

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

По т. Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = ac \end{cases}$$

$$(ac = \frac{b}{q} \cdot b \cdot q = b^2)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = b \\ x_1 x_2 = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2 \end{cases}$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)^2 \quad (*)$$

$$(*) \quad 4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2$$

$$4x_1 x_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

$$x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 2b \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 = b$$

$x_1 = x_2 = b$ получаем, что 2 и 4 имеют

общ. прогрессии равны, значит знаменатель
прогрессии $q = 1$ или $q = -1$

будем считать x_1 - четвертым членом прогрессии

значит либо:

Ⓘ $q = 1$ значит $a = b = c = x_1$, тогда
 $ax^2 - 2bx + c = 0 \mid : a, a \neq 0$ м.к. змен. пом. пропр.

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$x = 1 \text{ т.е. } x_1 = 1, \text{ значит } c = \frac{x_1}{q} = \\ = \frac{x_1}{1} = x_1 = 1$$

Ⓜ $q = -1$ значит $a = -b = c = -x_1$, тогда

$$ax^2 - 2bx + c = 0 \mid : a, a \neq 0$$

$$x^2 - 2 \frac{b}{a} x + 1 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

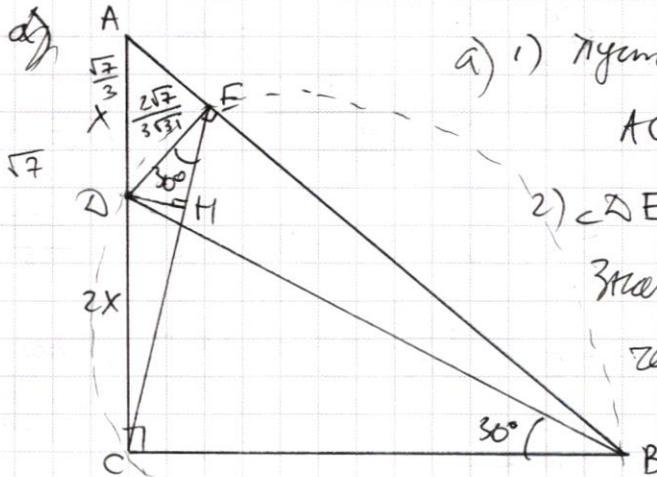
$$x = -1 \text{ т.е. } x_1 = -1, \text{ значит } c = \frac{x_1}{q} = \\ = \frac{x_1}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Во всех случаях получили $c = 1$

Ответ: 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) 1) Пусть $AD = x$, тогда

$$AC = 3x \quad \text{значит } DC = 2x$$

$$2) \angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

значит $\angle DEB$ - впис.

цент. (по окружности

впис. цент.)

б) 3)

$\angle DEC$ и $\angle DCB$ - впис. и центр. на одну дугу DC
значит $\angle DCB = \angle DEC = 30^\circ$

$$4) \text{ в } \triangle DCB: \operatorname{ctg} \angle DCB = \frac{CB}{DC} \Rightarrow CB = \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot DC =$$

$$= \frac{2x \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$5) \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = \sqrt{7}$

$$1) AD = \frac{1}{3} AC = \frac{\sqrt{7}}{3}; \quad CB = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{21}}{9}, \quad DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

2) в $\triangle ACB$ по т. Пифагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{7 + \frac{4 \cdot 21}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{567 + 84} =$$

$$= \frac{\sqrt{651}}{3} = x \sqrt{3 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = x \sqrt{9 + \frac{4}{3}} = x \sqrt{\frac{31}{3}}$$

$$3) \sin \angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{\frac{2\sqrt{21}}{9}}{x \sqrt{\frac{31}{3}}} = \frac{2}{\sqrt{31}} = \frac{2\sqrt{31}}{31}$$

$$4) \text{ в } \triangle ADE: \text{ в } DE = \sin \angle BAC \cdot AD = \frac{2\sqrt{31}}{31} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{31}}$$

5) в $\triangle AEC$ проведем высоту DH

$$6) \text{ в } \triangle AHE: DH = AE \cdot \sin 30^\circ = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{31}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{31}}$$

$$7) \angle ADE = 90^\circ - \angle AEC \Rightarrow \operatorname{ctg} \angle ADE = \operatorname{tg} \angle AEC = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$8) \operatorname{ctg}^2 \angle DAE + 1 = \frac{1}{\sin^2 \angle DAE} \quad 0^\circ < \angle DAE < 90^\circ \Rightarrow \Rightarrow \operatorname{ctg} \angle DAE > 0$$

$$\sin \angle DAE = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{4}{27} + 1}} = \sqrt{\frac{27}{4+27}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$$

$$9) \angle CAE = 180^\circ - \angle DAE \Rightarrow \sin \angle DAE = \sin \angle CAE = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$$

$$10) \sin^2 \angle CAE + \cos^2 \angle CAE = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}} \cdot 1 \quad \angle CAE \text{ тупой}$$

т.к. $\angle CAE = 180^\circ - \angle ABC$
 $\angle ABC < 90^\circ$
 $\angle CAE > 90^\circ \Rightarrow \cos \angle CAE < 0$

$$\cos \angle CAE = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle CAE} =$$

$$= -\sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{31 - 27}{31}} = -\frac{2}{\sqrt{31}}$$

11) по т. косинусов в $\triangle CAE$

$$EC^2 = DE^2 + DC^2 - 2DE \cdot DC \cdot \cos \angle CAE$$

$$EC = \sqrt{\frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 31} + \frac{4 \cdot 7}{9} + 2 \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{31}} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{31}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{28}{9 \cdot 31} + \frac{28}{9} + \frac{16 \cdot 28 \cdot 4}{9 \cdot 31}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 \cdot 28}{9 \cdot 31} + \frac{28}{9}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{5 \cdot 7}{31} + 7} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{35 + 217}{31}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{242}{31}}$$

$$= \frac{2\sqrt{242}}{3}$$

$$12) S_{\triangle CAE} = \frac{1}{2} \cdot DH \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{\frac{242}{31}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{31}} =$$

$$= \frac{\sqrt{242 \cdot 7}}{31 \cdot 9} = \frac{11\sqrt{14}}{279}$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{14}}{279}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ б) $\frac{11\sqrt{14}}{279}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x^2 - 2 \cdot 6x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) - 36 - 2 + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

Заметим $x-6=a$ $y-1=b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 6b \\ a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{cases} a \geq 6b \\ 13ab - 34b^2 = 18 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

I Если $b=0$, то

$$\begin{cases} a^2 = 18 \\ a \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 3\sqrt{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6 = 3\sqrt{2} \\ y-1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 + 3\sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

II Если $b \neq 0$, то

$$\begin{cases} a \geq 6b \\ a = \frac{18 + 34b^2}{13b} \\ \left(\frac{18 + 34b^2}{13b}\right)^2 + 2b^2 = 18 \quad | \cdot 13^2 b^2 \end{cases}$$

$$4324 + 48 \cdot 36 \cdot 34b^2 + 34^2 b^4 + 2 \cdot 13^2 \cdot 169 \cdot 2b^4 = 18 \cdot 13^2 b^2$$

$$b^4 (34^2 + 169 \cdot 2) + b^2 (36 \cdot 34 - 18 \cdot 169) + 324 = 0$$

$$b^4 \cdot 1494 + b^2 \cdot 18(2 \cdot 34 - 169) + 18^2 = 0 \quad | : 18$$

$$83b^4 + 18b^2 - 91b^2 + 18 = 0$$

Заметим $t = b^2$

$$83t^2 - 91t + 18 = 0$$

$$D = 91^2 - 4 \cdot 18 \cdot 83 = 8281 - 5976 = 3257$$

$$t = \frac{91 \pm \sqrt{3257}}{166}$$

$$b^2 = \frac{91 - \sqrt{3257}}{166}$$

или

$$b^2 = \frac{91 + \sqrt{3257}}{166}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{91 - \sqrt{3257}}{166}}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{91 + \sqrt{3257}}{166}}$$

$$a = \frac{18 + 34b^2}{13b}$$

$$a = \frac{18 + 34b^2}{13b}$$

$$a \geq 6b$$

$$a \geq 6b$$

$$b = \sqrt{\frac{91 - \sqrt{3257}}{166}}$$

$$b = \sqrt{\frac{91 + \sqrt{3257}}{166}}$$

$$a = \frac{18 + 34 \left(\frac{91 - \sqrt{3257}}{166} \right)}{13 \sqrt{\frac{91 - \sqrt{3257}}{166}}}$$

$$a = \frac{18 + 34 \left(\frac{91 + \sqrt{3257}}{166} \right)}{13 \sqrt{\frac{91 + \sqrt{3257}}{166}}}$$

$$x = \frac{18 + 34 \left(\frac{91 - \sqrt{3257}}{166} \right)}{13 \sqrt{\frac{91 - \sqrt{3257}}{166}}} + 6$$

$$x = \frac{18 + 34 \left(\frac{91 + \sqrt{3257}}{166} \right)}{13 \sqrt{\frac{91 + \sqrt{3257}}{166}}} + 6$$

$$y = \sqrt{\frac{91 - \sqrt{3257}}{166}} + 1$$

$$y = \sqrt{\frac{91 + \sqrt{3257}}{166}} + 1$$

Ответ: $(6 + 3\sqrt{2}; \frac{1}{2})$; $\left(\frac{18 + 34 \left(\frac{91 \pm \sqrt{3257}}{166} \right)}{13 \sqrt{\frac{91 \pm \sqrt{3257}}{166}}} + 6, \frac{91 \pm \sqrt{3257}}{166} + 1 \right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$8x - 6 \leq |2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

Изобразим график $y = 8x - 6$, $|2x - 1|$ и $y = -8x^2 + 6x + 7$

$$y = 8x - 6 \quad |2x - 1|$$

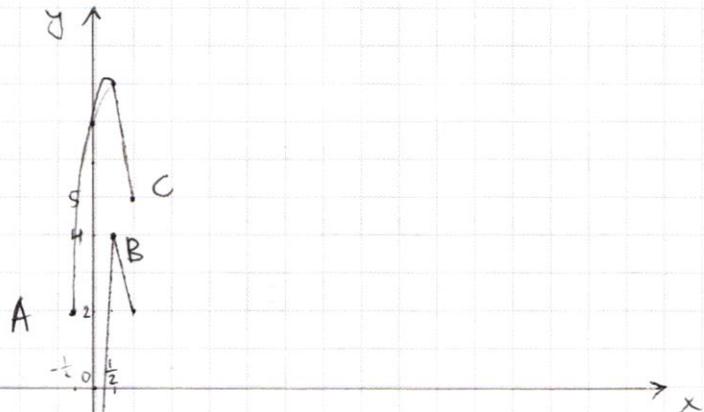
x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	-16	-6	4	2

$$y = -8x^2 + 6x + 7$$

x	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y	2	7	8	5

$$x_B = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (-8) \cdot 7}}{2 \cdot (-8)} = \frac{2}{8}$$

$$y_B = -9 + \frac{9}{4} + 7 = 2$$



при $x = -\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}a + b \leq 2$$

при $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}a + b \geq 4$$

при $x = 1$

$$a + b \leq 5$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b \leq 2 \\ a + b \leq 5 \end{cases}$$

$$1,5a \leq 3$$

$$1,5a \leq 3$$

$$a \leq 2 \Rightarrow a \leq 2$$

$$\Rightarrow -a \geq -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}a \geq -1$$

$$\frac{1}{2}a + b \geq 4$$

$$\begin{cases} b \geq 4 - \frac{1}{2}a \\ -\frac{1}{2}a \geq -1 \end{cases}$$

$$b \geq 4 - 1$$

$$b \geq 3$$

Точки A, B, C лежат

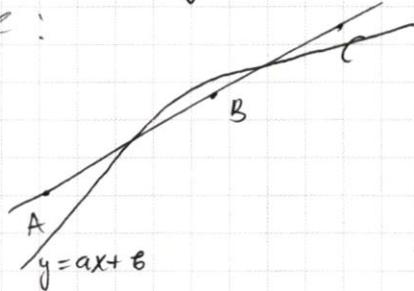
на одной прямой $y = 2x + 3$
 $y = ax + b$ — прямая

В лежит между A и C
 Знаете ли вы B больше A чем $ax+b$ при
 той же самой аргументе

Если $ax+b$ не совп. с $y=2x+3$, то

~~тогда~~ $y=ax+b$ должно проходить

так:



мы получаем противоречие
 т.к. $y=ax+b$ — график
 её график прямой

значит $y=ax+b$ совп. с $y=2x+3$
 т.е. $a=2$, $b=3$

при $a=2$ $b=3$ остальные условия в
 других точках выполняются т.е.

$$y = 8x - 6 \mid 2x - 1 \text{ — ниже } y = 2x + 3$$

$$y = -8x^2 + 6x + 7 \text{ — выше } y = 2x + 3$$

см. график.

значит $a=2$ $b=3$ подходит и

других вар. быть не может, иначе

$ax+b$ не будет совпадать с $y=2x+3$

ответ: $a=2$ $b=3$

12) $\angle BEA$ - впис. в Ω и групп. на диаметре \Rightarrow

$\Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$ т.е. $BE \perp OD$ и AE

13) $BE \perp OD$, $OD \perp AE \Rightarrow OD \parallel BE$

14) AD - т.о. высоты в $\triangle ABE$ и $\triangle ADE$

$$\text{поэтому } \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot BE} = \frac{AD}{AE} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$$

$$AD \cdot R = AE \cdot r$$

$$AD \cdot R = (AD + DE) \cdot r$$

$$AD(R - r) = DE \cdot r$$

15) $AD(R - r) = DE \cdot r$

$AD \cdot DE = 6$

$AD = \frac{6}{DE}$ $DE = \frac{6}{AD}$

$$AD(R - r) = \frac{6r}{AD}$$

$$AD^2 = \frac{6r}{R - r}$$

16) $AD^2 = \frac{6r}{R - r}$ $r = 0,8R$ $\Rightarrow AD^2 = \frac{6 \cdot 0,8R}{R - 0,8R} = \frac{4,8}{0,2} = \frac{48}{2} = 24$

$$AD > 0 \Rightarrow AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

17) в $\triangle ADC$; по т. Пифагора

$$AD^2 = DC^2 + AC^2$$

$$AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = \sqrt{4 \cdot 6 - 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

18) в $\triangle ABC$ по т. Пифагора

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{25 + 20} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$AB = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 1,5\sqrt{5}$$

$$r = 0,8R = 1,5\sqrt{5} \cdot 0,8 = 1,2\sqrt{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$19) AD \cdot DE = 6 \Rightarrow DE = \frac{6}{AD} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

20) $\triangle BAE$: по т. Пифагора

$$BA^2 = BE^2 + EA^2$$

$$BE = \sqrt{BA^2 - EA^2} = \sqrt{9 - \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{36-6}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

21) $\triangle ABC$: по т. Пифагора

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{9 \cdot 5 - 25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$22) \cos \angle ADC = \frac{DC}{AD} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$23) \angle EDC = 180^\circ - \angle ADC \Rightarrow \cos \angle EDC = -\cos \angle ADC = -\frac{\sqrt{6}}{6}$$

24) $\triangle EDC$: по т. косинусов

$$EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2 \cdot ED \cdot DC \cdot \cos \angle EDC$$

$$EC = \sqrt{\frac{6}{4} + 4 + 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6}{4} + 4 + 2} = \sqrt{\frac{6+6 \cdot 4}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

25) Проведём в $\triangle BEA$ высоту EN

26) EN - высота в прямоугол. $\triangle BED$ у прямого угла

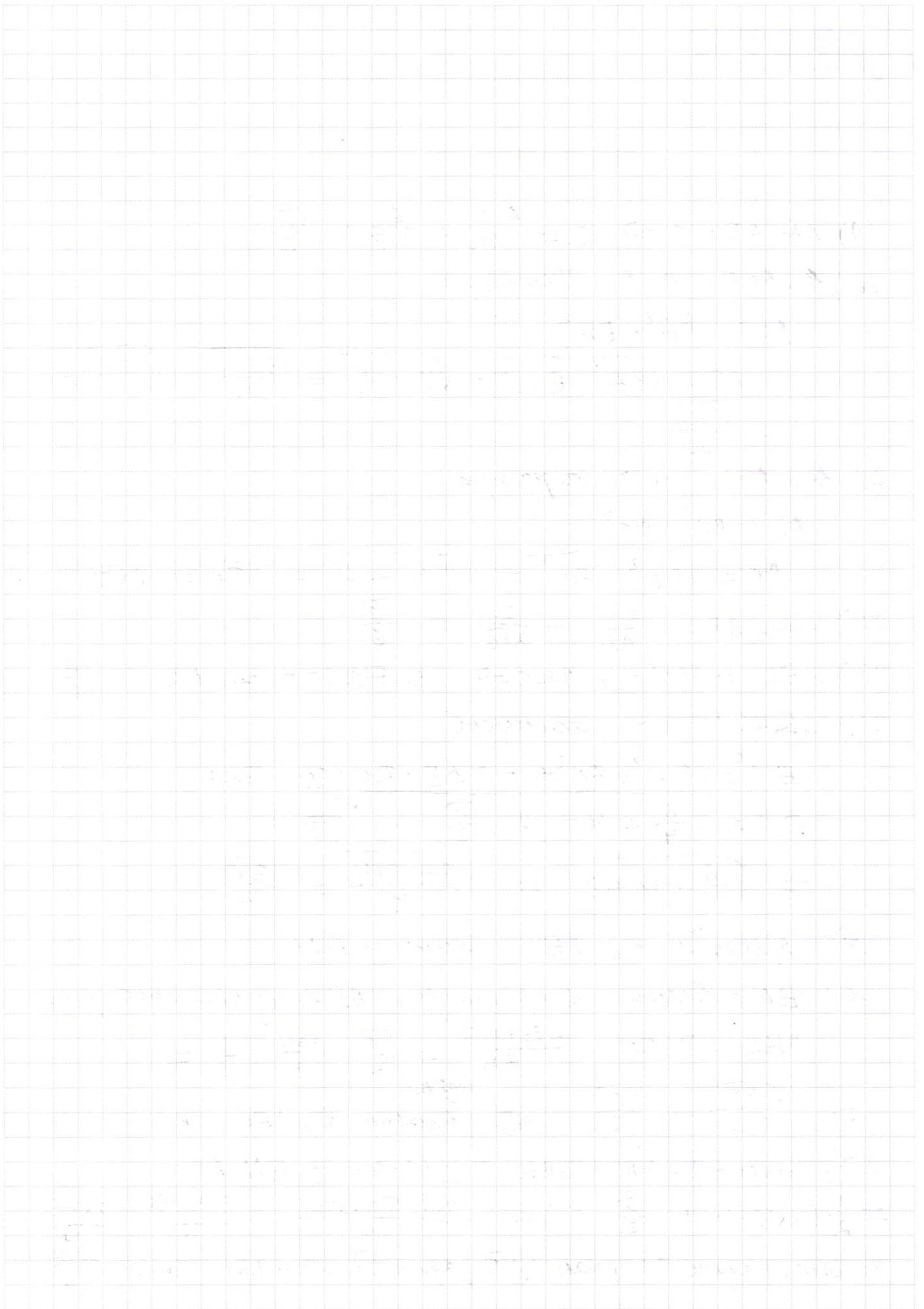
$$BED \Rightarrow EN = \frac{DE \cdot BE}{BA} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{30}}{2}}{2} =$$

$$= \frac{6\sqrt{5}}{6 \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad NE \text{ - высота в } \triangle BEC \text{ к } BC$$

$$27) S_{ABEC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC + \frac{1}{2} EN \cdot BC =$$

$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{5} \cdot 5 + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 5) = \frac{4\sqrt{5} \cdot 5 + \sqrt{5} \cdot 5}{4} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ: радиус ω равен $1,2\sqrt{5}$ радиус Ω равен $1,5\sqrt{5}$ $S_{ABEC} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(y-1)(x^2 - 6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 = -2(y-1)^2$$

$$x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

$$\text{или } 6 - 6 = 0$$

Заменим

$$x - 6 = 2v$$

$$y - 1 = u$$

$$v - 6u = x - 6 - 6y + 6 = x - 6y$$

$$\begin{cases} v - 6u = \sqrt{2u} \\ v^2 + 2u^2 = 18 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$\begin{cases} 2v - 12u = 2\sqrt{2u} \\ v^2 + u^2 = 18 - u^2 \end{cases} \quad (+)$$

$$v - 6u = \sqrt{2u}$$

$$(v + u)^2 =$$

$$\begin{cases} v = 6u + \sqrt{2u} \\ 36u^2 + 12u\sqrt{2u} + 2u + 2u^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 - 12uv + 36u^2 = 2u \\ v^2 + 2u^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 - 13uv + 36u^2 = 0 \\ v^2 + 2u^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34u^2 - 13uv = -18 \\ v^2 = 18 - 2u^2 \end{cases}$$

$$v^2 = 18 - 2u^2$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 + 36b^2 = 13ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$a^2 = 18 - 2b^2$$

$$a = \sqrt{18 - 2b^2}$$

$$\text{или } a = -\sqrt{18 - 2b^2}$$

$$18 - 2b^2 - 13\sqrt{18 - 2b^2} \cdot b + 36b^2 = 0 \quad \times \frac{15}{8}$$

$$13\sqrt{18 - 2b^2} \cdot b = 34b^2 - 18$$

$$169 \cdot (18 - 2b^2) b^2 = 34^2 b^4 - 36 \cdot 34b^2 + 18^2$$

$$\text{Заменим } b^2 = t$$

$$169(18 - 2t) \cdot t = 34^2 t^2 - 36 \cdot 34 \cdot t + 18^2$$

$$34^2 t^2 - 169 \cdot 18t + 2 \cdot 169 t^2 = 34^2 t^2 - 36 \cdot 34 \cdot t + 18^2$$

$$t^2(2 \cdot 169 + 34^2) - t(169 \cdot 18 + 36 \cdot 34) + 18^2 = 0$$

$$-4 - 12 = -16$$

$$t^2 \cdot 1494 - 4266t + 324 = 0$$

$$\begin{array}{l} -4 - 6 | -2 \\ 4 - \end{array}$$

$$747t^2 - 2133t + 162 = 0$$

$$8x - 6 | 2x - 1$$

$$249t^2 - 711t + 54 = 0$$

$$83t^2 - 237t + 18 = 0$$

$$-2 \cdot 43 + 7 = 2$$

$$-8x^2 + 6x + 7$$



$$x \cdot b = -\frac{b}{2a} = \frac{63}{28}$$

x	-1/2	0	1/2	1
---	------	---	-----	---

y	-16	-6	4	
---	-----	----	---	--

$$8 - 6 = 2$$

x	-1/2	0	1/2	1
y	2	7	8	5

$$y \cdot b = -9 + 0,75 + 7 = -1,25$$

$$ax + by <$$

$$-\frac{1}{2}a + b < 2$$

$$\frac{1}{2}a + b > 4$$

$$a + b < 5$$

$$1,59 < 3$$

$$a < 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$x - 6y = \sqrt{y(x - 6) - (x - 6)}$$

$$(x^2 - 12x + 36)$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 91 \\ \hline 91 \\ 819 \\ \hline 8281 \\ - 5976 \\ \hline 3281 \\ \underline{24} \\ 3260 \\ - 3253 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 237 \\ \times 18 \\ \hline 1896 \\ + 237 \\ \hline 4266 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ - 78 \\ \hline 99 \\ - 8 \\ \hline 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 18 \\ \hline 131 \\ 1494 \\ \hline 5926 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50145 \\ - 5 \\ \hline 0014 \\ - 10 \\ \hline 45 \\ - 45 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10029 \\ - 9 \\ \hline 10 \\ - 9 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 09 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 18 \\ \hline 1352 \\ + 169 \\ \hline 3042 \\ + 1224 \\ \hline 4266 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2133 \\ - 21 \\ \hline 03 \\ - 3 \\ \hline 03 \\ - 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 747 \\ - 6 \\ \hline 14 \\ - 12 \\ \hline 27 \\ - 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

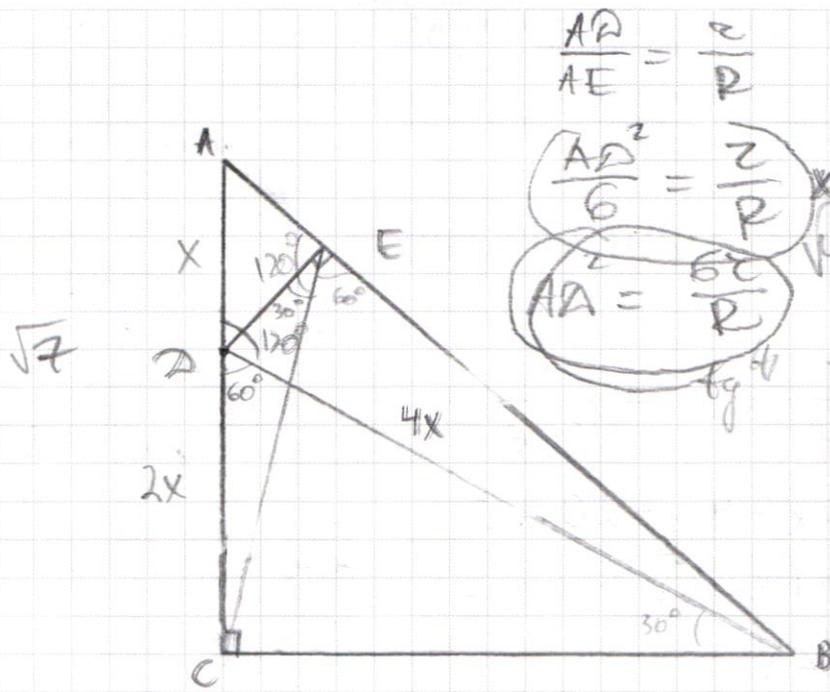
$$\begin{array}{r} 162 \\ - 15 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 249 \\ - 24 \\ \hline 09 \\ - 9 \\ \hline 01 \\ 01 \\ 214 \\ 237 \\ \hline 1659 \\ + 711 \\ \hline 474 \\ 56169 \\ - 5976 \\ \hline 50193 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ - 3 \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times 18 \\ \hline 664 \\ 83 \\ \hline 1494 \\ \times 4 \\ \hline 5976 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50169 \\ - 24 \\ \hline 50145 \end{array}$$



$$\frac{AD}{AE} = \frac{2}{R}$$

$$AD \cdot AE = 6$$

$$AE = \frac{6}{AD}$$

$$\frac{AD^2}{6} = \frac{2}{R}$$

$$AD = \frac{6R}{R}$$

$$\sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$$

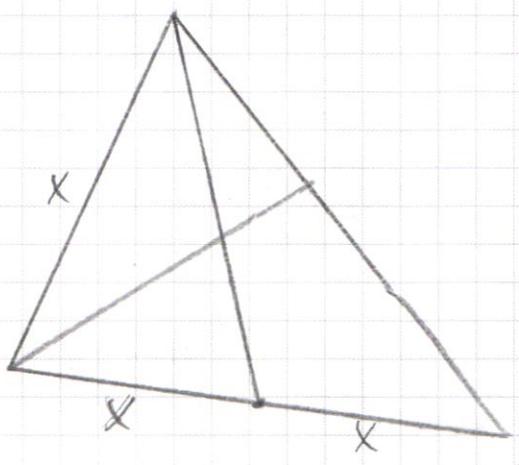
$$\frac{AC}{CB} = \sqrt{3}$$

$$CB = \frac{AC}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CB}{AC}$$

$$BA \cdot AC = 6$$

$$\frac{3}{ED} = \frac{AD}{2}$$



$$S =$$

$$\frac{z}{2R-z} = \frac{2}{5}$$

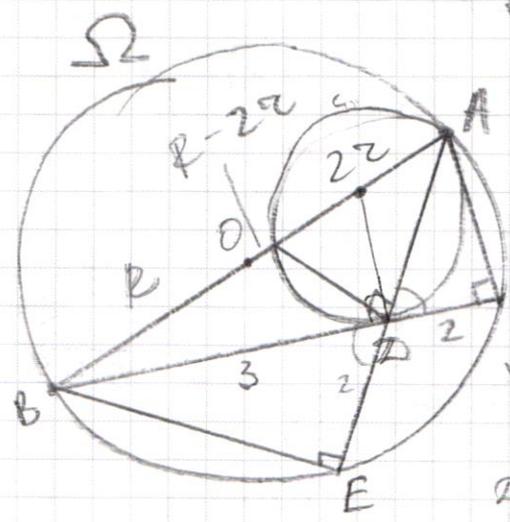
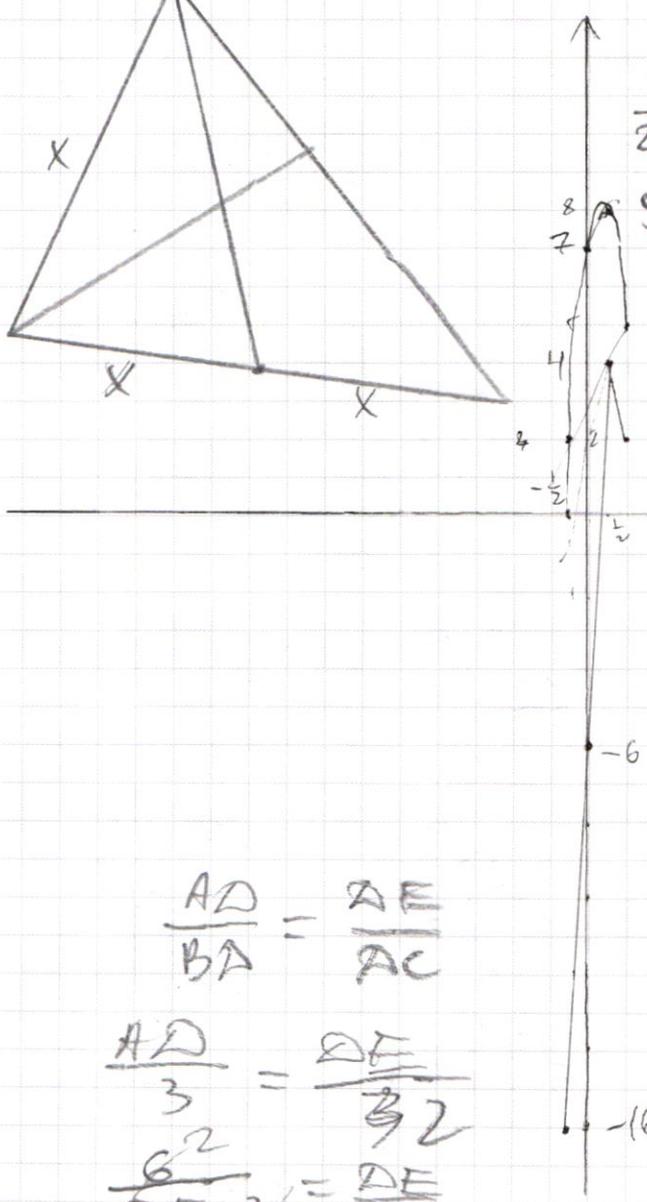
$$5z = 4R - 2z$$

$$7z = 4R$$

$$DE = \frac{6}{AD}$$

$$AD \cdot DE = 2 \cdot 3$$

$$AD = \frac{6}{DE}$$



$$\sqrt{4R^2 - 5}$$

$$\sqrt{4R^2 - 5 + 4} = \sqrt{4R^2 - 1}$$

$$4R$$

$$\sqrt{4R^2 - 1}$$

$$AB \cdot E$$

$$DE = \frac{6}{\sqrt{4R^2 - 1}}$$

$$2(R-2)R = 9$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{AD}{BA} = \frac{DE}{AC}$$

$$\frac{AD}{3} = \frac{DE}{4R}$$

$$\frac{6^2}{DE \cdot 3} = \frac{DE}{2}$$

$$DE^2 = 2 \Rightarrow DE = \sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b \\ x_1 x_2 = ac \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = 2b$$

$$x_1 x_2 = b^2$$

$$x_1 x_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}$$

$$4x_1 x_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$$

$$b^2 = ac$$

$$x_1 = x_2$$

$$x_1 = x_2 = b$$

$$x^2 - \frac{2b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

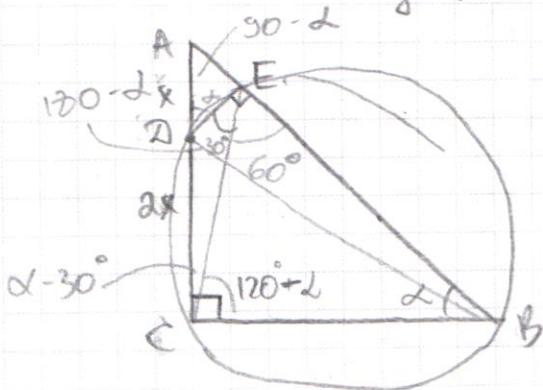
$$(x-1)^2 = 0$$

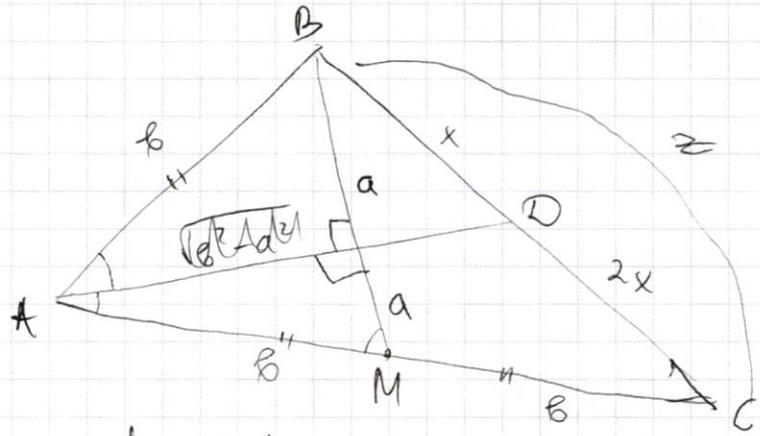
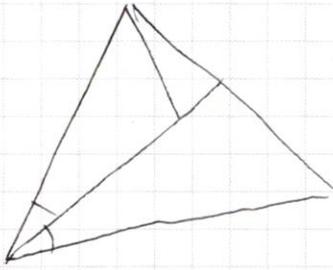
$$x = 1$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{CB}{AE} = \frac{DE}{EA} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{AE}{CB}$$

$$CB = \frac{AE}{EA} \cdot 3x = \frac{AE \cdot AB}{x}$$

$$\frac{AE}{AB \cdot x} = \frac{3x}{AB} \quad AB \cdot EA = 3x^2$$





$$BM = \frac{1}{2} \sqrt{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}$$

$$\cos \angle BMA = \frac{a}{b}$$

$$\text{Вик } z^2 = 2a^2 + b^2 + 4ab \cos \angle BMA$$

$$\cos \angle BMA = \frac{z^2 - 2a^2 - b^2}{4ab}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{z^2 - 2a^2 - b^2}{4ab}$$

$$4a^2 = z^2 - 2a^2 - b^2$$

$$z^2 = 6a^2 + b^2$$

$$p = \frac{3b+x}{2}$$

$$S_{ABC} \cdot x = 900$$

$$900 = \frac{3b+x}{2}$$

$$xy - 6y - x + 6 =$$

$$= x(y-1) - 6(y-1) =$$

$$= (y-1)(x-6)$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$(x^2 - 2 \cdot 6x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) - 36 - 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$8x + 12x - 6 \leq ax + b \leq -2x^2 + 6x + 7$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

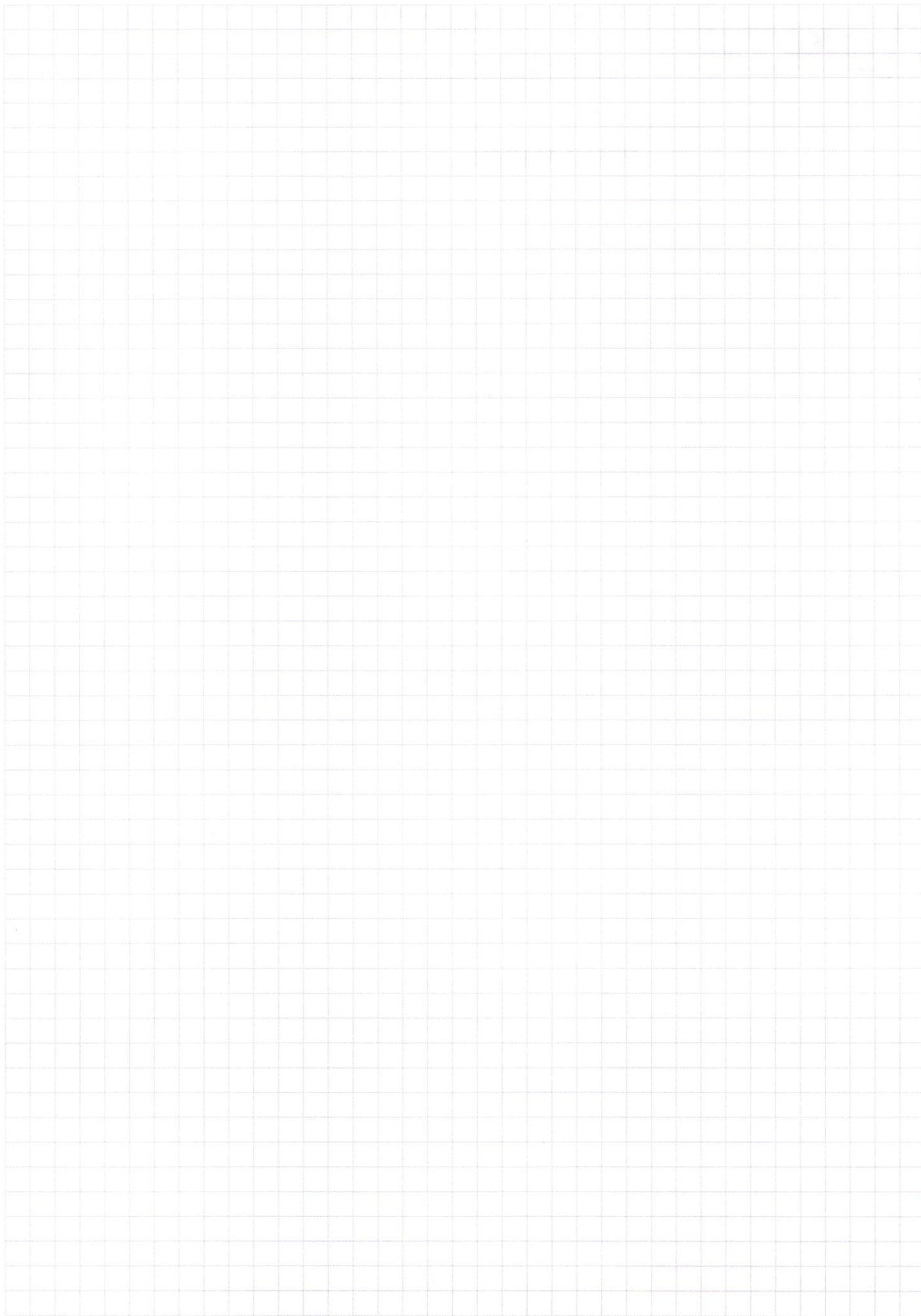
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)