МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

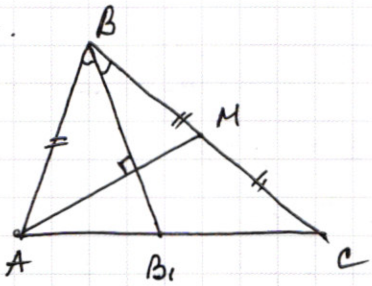
№1. Решение: 1). Пусть есть a; $b = a\cdot k$; $c = a\cdot k^2$; $d = a\cdot k^3$;
где a, b, c, d — члены ГП.; $k \neq 0$.

2) $b^2 = a^2 k^2 = a\cdot a\cdot k^2 = ac \Rightarrow$: для ур-ния
$ax^2 - 2bx + c = 0$; $\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0 \Rightarrow$ x-единств $\Rightarrow x = \frac{b}{a}$

3) $d = a\cdot k^3 = \frac{b}{a} = \frac{a\cdot k}{a} = k \Rightarrow a\cdot k^2 = 1 \Rightarrow c = 1$.

Ответ: $\{1\}$.

№2.



1) BB_1 — биссектр; AM — медиана; $BB_1 \perp AM \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABM$ — р/б с осн. AM. $\Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC$.

2) $P = 900$. Пусть $\left.\begin{array}{l} x = AB \\ 2x = BC \\ y = AC, \end{array}\right\} \Rightarrow$ где $x, y \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow x + 2x + y = 900 \Leftrightarrow 3x + y = 900$

Нер-во Δ: $AB + BC > AC \Rightarrow 3x > y \Rightarrow$ $\Big\} \Rightarrow 3x > 450 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geq 151$

$AB + AC > BC \Rightarrow x + y > 2x \Leftrightarrow y > x$; $450 > 2x \Leftrightarrow x \leq 224$

3) Значит, нам подходят треуг. с сторон: $(x; 2x; 900-3x)$,
$x \in [151, 224]$, $x \in \mathbb{N}$.

Докажем, что такие варианты различны:

~~Допустим тройка $(x_1; 2x_1; 900-3x_1) = (a; b; c)$, тогда не нарушая общности $a < b < c$, тогда т.к. $x < 2x$, то единств. вариант, тогда $a = 900 - 3x_1$, тогда $b = x_1$; $c = 2x_1$.~~

Мы записываем: $x, 2x, 900-3x$.

Тогда возможные повторы это такие тройки:
$2x \quad 4x \quad 900-6x$ (−) (т.к. $2x \geq 302$)
$900-3x \quad 1800-6x \quad 9x-1800$ (−) (т.к. тогда $900-3x = x \Rightarrow 900 = 4x \Leftrightarrow x = 225$)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит, повторов нет => кол-во вариантов: $224-151+1=$

$=224-150=74$

Ответ: 74

№3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0. \end{cases}$

1) $a=x-6$
$b=y-1$ $\Rightarrow$ $a-6b = x-6-6(y-1) = x-6-6y+6 = x-6y$
$a \geq 6b$

2) $xy-6y-x+6 = y(x-6)-(x-6) = (x-6)(y-1) = ab$, $ab \geq 0$

3) $x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \Leftrightarrow (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+2b^2=18 \Rightarrow \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow a^2-2ab+b^2=ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2+b^2=3ab$

① $b=0$; $a=0 \Rightarrow x=6; y=1$. ⊖

$x^2+2y^2-12x-4y+20=36+2-72-4+20=$
$=58-76 \neq 0$

② $b \neq 0$: $\frac{a^2}{b^2}-\frac{3a}{b}+1=0 \Rightarrow$
$z=\frac{a}{b} \neq 0$

$z^2-3z+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1 = \frac{3+\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$z_2 = \frac{3-\sqrt{9-4}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

4) Ⓘ $\frac{a}{b} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot b$

$a^2+2b^2=18 \Leftrightarrow \frac{14+6\sqrt{5}}{4}b^2+2b^2=18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (14+6\sqrt{5})b^2+8b^2=72 \Leftrightarrow b^2 = \frac{72}{22+6\sqrt{5}} = \frac{36}{11+3\sqrt{5}} = \frac{36(11-3\sqrt{5})}{76} =$

$= \frac{18(11-3\sqrt{5})}{38} = \frac{9}{19}(11-3\sqrt{5}) \rightarrow$ Ia) $b=\sqrt{\frac{9}{19}(11-3\sqrt{5})} \Rightarrow a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{19}(11-3\sqrt{5})}$

$a-6b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2-12ab+36b^2=ab \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2-13ab+36b^2=0 \Leftrightarrow (a-9b)(a-4b)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b. \end{array}\right.$

①. $81b^2+2b^2=18 \Leftrightarrow b^2=\frac{18}{83} \Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} ⊕ \\ \begin{cases} b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} ⊖ \end{array}\right. \\ a \geq 6b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1+\sqrt{\frac{18}{83}} \\ x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{18}{83}} \\ x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

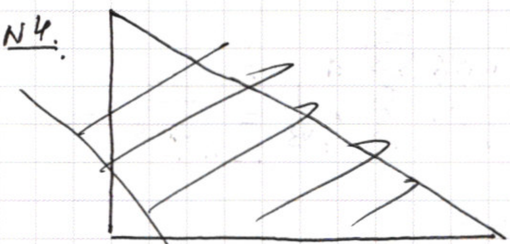
(2) $16b^2 + 2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow$

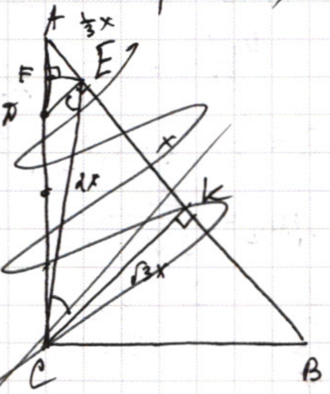
$\Rightarrow \left\{ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases} \ominus \\ \begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases} \end{array} \right. \right. \quad a \geq 6b \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

(3) ~~x+y~~

Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}\right); (2;0)$

№4.





Решение:

1) Проведём $CK \perp AB$; т.к. $DE \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow DE \parallel CK \Rightarrow \angle CED = \angle ECK = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $\triangle CEK$: $\frac{EK}{CK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow CK = \sqrt{3}EK = \sqrt{3}x$

2) $\begin{cases} AD : DC = 1:3 \\ \text{т.к. } DE \parallel CK \end{cases} \Rightarrow AE : EK = 1:3 \Rightarrow AE = \frac{1}{3}x \Rightarrow$

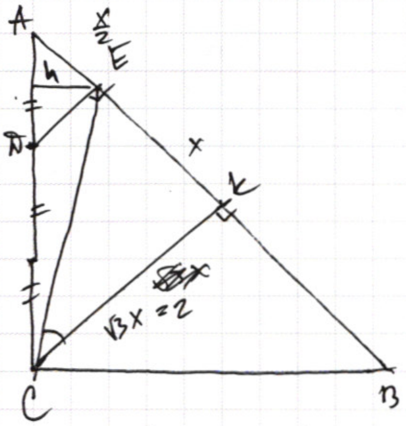
$\Rightarrow tg\angle CAB = \frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{3}x}{\frac{4}{3}x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

3) $S_{CED} = \frac{1}{2}EF \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot 3AD = 3S_{ADE}$

$S_{ADE} = \frac{1}{2}FE \cdot AE =$

$\triangle AKC$: $CK^2 + AK^2 = AC^2 \Rightarrow 3x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 7 \Leftrightarrow$

№5.



Решение:

1) $CK \perp AB$ (построим), $DE \perp AB$ $\Big\}$ $\Rightarrow DE \parallel CK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle KCE = 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CEK$: $EK = x$; $CK = \sqrt{3}x$ $(x>0)$

2) $AD : DC = 1:2 \Rightarrow AE : EK = 1:2 \Rightarrow AE = \frac{x}{2}$

3) $\operatorname{tg}\angle A = \frac{CK}{AK} = \frac{\sqrt{3}x}{\frac{3x}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

4) $S_{EDC} = \frac{1}{2}h \cdot DC = \frac{1}{2}h \cdot 2 \cdot AD = 2S_{ADE}$

$\triangle AKC$: $AC^2 = CK^2 + AK^2 \Rightarrow 7 = 3x^2 + \frac{9}{4}x^2 \Rightarrow 7 = \frac{21}{4}x^2 \Rightarrow$

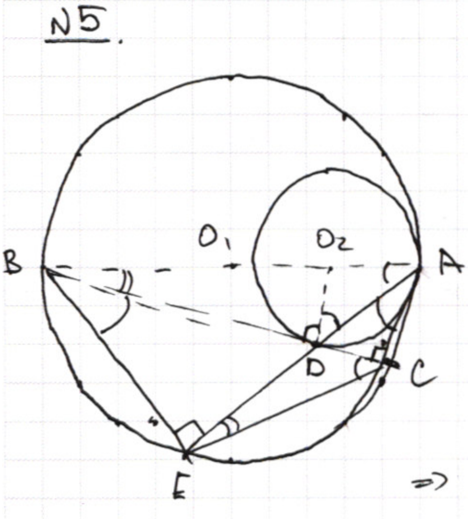
$\Rightarrow x^2 = \frac{4 \cdot 7}{21} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5) $S_{ADE} = \frac{1}{2} DE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{CED} = 2S_{ADE} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: 1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

№5.



Решение: (*) Пусть R, r – радиусы Ω и ω соотв.

1) $\angle ABD = \angle AEC$

2) $O_2D = O_2A = r$; $r>0 \Rightarrow \triangle O_2DA$ – р/б с осн. DA

$\angle O_2DB = 90°$ (т.к. касание прямой и окр) $\Rightarrow$

$\angle BCA = 90°$ (т.к. опир. на диам)

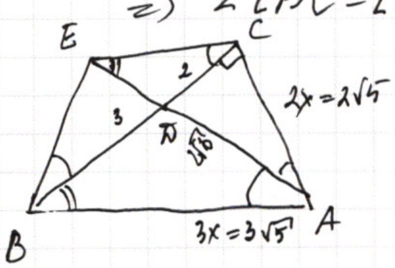
$\angle BAE = \angle BCE$ (впис) ; $\angle BAE = \angle O_2DA$) $\Big\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2DA = \angle ECB \Rightarrow \angle O_2DA + 90° = \angle ECB + 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDA = \angle ECA \Rightarrow$ в $\triangle BDA$ и $\triangle ECA$:

$\angle BAD = \angle EAC$ (т.к. остальн. соотв. равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBC = \angle EAC = \angle BAD = \angle BCE \Rightarrow \triangle BEC$ – р/б с осн. BC.



$\triangle CBA$: $CB = 5$; пусть $CA = 2x$, $x>0$

$\frac{CA}{AB} = \frac{2x}{3x}$, т.к. AD – бисс $\Rightarrow 25 + 4x^2 = 9x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 25 = 5x^2 \Rightarrow x = \sqrt{5} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$: $\left.\begin{matrix} O_2D \perp BC \\ AC \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow O_2D \parallel AC \Rightarrow \frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$;

4) $\triangle CDA$: $CD^2 + CA^2 = DA^2 \Rightarrow DA = \sqrt{4+20} = 2\sqrt{6}$

5) $\frac{S_{CDE}}{S_{CDA}} = \frac{ED}{DA} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$

$\cancel{\frac{ED}{DB}} =$ В $\triangle EDC$ и $\triangle BDA$: $\left.\begin{matrix} \angle DEC = \cancel{\angle DCE}\ \angle DBA \\ \angle EDC = \angle BDA \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle$ подобны

$\frac{ED}{DB} = \frac{DC}{DA} \Rightarrow \frac{ED}{3} = \frac{2}{2\sqrt{6}} \Rightarrow ED = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\frac{S_{EDC}}{S_{EDB}} = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{EDB} = \frac{3}{2}S_{EDC}$; $S_{ECAB} = S_{CDA} + S_{EDC} + S_{EDB} + S_{DBA} =$

$= S_{CBA} + \frac{1}{4}S_{CDA} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}S_{CDA} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\sqrt{5} + \cancel{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{2\cdot 2\sqrt{5}} +$

$+ \frac{3}{\cancel{8}_4}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\cdot 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{5\sqrt{5}}{4} + 5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$r = \frac{6\sqrt{5}}{2}$

$S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

~~№6. 1) $8x - 6|2x-1|$; $\left[\begin{matrix} 8x - 12x + 6 = -4x+6, \ x \geq \frac{1}{2} \\ 8x + 12x - 6 = 20x - 6, \ x < \frac{1}{2} \end{matrix}\right.$~~

~~2)~~

$\forall x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$x = \frac{1}{2}$

(a;b)

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$-6 \le b \le 7$

$-6 < a \le 4$

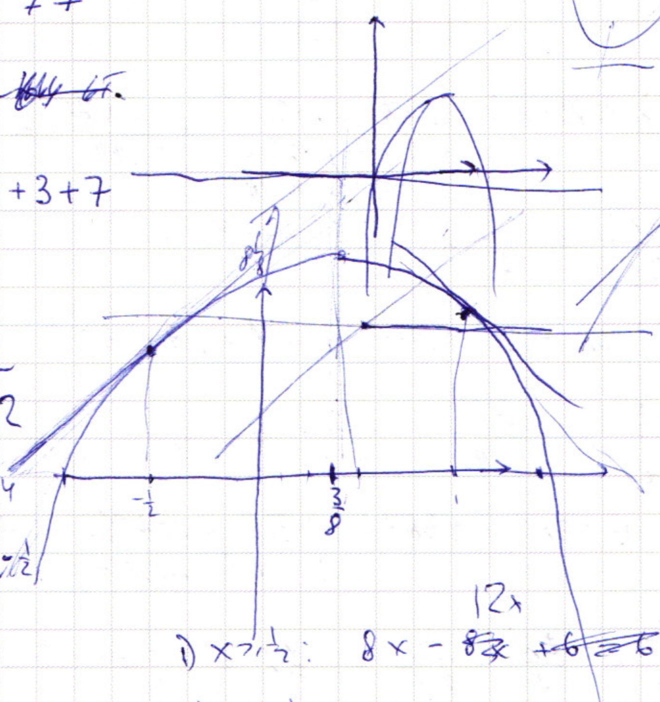
$-8x^2 + 6x + 7$

$4 \le \frac{1}{2}a + b \le -2 + 3 + 7$

$4 \le \frac{1}{2}a + b \le 8$ $\quad$ $4 \le \frac{1}{2}a + b \le 8$

$-6 \le b \le 7$ $\quad$ $+ \; -7 \le -b \le 6$

$9 + 8 \cdot 7 = 65$ $\quad$ $-3 \le \frac{1}{2}a \le 2$



$-8x^2 + 6x + 7$ $\quad$ $3 - \sqrt{65} \vee -4$

$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{65}}{-8} = \frac{3 - \sqrt{65}}{8}$

$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{65}}{-8} = \frac{3 + \sqrt{65}}{8}$

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$x^2 + 2x + 1 = \frac{-2}{2} = -1$

$-\frac{b}{2a}$ $\quad$ $-8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 =$

$= -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 =$

1) $x \ge \frac{1}{2}$: $8x - \cancel{8x} \cancel{+6} 6 - 4x$ $\quad$ 12x

2) $x < \frac{1}{2}$: $8x + 8x$.

a, b > 0.

$f \to R$

$\forall a, b$: $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$, p → простое

$(x; y)$ – ?

$f(x/y) < 0$.

$p = 2$: $f = 1$

$p = 3$: $f = 1$

$f(2) = 1$ $\quad$ $f(13) = 6$

$f(3) = 1$ $\quad$ $f(17) = 8$

$f(5) = 2$ $\quad$ $f(19) = 9$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(4) = 2$ $\quad$ $f(8) = 3$ $\quad$ $f(12) = 3$

$f(6) = 2$ $\quad$ $f(9) = 2$ $\quad$ $f(14) = 4$

$f(10) = 3$ $\quad$ $f(15) = 3$

$f(16) = 4$; $f(18) = 3$; $f(20) = 4$

$2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$

$f(16) = f(2 \cdot 8) = f(2) + f(2) + f(4) = f(2) + f(16)$

$\frac{5}{3}$

$f(21) = 4$

$f(\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5}) =$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(\frac{5}{3}) + f(\frac{3}{5}) = 0$

$f(\frac{m}{n}) = f(m) - f(n)$

Взаимообратные числа → дают 0.

$\frac{1}{a} + a$

$a + \frac{1}{a}$

$f(\frac{1}{2})$

$\frac{m}{n}$ $\quad$ $f(\frac{1}{2})$

$\frac{3}{5} \cdot 5 = \frac{3}{1}$

$f(\frac{3}{5}) + f(\frac{5}{3}) = 0$

$\frac{m}{n} \cdot n$

$f(\frac{3}{5}) + f(\frac{5}{3})$

m n ∈ R

$f(m+n) = f(m \cdot n)$

$f(\frac{1}{2} \cdot 2) =$

$f(\frac{3}{5} \cdot 5) =$

$f(3) = f(5) + f(\frac{3}{5})$ $\quad$ $f(m) = f(\frac{m}{n}) + f(n)$

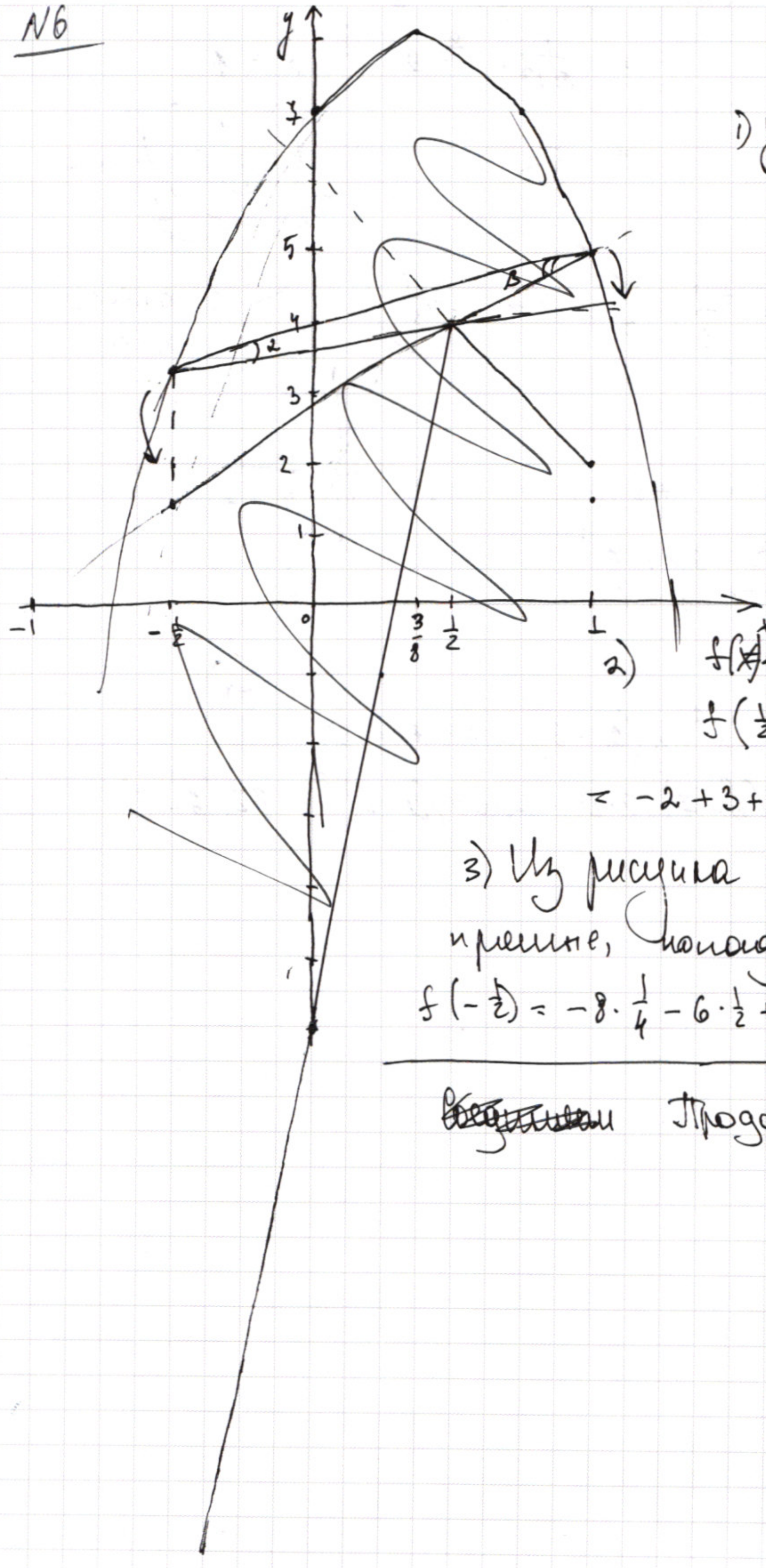
$a^2 - a + 1$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$y_1 = -4x + 6$

$y_2 = 20x - 6$

1) $y_3 = -8x^2 + 6x + 7$

$x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$y_в = -8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= 8\frac{1}{8}$; $x_1 = \frac{-3+\sqrt{65}}{-8} = \frac{3-\sqrt{65}}{8} <$

$< -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{-3-\sqrt{65}}{-8} = \frac{3+\sqrt{65}}{8} > 1$

~~Из рисунка видно, что~~

2) $f(x) = ax + b \Rightarrow f(1) \leq 5;\ f(1) \geq 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 4;\ f\left(\frac{1}{2}\right) \leq -8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 =$

$= -2 + 3 + 7 = 8$

3) Из рисунка видно, что подходит прямые, попадающие в α и β.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$

~~[illegible]~~ Продолж. на стр.7

$x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6$

$y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}$

$x - 6y = 3\sqrt{\frac{18}{83}}$

$\sqrt{(x-6)(y-1)} = \sqrt{9\sqrt{\frac{18}{83}} \cdot \sqrt{\frac{18}{83}}}$ (+).

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$81 \cdot \frac{18}{83} + 2 \cdot \frac{18}{83} = 18$ (+).

$6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}} - 6 + 6\sqrt{\frac{18}{83}}$ (−)

$S_{AKC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}x \cdot \sqrt{3}x = \frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$S_{AKC} = \frac{2}{9} \cdot \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

$S_{CED} = 6x \quad 12x; x \qquad \frac{2}{9}$

$S \quad \frac{2}{3} S_{AKC}$

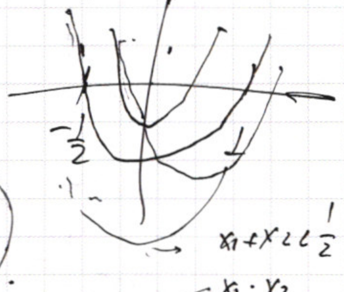
$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \sqrt{3}x = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{2}$.

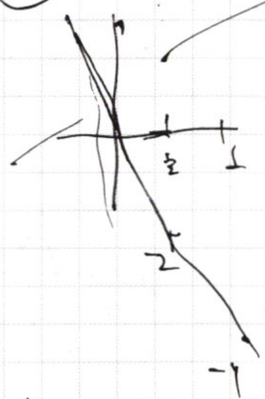
$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = 2 \quad \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \frac{x}{2} =$

$= \frac{1}{12} \quad \sqrt{3} \cdot \frac{4}{3} = 4$

$= \frac{1}{3\sqrt{3}}$.





$8x - 6(2x-1) \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

1) $-4x + 6 \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$-4x \le ax + b - 6 \le -8x^2 + 6x + 1$

$ax + b \geq -4x$

~~$ax + b - 6$~~

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7 \iff 8x^2 + x(a-6) + b - 7 \le 0$.

$(a-6)^2 - 32(b-7) \geq 0 \iff (a-6)^2 \geq 32(b-7)$

~~They~~ ~~Teenagers~~ ~~Score~~ ~~Out~~

$ax + b$

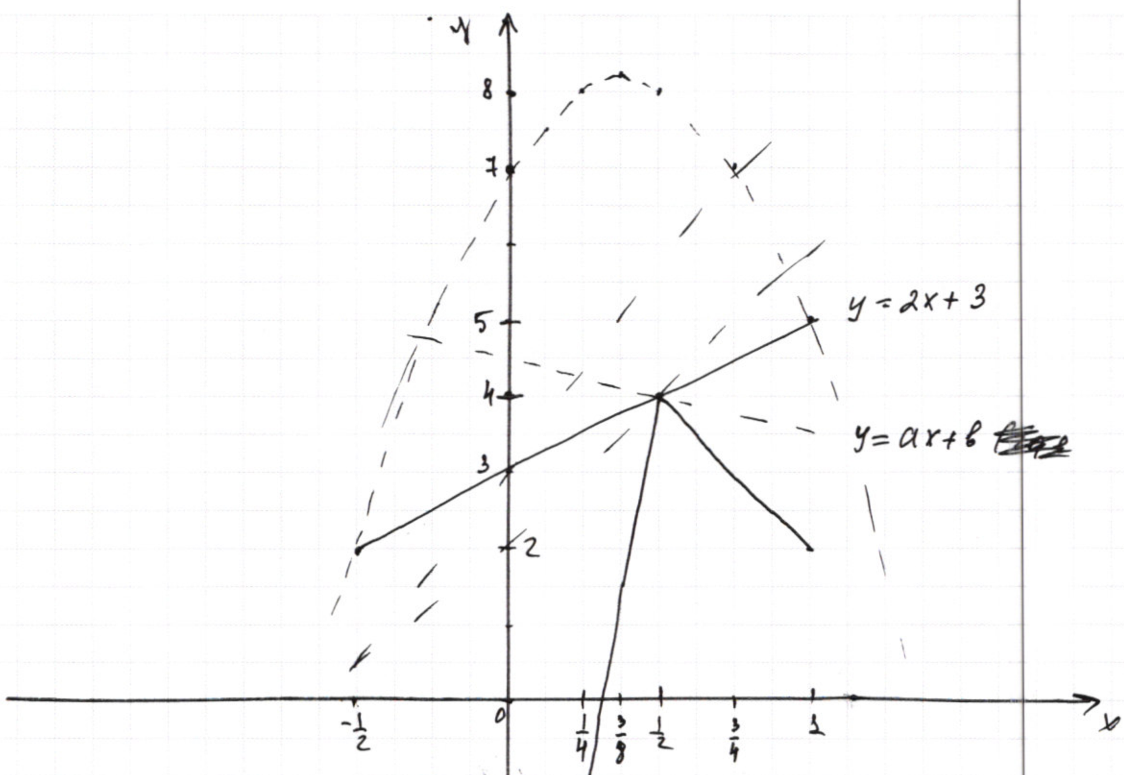
$-6 \le b \le 7$

$-6 \le a \le 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



2) ~~Если f(1)~~

Если $f(1) < 5$, то
т.к. $f(\frac{1}{2}) \geq 4$, то
она пройд. выше, чем 2 в $x = -\frac{1}{2}$ $\to$ плохо

Значит $f(1) = 5$

3) Если $f(-\frac{1}{2}) < 2$, то т.к. $f(\frac{1}{2}) \geq 4$, то аналогично получ., что семейство таких прямых лежит выше, чем 5 в $x = 1$ $\Rightarrow$ $f(-\frac{1}{2}) = 2$

4) Тогда: $\begin{cases} 5 = a + b \\ 2 = -\frac{a}{2} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$

$3 = \frac{3a}{2}$

Ответ: $(2; 3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. Решение:

1) $f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f(x) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$

2)

i	$f(i)$
2	1
3	1
4	$f(2)+f(2)=2$
5	2
6	$f(3)+f(3)=2$
7	3
8	$f(2)+f(4)=3$
9	$2f(3)=2$
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	4
17	8
18	3
19	9
20	4
21	4
22	6

Таблица

x	f(x)	Подходящ. f(y)	y	кол-во
~~2~~	~~1~~	~~—~~		
3	1	—		
2	1	> 1	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., 22	19
3	1	> 1	4 – 22	19
5	2	> 2	7, 8, 3 - 22	15
6	2	— " —		15
7	3	> 4	11, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22	9
8	3	— " —		9
9	2	>, 3		15
10	3			9
11	5	>, 6	13, 17, 19, 22	4
12	3			9
13	6	>, 7	17, 19	2
14	4	>, 5	11, 13, 17, 19, 22	5
15	3			9
16	4			5
17	8	>, 9	19	1
18	3			9
19	9			0
20	4			5
21	4			5
22	6			2

Считаем,

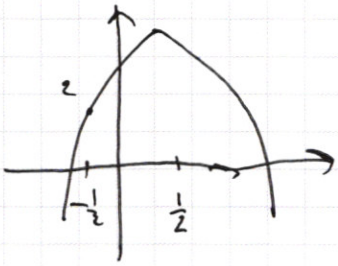
$68 + 42 + 20 + 24 + 12 =$

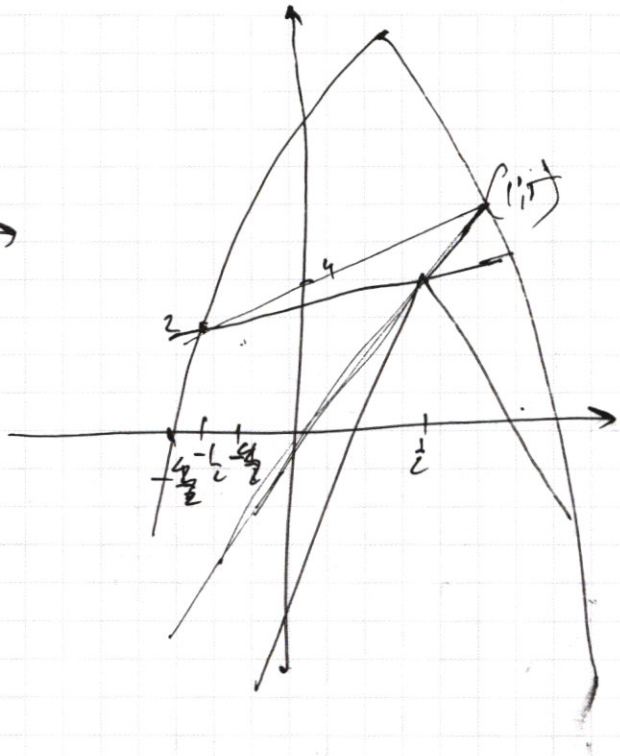
$= 130 + 36 = 166$

Ответ: 166 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

: $5 = k + b$





$$-\begin{array}{l} 5 = k + b \\ 2 = -\frac{k}{2} + b \end{array}$$

$3 = \frac{3k}{2} \Rightarrow k = 2$

$b = 3$

$y = 2x + 3$

$$-\begin{array}{l} 5 = k + b \\ 4 = \frac{k}{2} + b \end{array}$$

$1 = \frac{k}{2} \Rightarrow k = 2$

$y = 2x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$4-24+20=0$

$x=2$

x $2x$ $900-3x$

x $2x$ $900-3x$

$2x$ $2x$ $900-3x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x_1

$\sqrt[2]{b-2}$ $10-12$

№1. a, b, c ?
I II III.

$a \quad b = a\cdot k \quad c = a\cdot k^2$

$x_1 = \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}$ or $x_2 = \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}$

x_1: $ax^2-2bx+c=0$

a, c - одного знака

$b^2 \geq ac$

$\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} = a\cdot k^3$

$a^2k^2 = a^2k^2$

$b+\sqrt{b^2-ac} = a^2\cdot k^3$

$d = \frac{b}{a}$

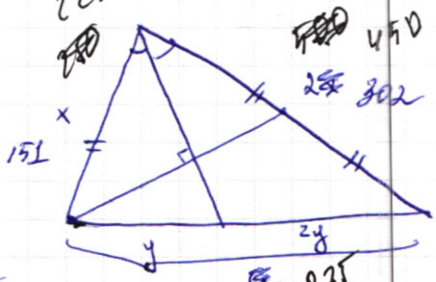
$\Rightarrow \underline{c=1}$.

$P = 900$

450 675

$a \quad \underset{b}{\underset{\parallel}{a\cdot k}} \quad \underset{c}{\underset{\parallel}{a\cdot k^2}} \quad \underset{\frac{b}{a}}{\underset{\parallel}{a\cdot k^3}}$

225



450

302

224 448

$\frac{a\cdot k}{a} = a\cdot k^3$

$1 = a\cdot k^2$

228

$x\in[151; 224]$.

$3x > a$

$3x+a=900$

225

$x=250$

$3x > 450$

$x > 150$.

772

$2x$ x

$x+a > 450 \Rightarrow 2x < 450$

$x > 150 \qquad x < 225$

$x, 2x, y = a_1, a_2 \quad y$

a, b, c

$x < 2x$ $\quad y_1\ x_1\ 2x_1$

$x\in[151; 224]$

$121-45=$

1) $x=6$
2) $y=1$
3) $x>6; y>1$
4) $x<6; y<1$.

$36-72+2-4+20=$
$=-36+20-2$ $-$

№3. $x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$\frac{121}{45}$ 76

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$ $\uparrow^2$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$ $\quad x-6=a$
$y-1=b$

1) $x=6$; $y=1$

$a-b=\sqrt{ab}$ $\quad a^2+b^2-2ab=ab$

$x^2-36y^2-12xy = xy-6y-x+6$

$a^2+2b^2=18$ $\quad a^2+b^2=3ab$
$a^2+2b^2=18$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$\cancel{\frac{a^2}{b^2}+1=\frac{3a}{b}}$ $\cancel{t^2-3t+1=0}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

58 -

$b^2=18-3ab$

b^2 2

$x-6 = 6(y-1) =$

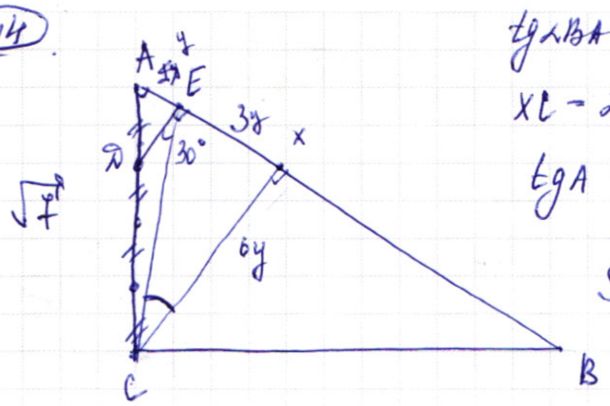
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4.



$tg\angle BAC - ? = \frac{CB}{AC} = \frac{DE}{AE}$

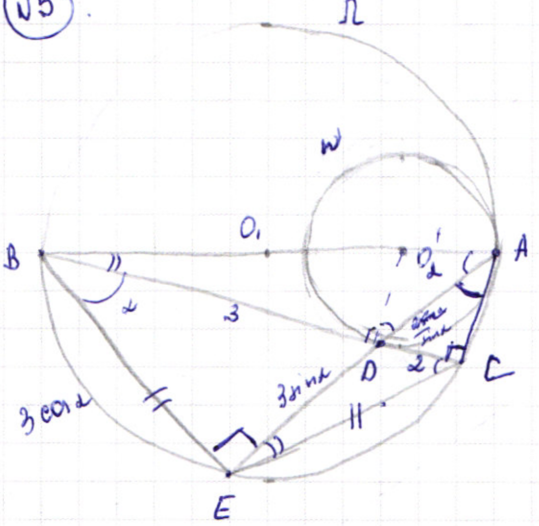
$XC = 2EX \Rightarrow XC = 6y$

$tgA = \frac{6y}{4y} = \frac{3}{2} = 1,5.$

$S_{CED} = 3S_{AED} = \cancel{\frac{3}{10}S_{AX}}$. (+)

$(\cdot;\cdot;\cdot)$.

№5.



$R; r - ?$

$S_{BACE} - ?$

$AD \cdot DE = 6$

$\breve{BE} = \breve{EC}$

$)) = \beta$

$) = \alpha$

$\cancel{x}\ 2x$

a b c

x 2x 900−3x

~~900−3x 2x 4x 900~~

2x 4x

900−3x

4

x

225

224

450 225

~~300~~

225

x

2x 900−3x

x 720.

$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{\frac{2}{\sin\alpha}}{\sin 2\alpha}$

$r \cdot \sin 2\alpha = 2$

$2BE^2 - 2\cos(90°+\beta)BE^2 = 25$

$2BE^2 + 2\sin\beta BE^2 = 25$

$2BE^2(1 + 2\sin\beta) = 25$

$9\cos^2\alpha + \left(3\sin\alpha + \frac{2}{\sin\alpha}\right)^2 = 4R^2$

$9 + \frac{4}{\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sin\alpha \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sin\alpha} = 4R^2$

$9 + \frac{4}{\sin^2\alpha} + 12 = 4R^2$

$9\cos^2\alpha + 9\sin^2\alpha + \frac{4}{\sin^2\alpha} + 12 = 4R^2$

$\cancel{AC = \frac{4}{\sin 2\alpha} \cdot 4} =$

$\frac{AC}{3\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{\sin\alpha}}{3}$

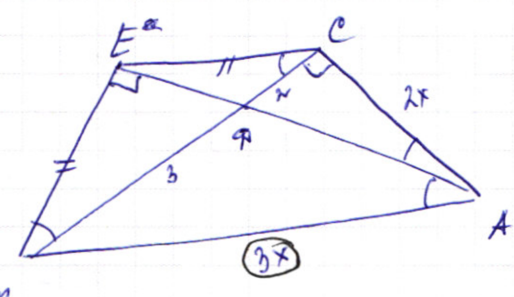
$AC = \frac{6\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{3} = 2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$25 + 4\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = 4R^2$

$21 + \frac{4}{\sin^2\alpha} = 4R^2$

$4 + 4\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{4}{\sin^2\alpha}$

$4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = 4.$



x 2x 900 − 3x

900−3x x 2x

$900 - 3x = x$

$900 = 4x$

$x = 225$

$(\cdot;\cdot;\cdot)$.

x 2x 900 − 3x

$900 - 3x = 2x \Rightarrow 900 = 5x$

$x = 225$ ~~300~~ 450 225

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)