МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

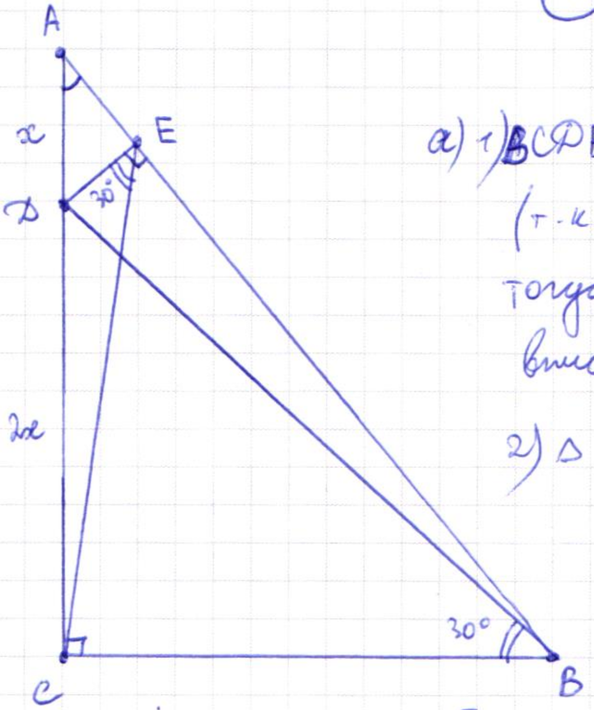
$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



Решение

а) 1) $BCDE$ – вписанный четырёхугольник (т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$)

тогда $\angle DBC = \angle DEC = 30°$ как вписанные углы опир. на одну дугу

2) $\triangle DCB$ – прямоугольный.

$$tg\, 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}x$$

$$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

б) 1) $tg\angle DAE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\angle DAE = \sqrt{\frac{1}{tg^2\angle DAE + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{3}+1}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\sin\angle DAE = \sqrt{1-\cos^2\angle DAE} = \sqrt{1-\frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{DE}{AD} = \sin\angle DAE = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{DE}{x} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$DE = \frac{2}{\sqrt{7}}x$$

2) Теорема косинусов для $\triangle DEC$:

$$DC^2 = DE^2 + EC^2 - 2DE\cdot EC\cdot\cos 30°$$

$$4x^2 = \frac{4}{7}x^2 + EC^2 - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}x\cdot EC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4

$$\frac{24}{7}x^2 + 2\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot x \cdot EC - EC^2 = 0 \quad \Big| : x^2$$

$$\frac{24}{7} + 2\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{EC}{x} - \left(\frac{EC}{x}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{EC}{x}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{EC}{x} - \frac{24}{7} = 0$$

$$D_1 = \frac{3}{7} + \frac{24}{7} = \frac{27}{7}$$

$$\frac{EC}{x} = \frac{\sqrt{\frac{3}{7}} + \sqrt{\frac{27}{7}}}{1} = \sqrt{\frac{3}{7}} + 3\sqrt{\frac{3}{7}} = 4\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$EC = 4\sqrt{\frac{3}{7}}\,x$$

3) $AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$$S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot 4\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: а) $tg \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{\Delta CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

1

a, b, c, x - члены геометрич. прогрессии со знаменателем d. Тогда

$$\begin{cases} b = a\cdot d & (1) \\ c = b\cdot d & (2) \\ x = c\cdot d & (3) \end{cases}$$

Найдём корни уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D_1 = b^2 - ac$

$x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$

Из (1) и (2) : $d = \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow c = \dfrac{b^2}{a}$

Значит $x = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - a \cdot \frac{b^2}{a}}}{a} = \dfrac{b}{a}$

Из (3) : $\dfrac{b}{a} = c \cdot d$

$d = c \cdot d$

$\boxed{c = 1}$

Ответ: третий член прогрессии равен 1.

3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 6y)^2 = y(x-6) - (x-6) \\ x - 6y \geq 0 \\ x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \\ x - 6y \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $(x-6) = p$; $(y-1) = q$

Тогда $p - 6q = x - 6 - 6y + 6 = x - 6y$

③

$$\begin{cases} (p-6q)^2 = pq \quad (1) \\ p^2 + 2q^2 = 18 \\ p - 6q \geq 0 \end{cases}$$

Решим (1)

$$p^2 - 12pq + 36q^2 = pq$$

$$p^2 - 13pq + 36q^2 = 0 \quad |:q^2$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 13\frac{p}{q} + 36 = 0$$

$q \neq 0$, т.к. в противном случае $p = 0$ и не выполняется $p^2+2q^2=18$

$$\left[\begin{aligned} \frac{p}{q} &= 4 \\ \frac{p}{q} &= 9 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} p &= 4q \\ p &= 9q \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} p = 4q \\ p^2+2q^2=18 \\ p-6q \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} p = 9q \\ p^2+2q^2=18 \\ p-6q \geq 0 \end{cases}$$

$$16q^2 + 2q^2 = 18 \qquad\qquad 81q^2 + 2q^2 = 18$$

$$18q^2 = 18 \qquad\qquad 83q^2 = 18$$

$$q^2 = 1 \qquad\qquad q^2 = \frac{18}{83}$$

$$\begin{cases} q = 1 \\ p = 4 \end{cases} \text{или} \begin{cases} q = -1 \\ p = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} q = \sqrt{\frac{18}{83}} \\ p = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \text{или} \begin{cases} q = -\sqrt{\frac{18}{83}} \\ q = -9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

Проверим найденные решения на условие $p-6q \geq 0$

$4 - 6\cdot 1 \geq 0$ — неверно

$-4 - 6\cdot(-1) \geq 0$ — верно

$9\sqrt{\frac{18}{83}} - 6\sqrt{\frac{18}{83}} \geq 0$ — верно

$-9\sqrt{\frac{18}{83}} - 6\cdot\left(-\sqrt{\frac{18}{83}}\right) \geq 0$ — неверно

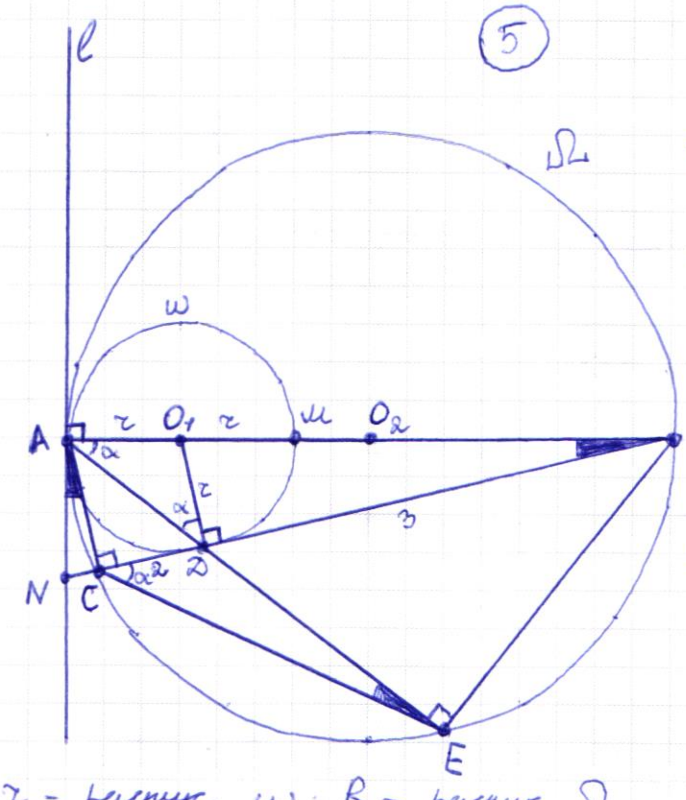
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} q = -1 \\ p = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} q = \sqrt{\frac{18}{83}} \\ p = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \\ x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(6;0)$; $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\ \sqrt{\frac{18}{83}}+6\right)$

⑤



r – радиус ω; R – радиус Ω.

Решение

1/ Так как окружности касаются внутренним образом, то их центры O_1 и O_2 лежат на одной прямой – AB – диаметре Ω, перпендикулярном общей касательной l.

2) По теореме о касательной и секущей для ω:

$BD^2 = BM \cdot BA$

$3^2 = BM \cdot (BM + 2r)$

$3^2 = BM^2 + 2BM \cdot r$

$BM^2 + 2r \cdot BM - 9 = 0$

$D_1 = r^2 + 9$; $BM = -r + \sqrt{r^2+9}$

(5)

3) $OD \perp BC$ как радиус, проведённый в т. касания

$AC \perp BC$ т.к. $\angle ACB$ вписанный, опирается на диаметр

$\Rightarrow OD \parallel AC$

По теореме о пропорциональных отрезках для угла ABC: $\frac{BO_1}{O_1A} = \frac{BD}{BC}$

$$\frac{-r+\sqrt{r^2+9}+r}{r} = \frac{3}{2}$$

$$3r = 2\sqrt{r^2+9}$$

$$9r^2 = 4(r^2+9)$$

$$5r^2 = 36$$

$$r = \frac{6}{\sqrt5} = \frac{6\sqrt5}{5}$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{2r - r + \sqrt{r^2+9}}{2} = \frac{\frac{6}{\sqrt5} + \sqrt{\frac{36}{5}+9}}{2} = \frac{\frac{6}{\sqrt5}+\frac{9}{\sqrt5}}{2} = \frac{15}{2\sqrt5} = \frac{15\sqrt5}{10} = \frac{3\sqrt5}{2}$$

4) $\cos\angle O_1BD = \frac{BD}{O_1B} = \frac{3}{r+\sqrt{r^2+9}-r} = \frac{3}{\sqrt{\frac{36}{5}+9}} = \frac{3\sqrt5}{9} = \frac{\sqrt5}{3}$

Теорема косинусов для $\triangle ABD$:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB\cdot BD\cdot\cos\angle O_1BD =$

$= (2R)^2 + 9 - 2\cdot 2R\cdot 3\cdot\frac{\sqrt5}{3} = 45 + 9 - 2\cdot 3\sqrt5\cdot\sqrt5 =$

$= 45 + 9 - 30 = 15 + 9 = 24$

$AD = 2\sqrt6$

5) $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (по 2-м углам: $\angle ABC$ – общий; $\angle ACB = \angle O_1DB = 90°$) $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{S_{\triangle ACB}}{S_{\triangle AO_1DB}}}$ $\frac{AC}{O_1D} = \frac{CB}{DB} = \frac{5}{3} = \frac{AC\cdot 5}{6\sqrt5}$

$AC = \frac{6\sqrt5}{3} = 2\sqrt5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

6) $S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3 = 3\sqrt{5}$

7) $\triangle ADB \sim \triangle ACE$ (по 2-м углам: $\angle ABD = \angle AEC$ как вписанные, опир. на одну дугу; $\angle ADB = \angle ACE = 90^\circ + \alpha$ ($\alpha = \angle O_1AD = \angle O_1DA = \angle ECB$ из равнобедренности $\triangle AO_1D$ и равенства вписанных углов)) $\Rightarrow \left(\frac{AD}{AC}\right)^2 = \frac{S_{ADB}}{S_{ACE}}$

$$\left(\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{3\sqrt{5}}{S_{ACE}}$$

$$S_{ACE} = \frac{3\sqrt{5}}{\frac{6}{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

8) По свойству пересекающихся хорд:

$$DC \cdot DB = DA \cdot DE$$

$$2 \cdot 3 = 2\sqrt{6} \cdot DE$$

$$DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

9) $\triangle DBE$ - прямоугольный; по т. Пифагора

$$BE = \sqrt{DB^2 - DE^2} = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$S_{DBE} = \frac{1}{2} DE \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{15}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2\cdot3\cdot3\cdot5}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

10) $S_{BACE} = S_{ADB} + S_{ACE} + S_{DBE} = 3\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4} =$

$$= \frac{12\sqrt{5}}{4} + \frac{10\sqrt{5}}{4} + \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ: $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

6

$8x - 6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1, & \text{если } 2x-1 \ge 0 \\ 1-2x, & \text{если } 2x-1 < 0 \end{cases}$

$|2x-1| = 1-2x$ при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$8x - 6(1-2x) \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$20x - 6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

Построим графики функций $f(x) = 20x-6$ и $g(x) = -8x^2+6x+7$ (см. след. лист) в одной системе координат

$y = g(x)$ - парабола; ветви направлены вниз, вершина $(\frac{3}{8}; 8\frac{1}{8})$

$g(1) = 5$

$g(-0,5) = 2$

$y = f(x)$ - прямая, возрастает

$f(-0,5) = -16$

$f(1) = 14$

По условию задачи нужно найти ~~в заштрихованной области~~ прямую, не перпендикулярную O_x, часть которой на отрезке $[-0,5; 1]$ лежала бы целиком в заштрихованной области. Это невозможно, т.к. „ширина" заштрихованной области меньше длины отрезка $[-0,5; 1]$. (Прямая и парабола пересекаются в некоторой точке отрезка $[0; 1]$.)

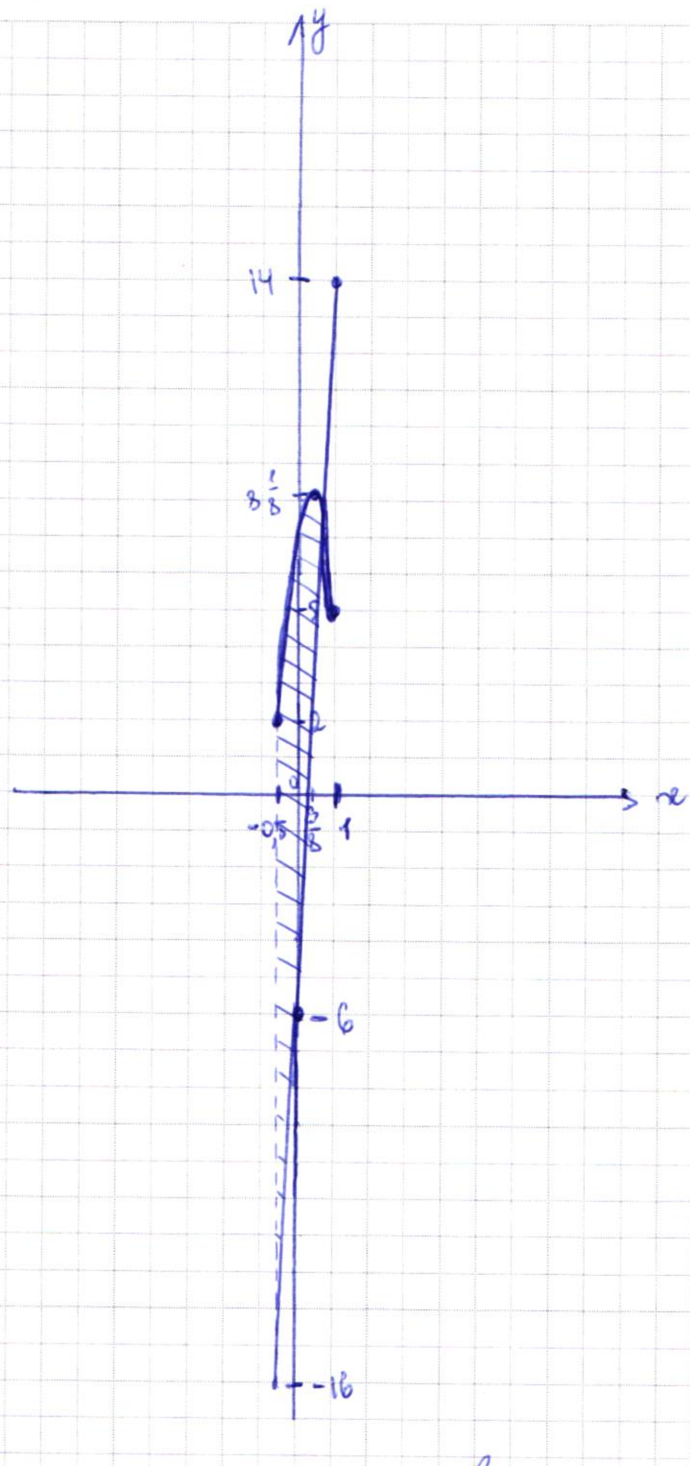
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Ответ: таких пар a и b нет.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b = a\cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{b}{a}} \\ c = b\cdot d \\ \left[\begin{array}{l} \frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} = c\cdot d \\ \frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} = c\cdot d \end{array}\right. \end{cases}$$

$ax^2-2bx+c=0$

$D_1 = b^2 - ac$

$x_{1,2} = \frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

$$\boxed{c = \frac{b^2}{a}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{b+\sqrt{b^2-a\cdot\frac{b^2}{a}}}{a} \\ \frac{b-\sqrt{b^2-a\cdot\frac{b^2}{a}}}{a} \end{array}\right.$$

$\frac{b}{a}$

$$\begin{cases} b = a\cdot d \Rightarrow \frac{b}{a} = d \\ c = b\cdot d \\ \frac{b}{a} = c\cdot d \end{cases}$$

$d = c\cdot d$

$\boxed{c = 1}$

$y(x-6)-(x-6)$

$(x-6)(y-1)$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2 = xy-6y-x+6 \\ x^2+y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$\boxed{x \geq 6y}$

$(x-6)(y-1) = (x-6y)^2$

$x^2-12x+36+y^2-4y+4-20=0$

$(x-6)^2+(y-2)^2 = 20$

$2y^2-4y+2 =$

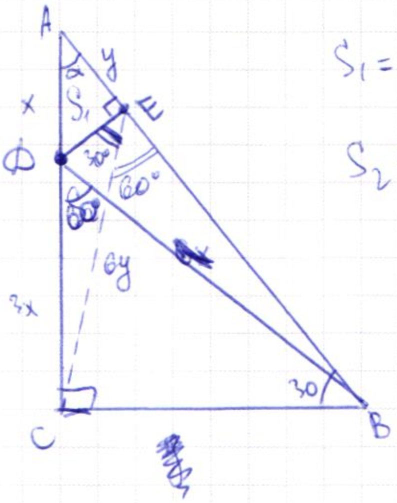
$=2(y^2-2y+1) = 2(y-1)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$S_1 = \frac{1}{2} AD \cdot EH = \frac{1}{2} AE \cdot DE \cdot \sin 90°$

$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot EH = \frac{1}{2} CE \cdot DE \cdot \sin 30°$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AD}{CD} = \frac{AE \cdot \sin 90°}{CE \cdot \sin 30°} = \frac{AE}{\frac{1}{2} CE} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} CE = 3AE$

$CE = 6AE$

$(4x)^2 = y^2 + (6y)^2 - 2(y \cdot 6y) \cdot \cos 120°$

$16x^2 = y^2 + 36y^2 + \cancel{-2 \cdot 6y^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$

$16x^2 = 43y^2$

$4x = y\sqrt{43}$

$\cancel{S_{CED} =}$

$\frac{y}{x} = \frac{4}{\sqrt{43}} = \cos\alpha$ $\quad AC = 4x = \sqrt{7}$; $\quad x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$y = \frac{4x}{\sqrt{43}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = 4\sqrt{\frac{7}{43}}$

$tg^2\alpha \cancel{\frac{1}{\cos^2\alpha}} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$P_{CED} = \frac{y + 6y + 4x}{2} = \frac{7y}{2} + 2x$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{43}{16}$

$S_{CED} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$tg^2\alpha = \frac{27}{16} = \frac{9 \cdot 3}{16}$

$\boxed{tg\,\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4}}$

$= \sqrt{}$

$6^2 - 4^2 =$

$= 36 - 16 = \sqrt{20}$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha + 1}}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ +\,45 \\ \hline 81 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

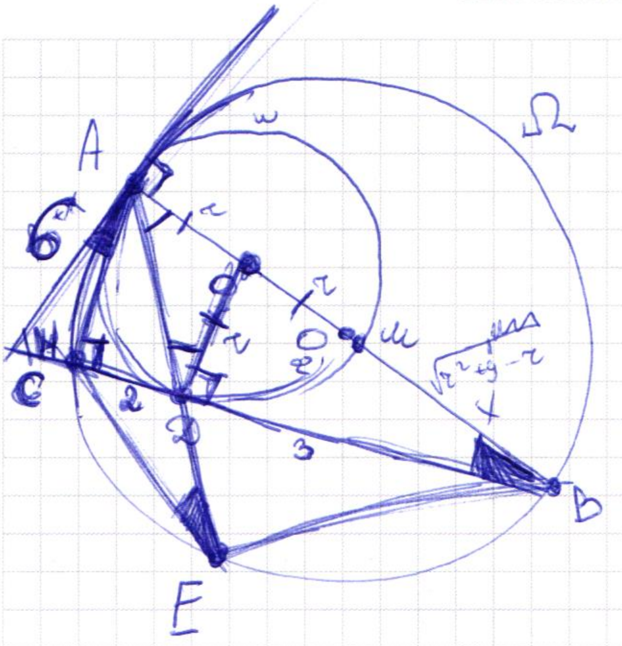
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(BM+r)^2 = r^2+3^2$

$BM^2 + 2BM\cdot r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 3^2$

$BM^2 + 2BM\,r - 9 = 0$

$D_{\text{отн } BM} = r^2+9$

$BM = \dfrac{-r \pm \sqrt{r^2+9}}{1} = \sqrt{r^2+9} - r$

$BM \cdot BA = 3^2$

$(\sqrt{r^2+9} - r)\cdot(\sqrt{r^2+9} - r + 2r) = 9$

$(\sqrt{r^2+9} - r)(\sqrt{r^2+9} + r) = 9$

$r^2+9-r^2 = 9$

$2\cdot 3 = AD\cdot DE$

$9 = x\cdot(x+2r)$

$9 = x^2+2rx$

$r = \dfrac{9-x^2}{2x} = \dfrac{9}{2x} - \dfrac{x}{2}$

~~$(2+x)^2 + (2r + \sqrt{r^2+9} - r)^2 = (5+x)^2$~~

~~$4 + 4x + x^2 + r^2+9 + 2r\sqrt{r^2+9} + r^2 = 25 + 10x + x^2$~~

~~$2r^2 + 2r\sqrt{r^2+9} = 12+6x$~~

~~$r^2 + r\sqrt{r+9} = 6 + 3x$~~

~~$\dfrac{r^2 + r\sqrt{r+9}}{3} = 2+x$~~

$(2+x)^2 = x\cdot(x+5)$

$4 + 4x + x^2 = x^2 + 5x$

$4 = x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$(x-6y)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$$\begin{cases} (p-6q)^2 = pq \\ p^2+2q^2=18 \end{cases}$$

~~$-8x^2+6x+7=0$~~

~~$D_1 = 9+56=65$~~

$$\begin{cases} x-6=p \\ y-1=q \quad |\cdot(-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6=p \\ -6y+6=6q \end{cases}$$

$x-6-6y+6=p-6q$

$x-6y=p-6q$

$$\begin{cases} p^2-12pq+36q^2=pq \\ p^2+2q^2=18 \end{cases}$$

$x=$

$8x^2-6x-7=0$

$D_1=9+56=65$

$x=\frac{3\pm\sqrt{65}}{8}$

$p^2-13pq+36q^2=0$

$\frac{p^2}{q^2}-13\frac{p}{q}+36=0$

$x-6=0$

$y-1=0$

$\frac{p}{q}=4$ $\quad$ $\frac{p}{q}=9$

$x=6$

$y=1$

$\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$

$p=4q$ или $p=9q$

$16q^2+2\cdot q^2=18$

$18q^2=18$

$q=\pm1$

$p=\pm4$

$36+2-72-4+20$

36

$8x-6(2x-1)\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$8x-12x+6\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

$-4x+6\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

n

0.75

$-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+6=$

$=2+6=8$

$8\le ax+b\le$

$-8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+7=$

$=-2-\frac{3}{2}+7=$

$=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

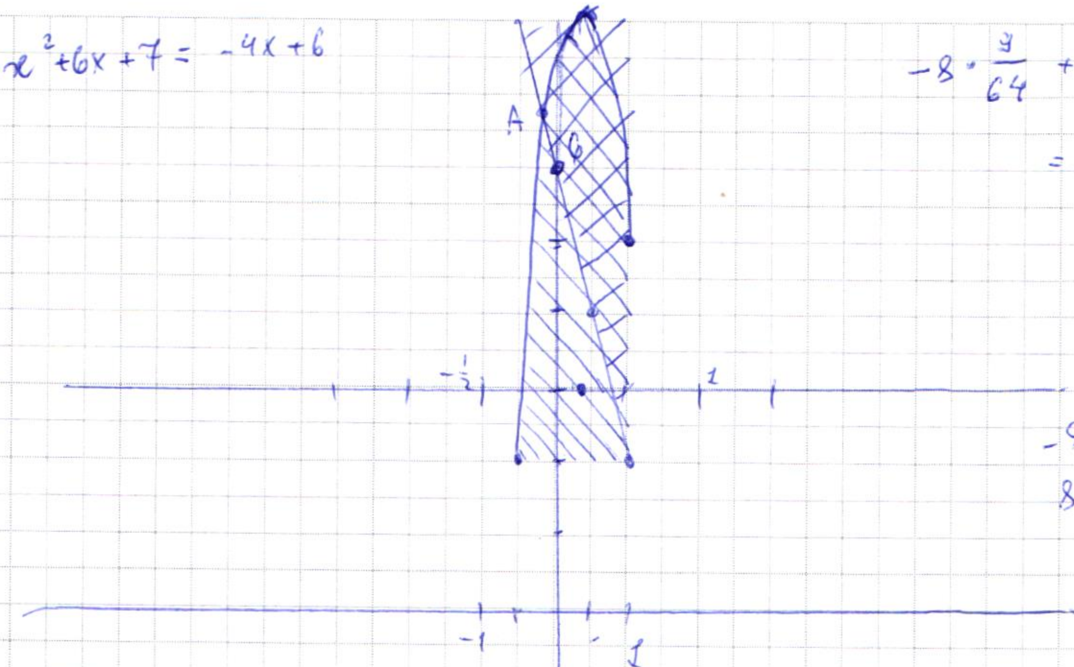
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-8x^2+6x+7 = -4x+6$



$-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 =$

$= -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 =$

$7+\frac{9}{8} =$

$= 8\frac{1}{8}$

$-8x^2+6x+7=5$

$8x^2-6x-2=0$

$4x^2-3x-1=0$

$D = 9+16=25$

$x = \frac{3\pm5}{8}$ $x=1$ $x=-\frac{1}{4}$

$-8\cdot1+6\cdot1+7$

$= -8+6+7=$

$=$

$-8x^2+6x+7 = 20x-6$

$8x^2+14x-13=0$

$D_1 = 49+104=155$

$x_в = \frac{6}{-16} =$

$= \frac{3}{8}$

$y_в = -8\cdot\frac{9}{64}+$

$+6\cdot\frac{3}{8}+7 =$

$= -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7$

$= 7+\frac{9}{8} =$

$= 8\frac{1}{8}$

$-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+6\left(-\frac{1}{2}\right)+7=$

$= -8\cdot\frac{1}{4}-3+7=$

$= -2-3+7=$

$=2$

$-8x^2+6x+7=2$

$8x^2-6x-5=0$

$D_1 = 9+40=49$

$x_{1,2} = \frac{3\pm7}{8} =$

$= \frac{10}{8};\ -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$20x - 6 = -8x^2 + 6x + 7$$

$$8x^2 + 14x - 13 = 0$$

$$\frac{\times \overset{2}{13}\ \ \\ \ \ 8}{104}$$

$$D_1 = \underset{49}{\cancel{\ }} + 104 = 153$$

$$x_{2} = \frac{-7 + \sqrt{153}}{8} = \frac{\sqrt{153} - 7}{8}$$

$$\sqrt{144} < \sqrt{153} < \sqrt{169}$$

$$12 < \sqrt{153} < 13$$

$$5 < \sqrt{153} - 7 < 6$$

$$\frac{5}{8} < \frac{\sqrt{153} - 7}{8} < \frac{6}{8}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)