC = c$, тогда периметр $= 3x + c$

③ Найдём кол-во таких треугольников с $p = 3x + c$
Тогда по нер-ву треугольника: $\begin{cases} 3x > c \\ x + c > 2x \\ 2x + c > x \end{cases}$ (что выполн. при любых положительных c)

$p = 3x + c$

<=> $\begin{cases} c > x \\ c < 3x \end{cases}$ <=> $\begin{cases} p > 4x \\ p < 6x \end{cases}$ и $p = 900$

=> $4x < 900 < 6x$

<=> $150 < x < 225$ => всего возможных x: ~~75~~ $(225 - 150) - 2 = 73$ (крайние не считаются)

у уравнения $900 = 3x + c$, при $\forall x$ есть одно решение (линейное)
=> для $\forall x \ \exists c: 3x + c = 900$ => всего вариантов 73.

Ответ: 73

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Пусть $a = x - 6$, $b = y - 1$ => $x - 6y = x - 6 - 6y + 6 = a - 6b$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ ab=a^2-12ab+36b^2 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a\geq 6b \\ a^2-13ab+36b^2=0 \quad (1) \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(1) отн-о a: $D = 13^2b^2-4\cdot 36\cdot 1\cdot b^2 = 25b^2$

$\Rightarrow a = \dfrac{13b\pm\sqrt{D}}{2} = \dfrac{13b\pm 5b}{2} = \begin{cases} \to 9b \\ \to 4b \text{ (не подходит, т.к. } a\geq 6b) \end{cases}$

$\Rightarrow a=9b$

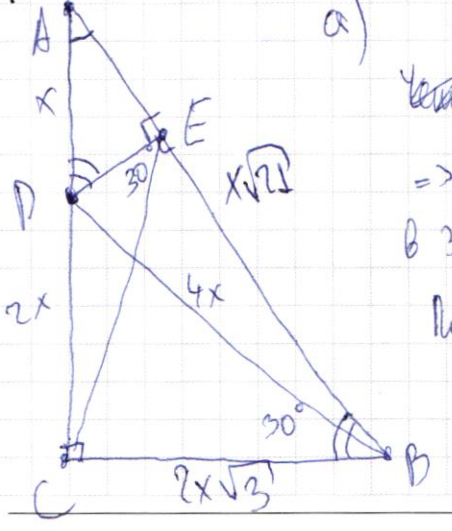
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a=9b \\ 81b^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab\geq 0 \\ a=9b \\ b^2=\dfrac{18}{83} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\cancel{x-6b}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y=1-\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$ и $\left(6-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1-\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$.

№24



а) (1) Пусть $AC=3x \Rightarrow AD=x;\ CD=2x$

Четырёх. $CDEB$ — вписан, т.к. $\angle DEB+\angle DCB=180°$ (по св-ву)

$\Rightarrow \angle DEC=\angle DBC=30° \Rightarrow$ т.к. $\triangle CDB$ — прямоуг с углом в $30°$. $\dfrac{CD}{BD}=\sin 30°=\dfrac{1}{2} \Rightarrow BD=4x$

По th Пифагора в $\triangle CBD$: $CB=\sqrt{BD^2-CD^2}=2x\sqrt{3}$

и по th Пифагора в $\triangle ACB$: $AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=x\sqrt{21}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\angle BAC=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3x}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ (ясно, что $x\neq 0$)

Ответ: $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $AC=\sqrt{7} \Rightarrow 3x=\sqrt{7} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}$ (из п. а))

$S_{CED}=\frac{DE\cdot CE}{2}\cdot\sin\angle DEC=\frac{DE\cdot CE}{4}$

$\triangle AED$ подобен $\triangle ACB$ (по 3 углам, т.к. $\angle A$ общий а $\angle ADE$ и $\angle ABC$ составляют с ним в сумме $90°$)

$\Rightarrow \frac{DE}{CB}=\frac{AD}{AB}=\frac{x}{x\sqrt{21}} \Rightarrow DE=\frac{2x\sqrt{3}}{\sqrt{21}}=\frac{2}{3}$

~~По т. Птолемея для вп. четырех. CDEB: CD·EB+DE·CB=CE·DB~~

~~$\Leftrightarrow CE=\frac{CD\cdot EB+DE\cdot CB}{BD}=2x\cdot$~~

По т. косинусов в $\triangle CED$: $CD^2=DE^2+EC^2-2\cdot DE\cdot EC\cdot\cos 30$

$\frac{28}{9}=\frac{4}{9}+EC^2-\frac{2\cdot2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot2}\cdot EC$

$EC^2-\frac{2}{\sqrt{3}}EC-\frac{24}{9}=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{\frac{4}{3}+4\cdot\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{36}{3}}=2\sqrt{3}$

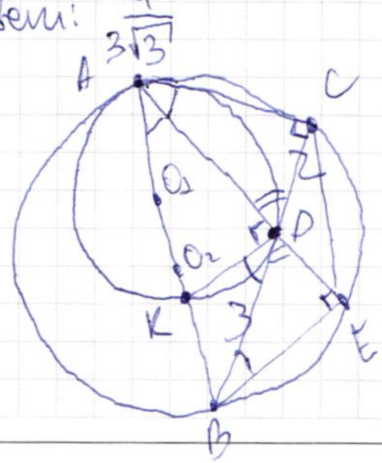
$EC=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{\sqrt{3}}$

$\rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}$ — отвергаем, не подходит $EC>0$

$\Rightarrow S_{CED}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}{4}=\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{4}{3\sqrt{3}}$

№5



Пусть R — радиус Ω и r — радиус ω

① В силу симметрии картинки O_1 и $O_2\in AB$ (просто потому, что радиус перпендикулярен касательной а касательную в точке а можно провести только одну)

$\Rightarrow \angle ADK=\angle AEB=\angle ACB$ — углы, которые оп. на диаметры $\Rightarrow$ они равны $90°$

② $ACEB$ — вписан $\Rightarrow \angle CAD=\angle CBE=\angle KDB$, т.к. BC — касательная, то $\angle KAD=\angle KDB=\angle CAD$ $\Rightarrow AD$ — бис-са в $\triangle BAC$.

$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ пусть $AC = 2x$, а $AB = 3x$

$\Rightarrow$ т.к. $\triangle ACB$ - прямоуг. $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$4x^2 + 25 = 9x^2$

$5x^2 = 25$

$x = \sqrt{5}$ $(x > 0)$

$\Rightarrow AB = 3\sqrt{5}$, т.к. AB - диаметр Ω $\Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

Рассмотрим степень точки B: $BD^2 = BK \cdot BA$

$9 = 2R \cdot (2R - 2r)$

$2R - 2r = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$r = \frac{3\sqrt{5} - \frac{3}{\sqrt{5}}}{2} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$S_{BAC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = 5x = 5\sqrt{5}$

$S_{ABD} = \frac{3}{5} \cdot S_{ABC}$; $S_{ACD} = \frac{2}{5} S_{ABC}$

$ADB \sim CED \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{AC^2 + CD^2}}{CD} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{1}{6} \cdot S_{ADB}$

(т.к. $S_{ADB} = (\sqrt{6})^2 \cdot S_{CDE}$)

Аналогично: $S_{ADC} = \frac{8}{3} S_{BDE}$

$\Rightarrow S_{BDE} = \frac{3}{8} \cdot S_{ADC}$

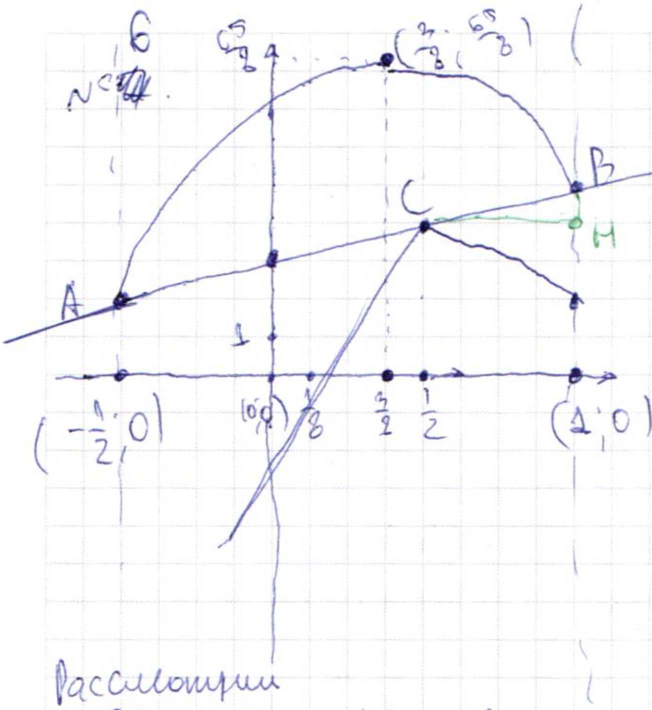
$\Rightarrow S_{ABEC} = S_{ACB} + \frac{3}{8} S_{ADC} + \frac{1}{6} S_{ADB} = 5\sqrt{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot 5\sqrt{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot 5\sqrt{5} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



① $8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$f(x)=-8x^2+6x+7$ – парабола, ~~ось~~ с осн. в точке $-\frac{6}{2a}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

$\Rightarrow f(\frac{3}{8})=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=\frac{65}{8}$

парабола ~~Аралая~~ пересекает прямые $x=1$ и $x=-\frac{1}{2}$

в точках $A(-\frac{1}{2};2)$ и $B(1;5)$
(просто подставить)

Рассмотрим
$g(x)=8x-6|2x-1|$

при $x\ge\frac{1}{2}$ $g(x)=6-4x$

при $x<\frac{1}{2}$ $g(x)=20x-6$

$\Rightarrow g(\frac{1}{2})=4$ $\Rightarrow C(\frac{1}{2};4)$

$g(1)=2$

$g(-\frac{1}{2})=-16$

② Очевидно, что в какой-то момент парабола станет ниже, чем $g(x)$. Единственным решением ~~ax+b~~ будет прямая ACB (т.к. она не может быть выше B и не может проходить ниже C.

$\Rightarrow h(x)=ax+b$

$h(x)=2x+3$ (~~угловая~~ ~~tg~~ ~~tg~~ ~~tg~~

$tg\,\alpha=a=\frac{BH}{CH}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$, ну а b, очевидно, подбирается единств. способом. $\Rightarrow a=2;b=3$

Ответ: $(2;3)$

№ 8

f определена на мн-ве положительных рац. чисел.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(1\cdot\frac{p}{q}\right) = f(1) + f\left(\frac{p}{q}\right) \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 4 & 3 & 4 & 8 & 3 & 9 & 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

если p - простое, то $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right] \Rightarrow f(2)=1;\ f(3)=1 \ldots f(19) = 9$

$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(8) = f(2) + f(4) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(12) = f(2) + f(6) = 4$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(20) = f(2) + f(10) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(22) = f(2) + f(11) = 6$

p – в данном случае любое

$$f(1) = 0 \Leftrightarrow f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right) = 0 = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(p) = -f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \text{и} \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$\Rightarrow$ для $x = 1$ (2 варианта) есть 19 подх. y, таких, что $f(y) > f(x)$

для $x = 2$ (4 вар.) есть 15 подх y

для $x = 3$ (6 вар) есть 9 подх. y

для $x = 4$ (4 вар) есть 5 подх y

для $x = 5$ (1 вар.) есть 4 подх. y

для $x = 6$ (2 вар) есть 2 подх. y

для $x = 8$ (1 вар) есть 1 подх. y

для $x = 9$ (1 вар) 0 подх. y

$\Rightarrow$ Всего таких пар $2\cdot 19 + 4\cdot 15 + 6\cdot 9 + 4\cdot 5 + 1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 181$

Ответ: 181 вариант.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c, \quad \frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$

$a; b; c; \quad \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$bc = b \pm \sqrt{b^2-ac}$

ОДЗ: $c \neq 0 \quad b \neq 0$

$\frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a} \neq 0$

$b(c-1) = \pm\sqrt{b^2-ac}$

$b^2(c^2-2c+1) = b^2 - ac$

$b^2(c^2-2c) = -ac$

$b = \sqrt{\frac{-ac}{c^2-2c}} = \boxed{\sqrt{\frac{-a}{c-2}}}$

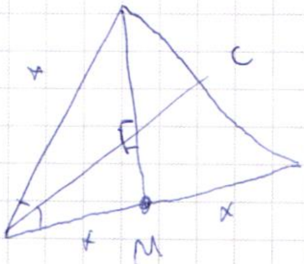
$b>0$

$c>1$

$b<0$ и $c>1$

$c<1$ и $b>0$

№2.



$3x + c = 900$

$x + c \geq 2x$

$3x > c$

$3x+c = 900$

$\begin{cases} c > x \\ c < 3x \end{cases}$

450

180

300

$\forall x$, кол-во вариантов $2x - 1$

$3x + c > 4x \Leftrightarrow x \geq 225$

$6x \Leftrightarrow x < 160$

$x > 225$

$x < 160$

$\Leftrightarrow$ 73 варианта x, для каждого x есть один c

$(y-1) - 6(y-1)$

Ответ: 73

№3

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)(y-1) = (x-6y)^2$

$x - 6y \geq 0$

Пусть $a = x - 6$

$b = y - 1$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = a^2 - 12ab + 36b^2 \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$13ab-36b^2=18-2b^2$$

$$13ab=18+34b^2$$

$$a=\frac{18+34b^2}{13b}$$

$$a^2=\frac{324+1224b^2+1156b^2}{169b^2}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$$

$$\cancel{a=\frac{169b^2-169b^2}{169b^2-144b^2}}$$

$$a=\frac{13b\pm\sqrt{169b^2-144b^2}}{2}=\frac{13b\pm5b}{2}= \begin{matrix} \nearrow 9b \\ \searrow 4b \end{matrix}$$

$a=9b$
$a=4b$
$a>6b$

$$a>6b \Leftrightarrow a=9b$$

$$\Rightarrow 81b^2+2b^2-18=0$$

$$83b^2=18$$

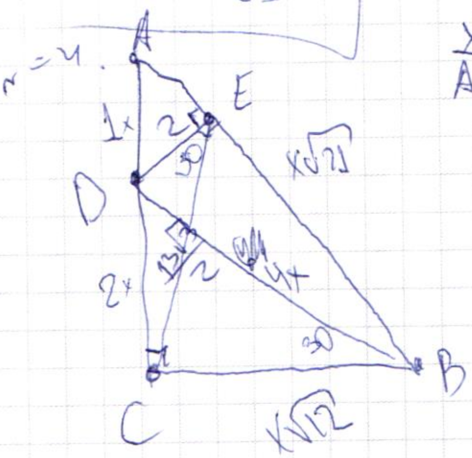
$$b=\sqrt{\frac{18}{83}} \qquad a=9\sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$\begin{cases} x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}}$$

$$\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$AC=\sqrt{7} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}$$



$$\frac{x}{AB}=\frac{DE}{CB}=$$

$$\frac{DE}{x\sqrt{12}}=\frac{x}{x\sqrt{21}}$$

$$tg BAC=\frac{DE}{AE}=\frac{CB}{AC}$$

$$AB=\sqrt{9x^2+12x^2}=x\sqrt{21}$$

$$DE=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}x=$$

$$=2$$

$$\frac{CB}{AC}=\frac{x\sqrt{12}}{3x}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52 80

38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 + 1 = $\boxed{180}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$, где p - простое

$2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

2	3	5	7	11	13	17	19
1	1	2	3	5	6	8	9

~~f(ab) - не простое~~

ab - не простое

$\Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{p}{q}) = f(p \cdot \frac{1}{q}) = f(p) + f(\frac{1}{q})$

$f(\frac{p}{q}) = f(1 \cdot \frac{p}{q}) = f(1) + f(\frac{p}{q})$

$f(1) = 0$

$f(\frac{1}{x})$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(p \cdot \frac{1}{p}) = 0 = f(p) + f(\frac{1}{p})$

$f(x) = -f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(6) = f(3) + f(2) =$

$f(8) = f(4) + f(2) =$

$f(9) = f(3) + f(3) =$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(12) = f(2) + f(6) =$

$f(14) = f(2) + f(7) =$

$f(15) = f(3) + f(5) =$

$f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9)$

$f(20) = f(2) + f(10) =$

$f(21) = f(3) + f(7) =$

$f(22) = f(2) + f(11)$

$\Rightarrow x = 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9$

$\Rightarrow$ для $x = 1$: 2 · 19

для $x = 2$: 4 · 18

для $x = 3$: 6 · 9

для $x = 4$: 4 · 5

для $x = 5$ 1 · 4

для $x = 6$ 2 · 2

для $x = 8$ 1 · 1 для $x = 9$: 0

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

геом. прогр. $a, b, c, \frac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$ (по дискриминанту)

по св-ву геом. прогр: $\left(\frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}\right) \cdot a = bc$

$b \pm \sqrt{b^2-ac} = bc$

$b(c-1) = \pm\sqrt{b^2-ac}$

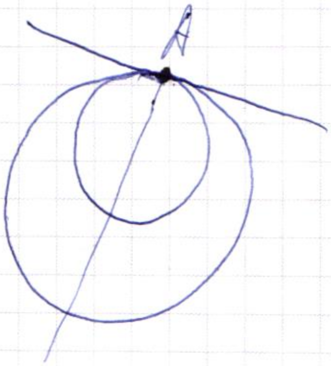
$b^2(c^2-2c+1) = b^2-ac$

$b^2(c^2-2c) = -ac$

$cb^2(c-2) = -ac$

$c(b^2(c-2)+a) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c = -\frac{a}{b^2}+2 \end{array}\right.$$



$= 5\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{20\sqrt{5}+3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

$S_{BAC} = X \cdot 5 = 5\sqrt{5} = 2x \cdot 3x \cdot \sin 2\alpha = 60 \sin\alpha \cos\alpha$

$S_{ABD} = \frac{3}{8} \cdot S_{ABC}$ $\quad S_{ACD} = \frac{3}{8} S_{ABC}$

ADB и CED - подобны $\frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{AC^2+CD^2}}{CD} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$

$S_{ADB} = \sqrt{6}^2 \cdot S_{CDE}$

Аналогично $\frac{AD}{DB} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S_{ADC} = \frac{8}{3} S_{BDE}$

$\cancel{\Rightarrow S_{ABEC} = \frac{8}{3}}$

$S_{ABEC} = S_{ACB} + \frac{3}{8} \cdot S_{ADC} + \frac{1}{6} \cdot S_{ADB} =$

$= 5\sqrt{5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot 8\sqrt{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot 8\sqrt{5}$

$a,\ b,\ c,\quad \dfrac{2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$

$a,\ b,\ c,\quad \dfrac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$b \pm \sqrt{b^2-ac} = bc$

$\pm\sqrt{b^2-ac} = b(c-1)$ $\qquad \cancel{b^2+\frac{a^2}{b^2}-2}$

$b^2(c^2-2c+1) = b^2-ac$

$b^2(c^2-2c) = -ac$

$b^2(c-2) = -a$

$c = -\dfrac{a}{b^2}+2$

$b^2 > ac$ и $b(c-1) \geq 0$ и $b(c-1) < 0$

$4b^2 + \dfrac{4a^2}{b^2} - 4a^2 = \dfrac{4b^4 + 4a^2b^2 + 4a^2}{b^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для вп. четырех уг.

По Теореме Птолемея: $DE \cdot CB + DC \cdot EB = CE \cdot BD$

$$CE = \frac{2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{12} + \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{21}}{} =$$

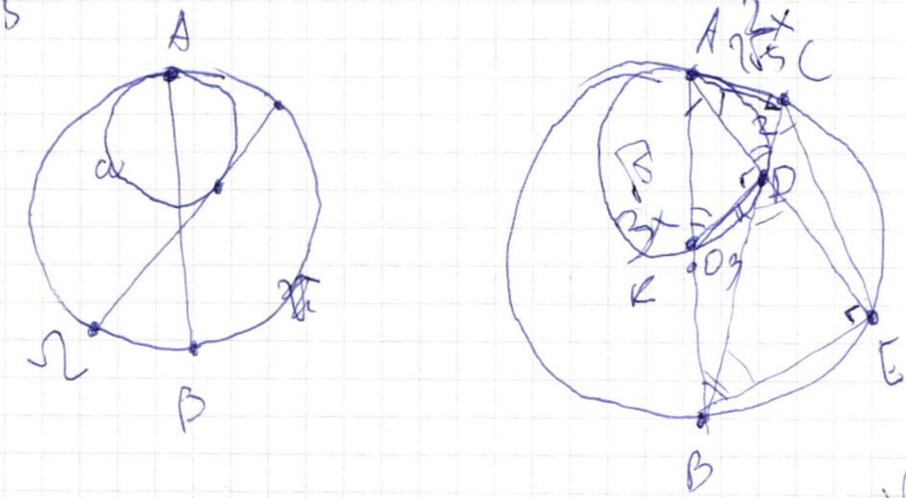
$$= \frac{12 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + 14\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \frac{26\sqrt{21}}{4\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$= \frac{13\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{2 \cdot 13\sqrt{3}}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{3}}{4}}$$

$\frac{BD}{AD} = 2$

№5



$\frac{3}{AD} = \frac{ED}{2}$

$\cos 2x = \frac{2}{3}$

$20 + 4$

S

$9x^2 - 25 = 4x^2$

$5x^2 = 25$

$x = \sqrt{5}$

$\boxed{R = \frac{3\sqrt{5}}{2}}$

$r =$

$\boxed{= 6\sqrt{5}}$

$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{AB} = \frac{KD}{2}$

$BK \cdot (BK + AK)$

$(2R - 2r)(2R) = 9$

$\frac{12}{\sqrt{5}}$

$2R - 2r = \frac{9}{3\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$2r = 2R - \frac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} - \frac{3}{\sqrt{5}} =$

☑ черновик ☐ чистовик

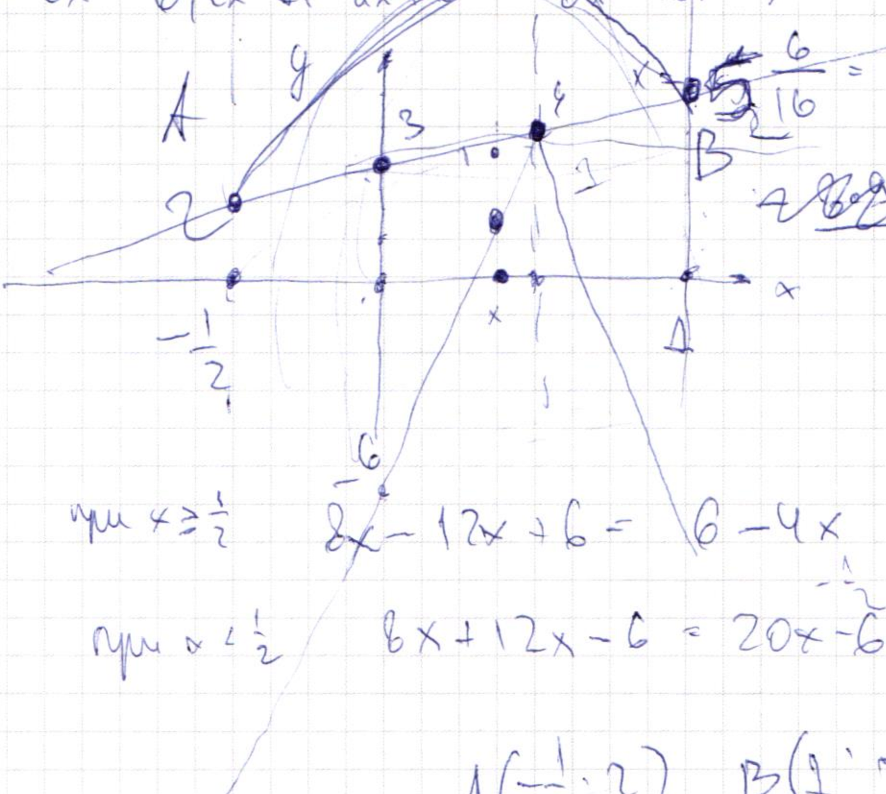
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$



$\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$y = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$

$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

при $1 = -8 + 6 + 7 = 5$

при $-\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{8 \cdot 1}{4} - 3 + 7$

при $x \ge \frac{1}{2}$ $\quad 8x - 12x + 6 = 6 - 4x$

при $x < \frac{1}{2}$ $\quad 8x + 12x - 6 = 20x - 6$

при $x = \frac{3}{8}$

$\frac{60}{8} - 6 = \frac{12}{8} = \frac{4}{3}$

$A\left(-\frac{1}{2}; 2\right) \quad B(1; 5)$

~~Все~~ $kA + (1-k)B$

$y = 2$

=> любая точка прямой AB:

$-\frac{1}{2}k + 1 - k; \quad 2k + (1-k)5$

$1 - \frac{3}{2}k; \quad 5 - 3k$

$5 - 3k = l\left(1 - \frac{3}{2}k\right) + b$

$l = \dfrac{1 - \frac{3}{2}k}{5 - 3k}$

-> единственная прямая, которая задаётся:

$y = 2x + 3$

$\Rightarrow a = 2; b = 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)