МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1:

По опр. геом. прогрессии $\{e_n\}$: ~~[illegible]~~ $e_{n+1} = q \cdot e_n$, где q — знаменатель геом. прогрессии. Найдем корни $ax^2 - 2bx + c = 0$. $x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$. Тогда есть 2 случая (потому что 2 корня кв. ур.):

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = q \cdot a \\ c = q^2 \cdot a \\ \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = q^3 \cdot a \end{cases} \\ \begin{cases} b = q \cdot a \\ c = q^2 \cdot a \\ \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = q^3 \cdot a \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = q \cdot a \\ c = q^2 \cdot a \\ \frac{qa + \sqrt{q^2a^2 - q^2a^2}}{a} = q^3 a \end{cases} \\ \begin{cases} b = q \cdot a \\ c = q^2 \cdot a \\ \frac{qa - \sqrt{q^2a^2 - q^2a^2}}{a} = q^3 a \end{cases} \end{array}\right.$$

— в обеих системах $D = 0$ у решения квадратного уравнения => случай только один => $\begin{cases} b = qa \\ c = q^2 a \\ \frac{qa}{a} = q^3 a \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = qa \\ c = q^2 a \\ q = q^3 a \\ a \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} q \in R \\ a = b = c = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

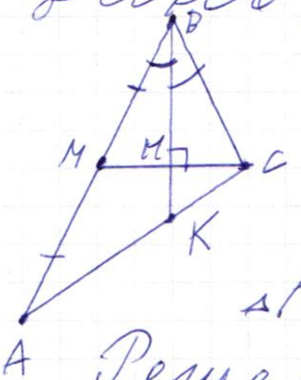
$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = qa \\ c = q^2 a = 1 \\ a \neq 0,\ q \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} q = 0 \\ b = c = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} q \in R \\ a = b = c = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ c = 0 \end{array}\right.$

Ответ: $\{0; 1\}$.

Задание 2: Случай 1: биссектр. и мед. из разных вершин

$\exists$ $\triangle ABC$, в котором не умаляя общности биссектриса $BK \perp$ медиане CM. При изменении букв длины сторон сохранятся, и новый треугольник будет равен $\triangle ABC$. Найдем количество подходящих $\triangle ABC$.

Дано: $\angle ABK = \angle CBK = \frac{1}{2}\angle ABC$



$AM = BM$; $M \in [AB]$; $CM \perp BK$

$P_{ABC} = 900$; $|AB|, BC, AC \in \mathbb{N}$

Найти: кол-во подходящих $\triangle ABC$

Решение: 1) $\exists$ $BK \cap CM = \{H\}$. Р. $\triangle BMH$ и $\triangle BCH$. У них $\angle BHM = \angle BHC = 90^\circ \Rightarrow$ они прямоуг.; BH — общ; $\angle MBH = \angle CBH$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle BMH = \triangle BCH$ по кат. и прил. острому углу $\Rightarrow BC = BM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow$ $P_{ABC} = 3CB + AC$. 2) $\exists$ $\angle ABK = \angle CBK = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 2\alpha$; $\angle BMH = 90^\circ - \alpha$; $\angle AMC = \alpha + 90^\circ$. По т. косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 2\alpha = 5BC^2 - 4BC^2 \cos 2\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow AC = BC\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha} \in \mathbb{N}$. $\cos 2\alpha$ $\in [-1; 1] \Rightarrow 4\cos 2\alpha \in [-4; 4] \Rightarrow 5 - 4\cos 2\alpha \in [1; 9]$, при этом $\sqrt{5 - 4\cos 2\alpha} \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5-4\cos 2\alpha = 1 \\ 5-4\cos 2\alpha = 4 \\ 5-4\cos 2\alpha \ 9 \end{array}\right.$ — все квадраты целых чисел, попадающие в $[1;9]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

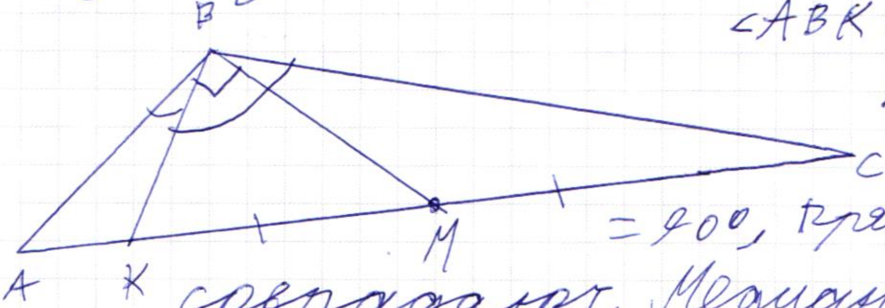
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение задания 2).

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 1\\ \cos 2\alpha = \frac{1}{4}\\ \cos 2\alpha = -1\end{array}\right.$, но $2\alpha = \angle ABC \in (0^\circ; 180^\circ) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha \in (-1;1) \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow AC = 2BC = AB \Rightarrow P_{ABC} = 5BC = 900 \Rightarrow BC = 180$ — один тр-к есть

Случай 2: биссектриса и медиана из одной вершины.



$\angle ABK = \angle CBK = \frac{1}{2}\angle ABC$

$AM = CM$; $BK \perp BM$

Поскольку $\angle KBM = 90^\circ$, прямые BK и BM не совпадают. Медиана $\triangle ABC$ является чевианой $\triangle KBC$, но $\angle KBM = 90^\circ \Rightarrow \angle KBC > 90^\circ \Rightarrow \angle ABC > 180^\circ \Rightarrow$ (?!) $\Rightarrow$ такого случая не существует! Ответ: 1 треугольник.

Задание 4: Дано:

$\triangle ABC$ — прямоуг., $\angle C = 90^\circ$; $DE \perp AB$; $AC = 7$

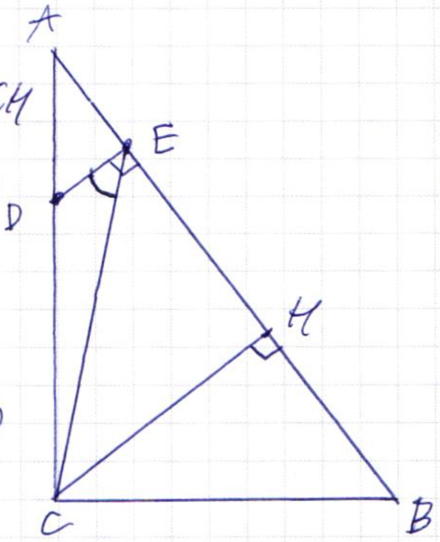
$D \in [AC]$; $E \in [AB]$; $AD : AC = 1:3$; $\angle CED = 30$

Найти: $tg \angle BAC$; S_{CED}

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(продолжение задания 4).

Решение:



1) Опустим из (·)C высоту CH на AB. $CH \perp AB \perp DE \Rightarrow CH \parallel DE$.
$AD : AC = 1:3 \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ по т. Фалеса $\frac{AE}{EH} = \frac{1}{2}$

2) $\angle DEH = 90^\circ$ (по усл.), $\angle CED = 30^\circ \Rightarrow \angle BEC = 60^\circ$, $EH = EC \cdot \cos\angle BEC = \frac{1}{2} EC \Rightarrow AE = \frac{1}{4} EC$.

3) В $\triangle AEC$ $\angle AEC = \angle AED + \angle CED = 120^\circ$.
По т. косинусов $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2 \cdot AE \cdot EC \cdot \cos\angle CED = AE^2 + 16AE^2 - 2 \cdot AE \cdot 4AE \cdot (-\frac{1}{2}) = 21AE^2 \Rightarrow AC = \sqrt{21}AE$
$\Rightarrow AD = \frac{1}{3}AC = \sqrt{\frac{7}{3}}AE \Leftrightarrow AE = \sqrt{\frac{3}{7}}AD$.

4) По т. Пифагора в $\triangle AED$ $AD^2 = AE^2 + DE^2$
$\Rightarrow DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \frac{2}{\sqrt{7}}AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}AE$, $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5) $S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \cdot \sin\angle CED$, $EC = 4AE = \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot \cancel{AD} \cdot DE = 2\sqrt{3}DE \Rightarrow S_{CED} = \frac{1}{4} \cdot DE \cdot 2\sqrt{3}DE = \frac{\sqrt{3}}{2}DE^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{7}}AD\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot AD^2 = \frac{2\sqrt{3}}{63}AC^2 = \frac{2\sqrt{3}}{63} \cdot \sqrt{7}^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Задание 6:

$f(x) = 8x - 6|2x-1|$; $g(x) = -8x^2 + 6x + 7$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = 20x - 6 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -4x + 6 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ кусочно-линейная функция

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

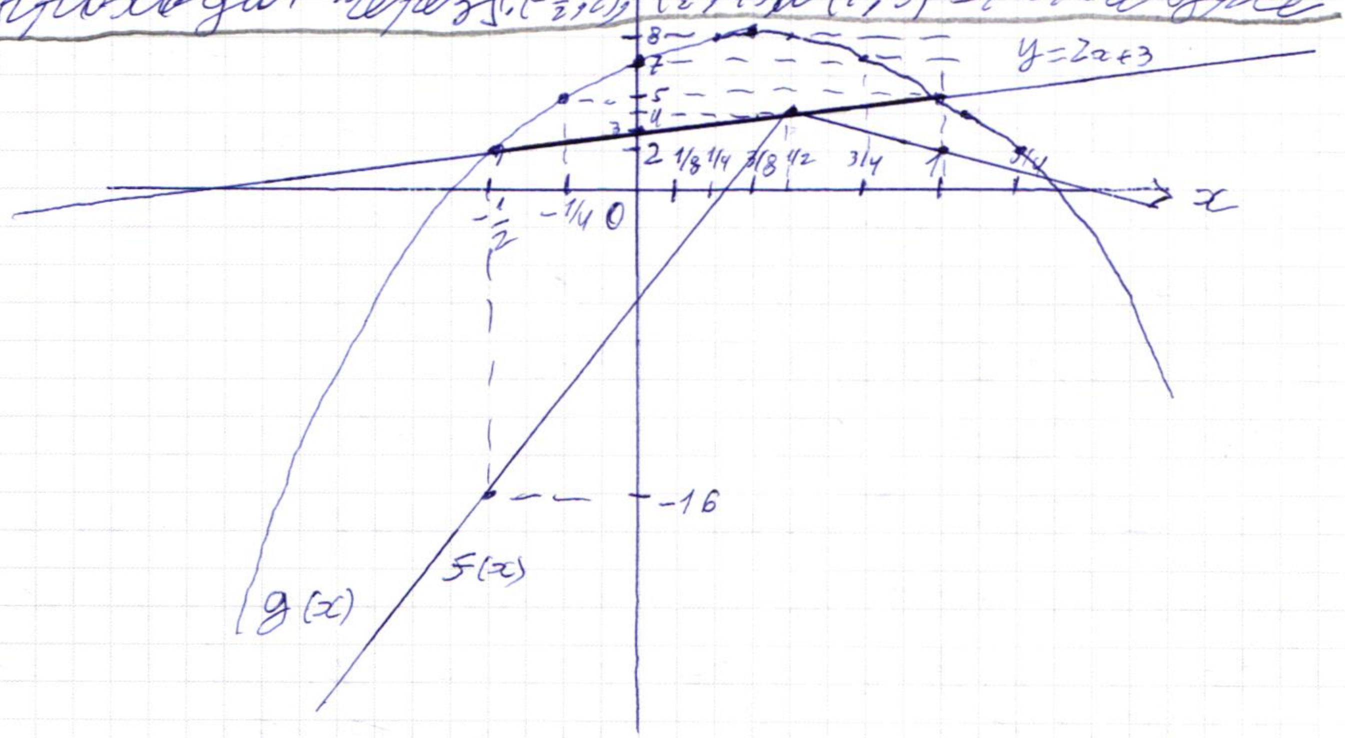
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение задания 6):

$f(-\frac{1}{2}) = -16$; $f(\frac{1}{2}) = 4$; $f(1) = 2$

g — парабола; вершина в $x = \frac{3}{8}$; $g(\frac{3}{8}) = 8\frac{1}{8}$; $g(\frac{1}{4}) = g(\frac{1}{2}) = 8$; $g(0) = g(\frac{3}{4}) = 7$; $g(1) = g(-\frac{1}{4}) = 5$; $g(-\frac{1}{2}) = g(\frac{5}{4}) = 2$. Построим графики $f(x)$ и $g(x)$. График $ax+b$ должен лежать между графиками $f(x)$ и $g(x)$ для $\forall x \in [-\frac{1}{2}; 1] \Rightarrow 4 \le a\frac{1}{2} + b \le 8 \wedge 2 \le a + b \le 5 \wedge -16 \le a(-\frac{1}{2}) + b \le 2$

Прямая $y(x) = 2x + 3$ проходит через $\{(-\frac{1}{2}; 2), (\frac{1}{2}; 4)$ и $(1; 5) \Rightarrow$ она уже



„прижата" граничными точками и сверху и снизу (видно на графике) $\Rightarrow$ других прямых, подх. условию, нет. **Ответ: $\{(2; 3)\}$.**

Задание 7: $\forall a \in \mathbb{R}_+$ $f(a) = f(1\cdot a) = f(1) + f(a)$ $\Rightarrow f(1) = 0$. $\forall b \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ $f(b) = 0$ $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}_+$ $f(a) + f(b) = f(a) = f(ab) \Rightarrow b = 1 \Rightarrow (?!)$ $\Rightarrow x = 1$ — единственный корень $f(x) = 0$

$\forall c \in \mathbb{R}_+$ $f(1) = 0 = f(c\cdot\frac{1}{c}) = f(c) + f(\frac{1}{c}) \Rightarrow f(\frac{1}{c}) = -f(c)$. $f(2) = [2/2] = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -1$; $f(3) = [3/2] = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = -1$; $f(5) = [5/2] = 2 \Rightarrow f(1/5) = -2$; $f(7) = [7/2] = 3 \Rightarrow f(\frac{1}{7}) = -3$; $f(11) = 5 \Rightarrow f(\frac{1}{11}) = -5$; $f(13) = 6 \Rightarrow f(1/13) = -6$; $f(17) = 8 \Rightarrow f(1/17) = -8$; $f(19) = 9 \Rightarrow f(1/19) = -9$. $f(4) = f(2) + f(2) = 2 \Rightarrow f(1/4) = -2$. $f(6) = f(2) + f(3) = 2 \Rightarrow f(1/6) = -2$, $f(8) = f(4) + f(2) = 3 \Rightarrow f(1/8) = -3$, ...

Так можем задать функцию для всех натур. $x \in [2; 22]$ и обратных им.

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$; $f(10) = f(2) + f(5) = 3$; $f(12) = f(2) + f(6) = 3$; $f(14) = f(2) + f(7) = 4$; $f(15) = f(3) + f(5) = 3$; $f(16) = f(4) + f(4) = 4$; $f(18) = f(2) + f(9) = 3$; $f(20) = f(2) + f(10) = 4$; $f(21) = f(3) + f(7) = 4$; $f(22) = f(2) + f(11) = 6$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Пары упорядоченные, переберём все x и выберем для них все y такие что $f(x) < f(y)$. Построим график $f(x)$ в целых точках:

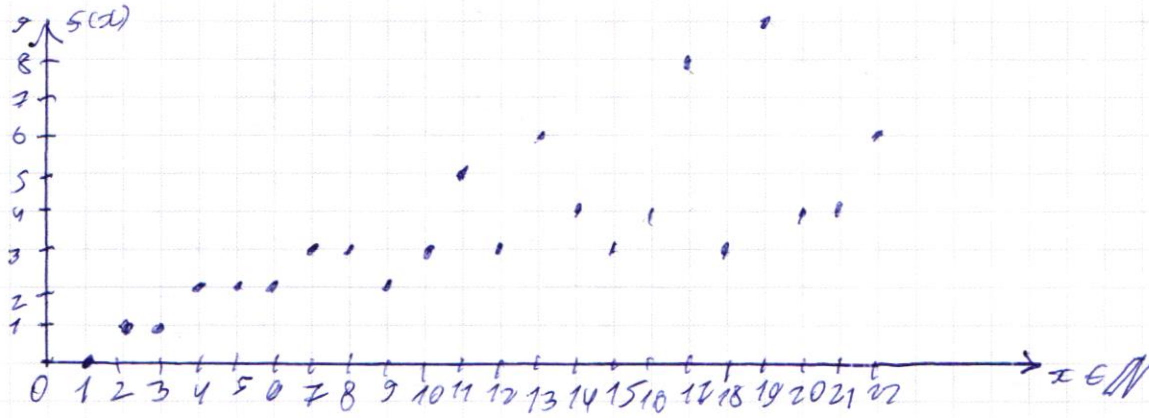
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Для каждой точки просто посчитаем, сколько точек над ней, и просуммируем все, т.к. пары упорядоченны.

2 − 19, 3 − 19, 4 − 15, 5 − 15, 6 − 15, 7 − 9, 8 − 9, 9 − 13, 10 − 9, 11 − 4, 12 − 9, 13 − 2, 14 − 5, 15 − 9, 16 − 5, 17 − 1, 18 − 9, 19 − 0, 20 − 5, 21 − 5, 22 − 2

Ответ: 179.

Задание 3:

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6+6-6y=\sqrt{y(x-6)-1(x-6)} \\ x^2+2y-12x-4y+20= \end{cases} \xLeftrightarrow{\exists a=x-6;\ b=y-1}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+12a+36+2b^2+4b+2-12a-72-4b-4+20=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq 0 \wedge b\geq 0 \\ a\leq 0 \wedge b\leq 0 \end{array}\right. \\ a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq 0 \wedge b\geq 0 \\ a\leq 0 \wedge b\leq 0 \end{array}\right. \\ (a-4b)(a-9b)=0 \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (см. на след. странице)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) (продолжение задания 3).

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 18b^2-18=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 83b^2-18=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=9\sqrt{18/83} \\ b=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b=-\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \end{array}\right. \xLeftrightarrow[y=b+1]{x=a+6}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y=1-\sqrt{18/83} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\{(10;2);(2;0);(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6;\sqrt{\frac{18}{83}}+1);(6-9\sqrt{\frac{18}{83}};4-\sqrt{\frac{18}{83}})\}$.

Задание 5:

Дано:

$\Omega=\mathcal{O}(O_1;R_1);\ \omega=\mathcal{O}(O_2;R_2);\ R_1>R_2$

$AO_1=BO_1=R_1;\ O_1\in[AB];\ BC\perp O_2D$

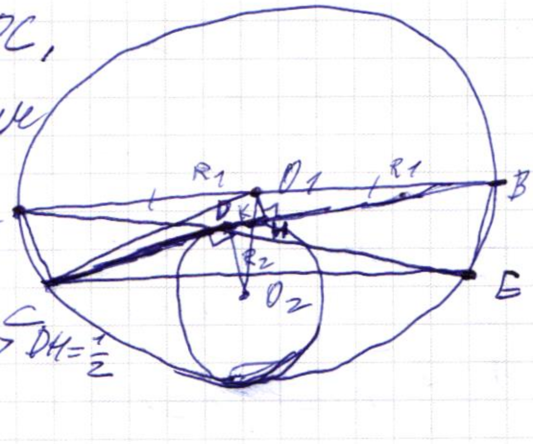
$[AD)\cap\Omega=\{A;E\};\ CD=2;\ BD=3$

Найти: $R_1;\ R_2,\ S_{BACE}$

Решение:

1) $S_{BACE}=\frac{1}{2}AE\cdot BC\cdot\sin\angle ADC$,

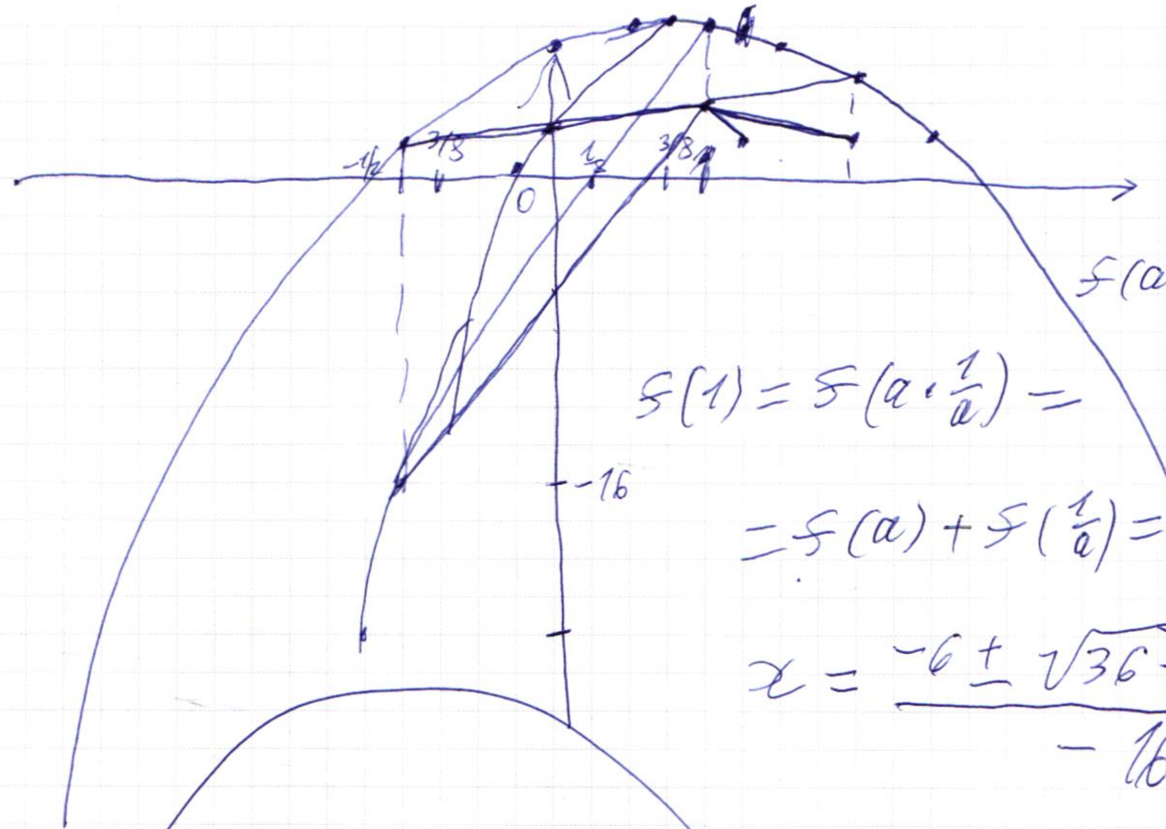
$O_1O_2\cap BC=\{K\}$, опускаем из O_1 перп. O_1H на BC



2) O_1H – высота в р/б $\triangle CO_1B$ с осн. $BC \Rightarrow BH=CH=2,5 \Rightarrow DH=\frac{1}{2}$

~~3) ...~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



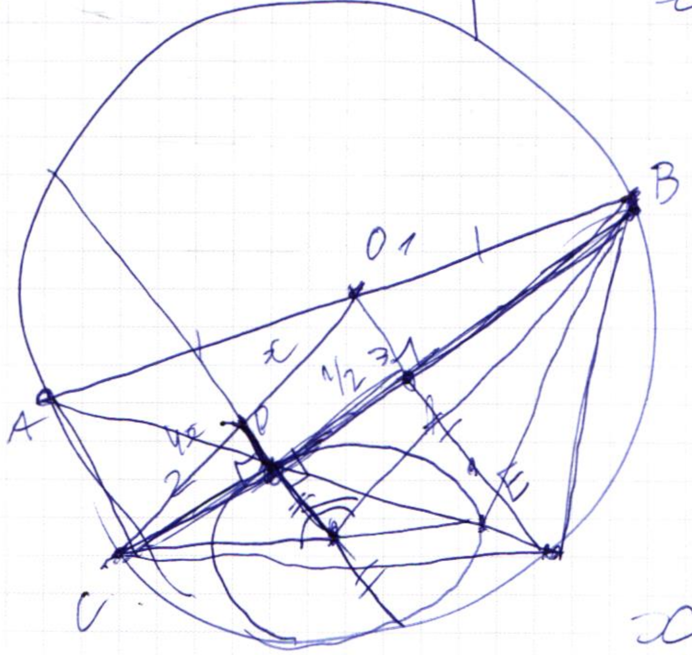
$f(a) = -f(a)$

$f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) =$

$= f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36+224}}{-16}$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{65}}{-8}$



$x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \to -4x+6$

$f(ab) = f(b) \Rightarrow a=1$

$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$f(0) = \cancel{\ldots}$

$8x - 6|2x-1| =$

$f(5) = 2$

$= 20x - 6$

$-\frac{9}{8} + 6\,\frac{3}{8} = 9/8$

$8\,\frac{1}{8}$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$\cancel{b^2+2b+1}$

$a^2+12a+36+2b^2+4b+2-12a-72-4b-4+$

$+20=0$ $\begin{cases} a^2+2b^2+18=0 \\ a^2-13ab+36b^2=0 \end{cases}$

$a^2-4ab-(9ab-36b^2)=a(a-4b)-9b(a-4b)=0$

$\cancel{34b^2-ab+18=0}$

$\cancel{b=\frac{a\pm\sqrt{a^2-34\cdot18}}{2}}$

$a=\sqrt{2(b-9)(b+9)}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0$

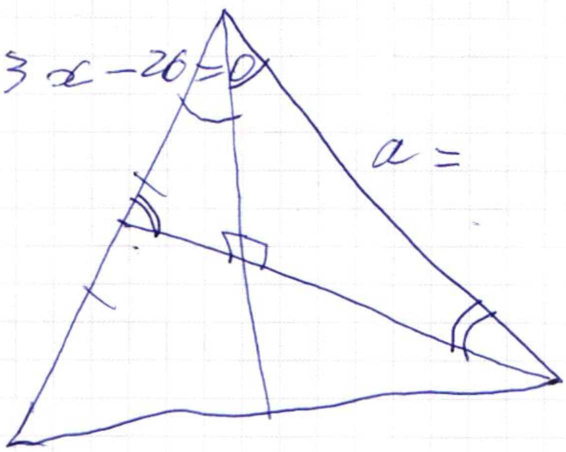
$x^2+2y^2-10xy-4y-12x+20=0$

$xy-6y-x+6=$ $a=x-6$

$=y(x-6)-1(x-6)=$

$34y^2-13xy+10y+$ $=(y-1)(x-6)=(x-6y)(x-6y)$

$+13x-26=0$



$x^2-12xy+36y^2=$

$a=$

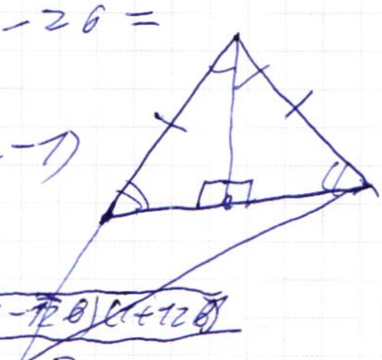
$=xy-6y-x+6$

$x-6y=x-6+6-6y=$

$x(x-6)-6x+$

$+2y^2-4y+20$

$34y^2+10y-26=$



$=13x(y-1)$

$=x(x-6)+2y(y-1)$

$=b\ \frac{1\pm\sqrt{(1-12b)(1+12b)}}{2}$

$=(x-6)-6(y-1)$ $6x-2y+20$

$\sqrt{ab}=a-6b \iff$

$a^2-ab+36b^2=0$

$a=\frac{b\pm\sqrt{b^2-144b^4}}{2}$

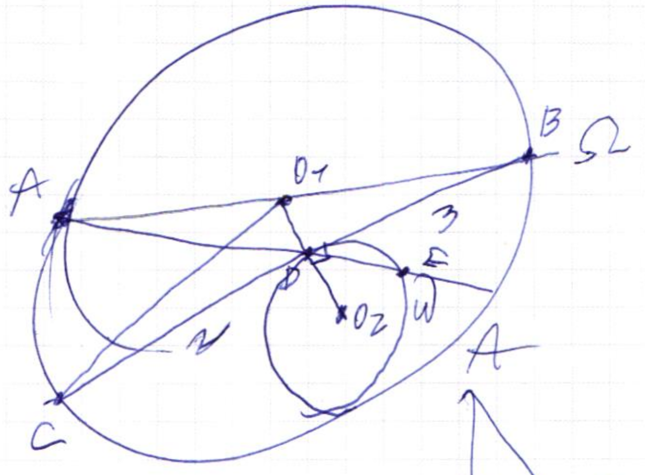
$]\ a=x-6;\ b=y-1$

☑ черновик ☐ чистовик

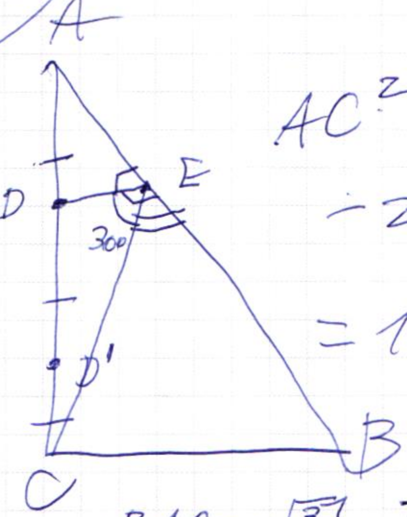
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

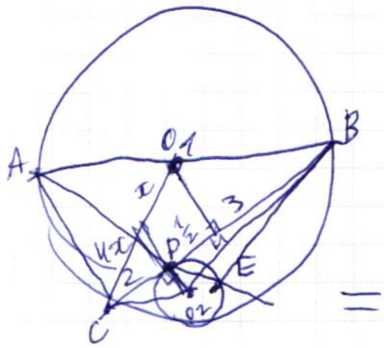
(Нумеровать только чистовики)



$$AEC = 120^\circ$$



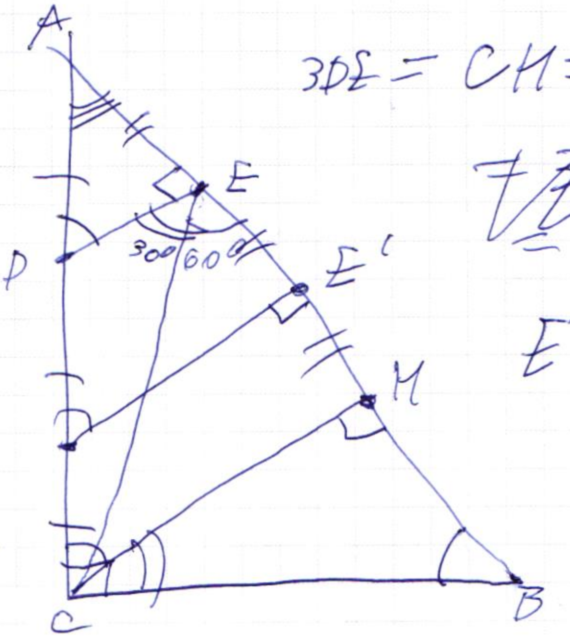
$$AC^2 = AE^2 + \cancel{\ldots}\ 16AE^2$$
$$- 2\cdot AE\cdot 4AE\cdot\cos 120^\circ$$
$$= 17AE^2 + 4AE^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{21}\,AE$$



$$\Rightarrow \cos\angle BAC = \sqrt{\tfrac{3}{7}} \quad \Rightarrow AD = \sqrt{\tfrac{7}{3}}\,AE$$

$$\frac{AC\cdot BC}{3AD\cdot AB} = \frac{CH}{3AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$$

$$S = \frac{AC\cdot BC}{2} = AB\cdot CH/2 \Rightarrow CH = \frac{AC\cdot BC}{AB}.$$



$$3DE = CH = \sqrt{AH\cdot BH} =$$

$$\cancel{\Rightarrow 3DE = AH\cdot BH}$$

$$AE = \frac{1}{4}EC$$

$$EH = \frac{1}{2}EC$$

$$\cancel{\frac{CH}{AC} = AC}$$

$$\frac{CH}{AH} = \frac{BC}{AC}$$

$$120^\circ - ECB = \angle ADE = \angle CBA = DCE + 30^\circ$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)