МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1. По условию $f(d)=0 = n\cdot q\,(nq^4)^2 - 2nq^2\cdot(nq^4) + nq^3 =$

$a = n\cdot q$ $\quad = n^3q^9 - 2n^2q^6 + nq^3 = 0 \mid \div nq^3$

$b = n\cdot q^2$

Случай $nq^3 \neq 0$: $\cancel{n^2q^9\ 2nq^6q^3=0}$

$c = n\cdot q^3$ $\quad n^2q^6 - 2nq^3 + 1 = 0$

$d = n\cdot q^4$ $\quad (nq^3-1)^2=0$

Итак, $f(d) = nq^3(nq^3-1)^2 = c(c-1)^2 = 0.$

Либо $c=0$, либо $c=1$.

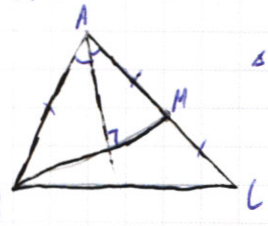
При $c=0 \Longrightarrow$ прогрессия нулевая и $d=0 \Rightarrow f(0) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0 = 0$ Выполнено

Либо $c=1$. Это тоже может быть.

Ответ: $c=0$ (если геом. прогрессия нулевая) либо $c=1$

Задача №2. У нас возможны 2 случая: (1) - бисс. $\perp$ своей же медиане из своего угла, но тогда ⊠, т.к. получится, что хотя бы половина угла хотя бы $90°$ (на самом деле $>90°$, т.к. медиана отлична от стороны) $\Longrightarrow$ весь угол $>180°$, что невозможно.

В ином случае: (2):



$\triangle BAM$ - равнобед., бисс. еще и высота $\Longrightarrow BA = AM = a \Longrightarrow AC = 2a$; $BC = x$

Из нер-ва $\triangle$: $AC = 2a < \underset{AB+BC}{a+x}$ и $\underset{x}{BC} < AB + AC = 3a$; $AB < AC + BC$ выполн. автоматически

Еще по условию $AB + AC + BC = 3a + x = 900$.

Итого: $\begin{cases} 3a+x=900 \\ 3a>x \\ x>a \end{cases}$ $\quad 900 = 3a+x > 3a+a = 4a \Rightarrow a < \frac{900}{4} = 9\cdot 25 = 250-25 = 225$

$900 = 3a+x < 3a+3a = 6a$; $a > \frac{900}{6} = 150$

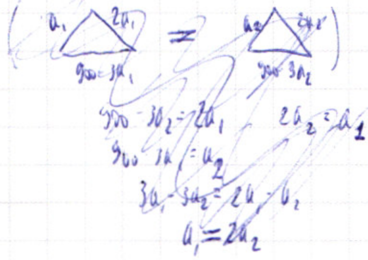
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Дополнительно сказано $\begin{cases} a \\ 2a \\ \lambda \end{cases} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \begin{cases} a \\ x \end{cases} \in \mathbb{Z}$, а из того, что $3a+x=900$

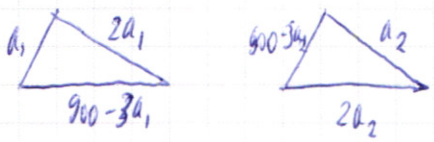
$\Longrightarrow a \in \mathbb{Z}$, а x однозначно определяется.

Итог: $\begin{cases} a < 225 \\ a > 150 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$ кол-во целых a и есть кол-во △ с таким P и сторонами.

$\xRightarrow{}$ кол-во $a \in [151; 224] = 224 - 150 = 74$



Остаётся вариант, что $\exists$ 2 каких-то △, что при каких-то a_1 и a_2 они просто равны, но обменялись сторонами.



Рассмотрим наим. сторону. Это точно не $2a_1$ и не $2a_2$ $\Longrightarrow$ либо сторона вида b либо $900-3b$. Но у обоих сторон сторона одного вида быть не может $\Longrightarrow$ у одного наим. a_1, а у другого $900-3a_2$

иначе $a_1 = a_2$

Но тогда у другого значит, что $900 - 3a_2 < a_2 < 2a_2$, раз наим.

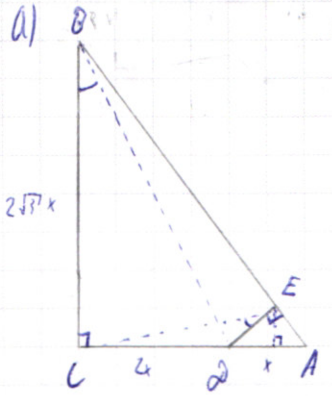
Но значит $(900-3a_2) + a_2 < a_2 + a_2 = 2a_2$. Но это ⊓ с нер-вом △.

Значит все △ получались разные.

Ответ: 74.

Задача №4

а)



CBED вписан., т.к. $\angle BCD = 90° = \angle BED$ (вписанный) $\Longrightarrow \angle CED = \angle CBD = 30°$.

Пусть $AD = x \Longrightarrow$ из условия $CD = 2x \Longrightarrow$ из прямоуг. $\triangle CBD$ с $\angle CBD = 30° \Longrightarrow BC = 2\sqrt{3}x \Longrightarrow tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) Если $AC = 3x$, $BC = 2\sqrt{3}x$ то по т. Пифагора $\triangle ABC$:

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = x\sqrt{9+12} = \sqrt{21}x$

$\triangle DEA \sim \triangle BCA$ по углам ($\angle DEA = 90° = \angle BCA$; $\angle A$ общий) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \frac{EA}{CA} = \frac{DA}{BA} = \frac{EA}{3x} = \frac{x}{\sqrt{21}x}$; $EA = 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}$. $tg\angle A = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{DE}{EA}$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DE = EA \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{7}} x$

$S_{DEA} = \frac{DE \cdot EA}{2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}} x \cdot 3x \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}}{2} = \frac{3x^2}{7\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}x^2}{7}$

$\triangle CDE$ и $\triangle DEA$ имеют общую высоту, но разные основания

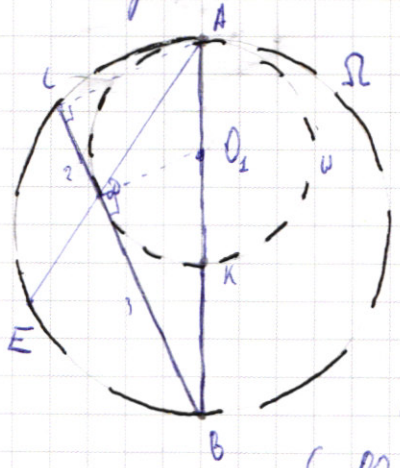
$\frac{S_{CDE}}{S_{DEA}} = \frac{CD}{DA} = \frac{2}{1} \Rightarrow S_{CDE} = S_{DEA} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} x^2.$

Осталось только сказать, что $AC = \sqrt{7} = 3x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$, а значит

$S_{CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot x^2 = \frac{2\sqrt{3}}{7} \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$

Ответ: (а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; (б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Задача №5.



$AB \cap \omega = A, K$

O_1 – центр ω

$O_1D \perp BC$, т.к. O_1D – радиус, проведённый к касательной

$\Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ по 2 углам

($\angle BDO_1 = 90° = \angle BCA$, $\angle B$ – общий)
(опир. на диам.)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+CD} = \frac{BO_1}{BA}$

По т-ву секущих и ~~хорд~~ касат.: $BK \cdot BA = BD^2$

Пусть R – радиус Ω, а r – ω $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5} \rightsquigarrow 10R - 5r = 6R \quad \boxed{\frac{4}{5}R = r} \\ BK \cdot BA = (2R-2r)(2R) = BD^2 = 9; \quad (2R - 2\cdot\frac{4}{5}R)\, 2R = (\frac{10}{5}R - \frac{8}{5}R) \cdot 2R = \frac{4}{5}R^2 = 9 \end{cases}$$

$R = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{5} = 1{,}5\sqrt{5}$

$r = \frac{4}{5}R = \frac{4}{5} \cdot 1{,}5\sqrt{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5} = 1{,}2\sqrt{5}$

По т. Пиф. for $\triangle BCA$ $CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{45-25} = 2\sqrt{5}$

По т. Пиф. for $\triangle CDA$ $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{20+4} = 2\sqrt{6}$

По св-ву хорд $ED \cdot AD = CD \cdot BD = 2 \cdot 3 = 6$

$ED = \frac{6}{AD} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Заметим, что $\triangle ECA$ и $\triangle DCA$ имеют общую высоту. $\Longrightarrow$

$\frac{S_{CDA}}{S_{ECA}} = \frac{AD}{EA}$. Аналогично для $\triangle EBA$ и $\triangle DBA \Longrightarrow S_{ACEB} = S_{ECA} + S_{EAB} =$

$= \frac{EA}{DA} \cdot \left(S_{CDA} + S_{ADB}\right) = \frac{EA}{AD} \cdot S_{ACB}$

$EA = ED + DA = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$

$DA = 2\sqrt{6}$; $S_{ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{5} \cdot 5}{2} = 5\sqrt{5}$

Значит: $S_{ACEB} = \frac{EA}{AD} \cdot S_{ACB} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \cdot 5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $r_\omega = 1{,}2\sqrt{5}$; $R_\Omega = 1{,}5\sqrt{5}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

Задача №6.

$-8x^2 + 6x + 7 \geq ax + 6$

$8x^2 - x(6 - a) + 6 - 7 \leq 0$

Если это выполняется $\Longrightarrow$ выполняется и

$-8x^2 + 6x + 7 \geq 8x - 6|2x - 1|$

для $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$-8x^2 - 2x + 7 \geq -6|2x - 1|$

$-8x^2 - 2x + 7 + 6|2x - 1| \geq 0$

2 случая

I $x \leq 0{,}5$

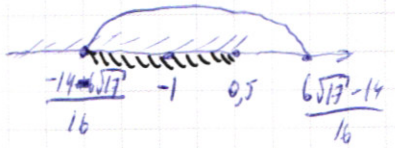
$-8x^2 - 2x + 7 - 12x + 6 \geq 0$

$-8x^2 - 14x + 13 \geq 0$

$8x^2 + 14x - 13 \leq 0$

$D = 196 + 4 \cdot 8 \cdot 13 = 144 + 8 \cdot 52 = 4 \cdot (49 + 2 \cdot 52) = 4 \cdot (49 + 104) = 4 \cdot 153 = 4 \cdot 9 \cdot 17 = 36 \cdot 17$

$x_{1,2} = \frac{-14 \pm 6\sqrt{17}}{16}$



$\frac{-14 + 6\sqrt{17}}{16} \overset{>}{?} -1$

$-14 + 6\sqrt{17} \;?\; -16$

$6\sqrt{17} \;?\; -2$

$\frac{6\sqrt{17} - 14}{16} \overset{>}{?} 0{,}5$

$-14 + 6\sqrt{17} \;?\; 8$

$6\sqrt{17} \;?\; 22$

$3\sqrt{17} \;?\; 11$

$9 \cdot 17 \overset{>}{?} 121$

$153 \;?\; 121$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II $x \geq 0{,}5$

$(20-2)^2 = 400 - 2\cdot 2\cdot 20 + 4 = 400 - 80 + 4 = 324$

$-8x^2 + 6x + 7 \geq 8x - 12x + 6$

$8x^2 - 18x - 1 \leq 0$

$D = 324 + 4\cdot 8 = 324 + 32 = 356 = 4\cdot 89$

$x_{3,4} = \frac{18 \pm 2\sqrt{89}}{16}$; $\frac{18 - 2\sqrt{89}}{16} < 0{,}5$

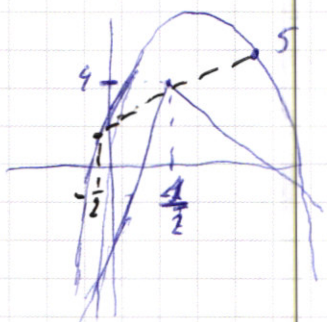
$\frac{18 + 2\sqrt{89}}{16} > 1 > 0{,}5$.

Ладно, пока оставим для размышлений.

Итак, новый план:

$f(x) = 8x - 6|2x-1| = \begin{cases} -4x+6, & x \geq \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$

$g(x) = -8x^2 + 6x + 1$



Рассмотрим их значения $g(x)$ и $f(x)$ в т. $x = 1$; $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$.

$g(x) = 5$, 8 и 2

$f(x) = 2$, 4 и -16.

Заметим, что $ax+b$ в т. $1 \leq 5$

в т. $\frac{1}{2} \geq 4$.

Построим прямую через т. $(\frac{1}{2}; 4)$ и $(1; 5)$

Это $2x+3$.

Заметим, что $2x+3$ пересекает параболу в какой-то т. x_1 и принимает значение $2x_1+3$. Но т.к. $ax+b$ в т. $1 \leq 5$ и в т. $\frac{1}{2} \geq 4$ по условию, то пересекать эта параболу должна „выше" или по-другому в т. x_1 у $ax+b$ значение $\geq$ чем у $2x+3$ в т. x_1.

~~(Т.к. сначала $ax+b$ и x_2 пер параболу пересекает в x_2, $x_2 \geq x_1 \Rightarrow g(x)$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(2)=f(3)=1$ $\quad f(7)=3=f(8)$ $=f(10)$

$f(4)=2=f(5)=f(6)=f(9)$ $\quad f(11)=5$ $f(13)=6$; $f(14)=$

$f(12)$

$32=2^5$

$27=3^3$

$125=5^3$

$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$x^2+36y^2-12xy=xy-6y-x+6$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)+f(b)=f(b)$

$f(1)=0$

$f(4)=2f(2)$

$f(123)=3\cdot 2=6$

$f(124)=4\cdot 31$

$f(124)=15+\ldots$

$g(x)=k^{f(x)}$

$g(ab)=k^{f(ab)}=k^{f(a)+f(b)}=g(a)\cdot g(b)$

$(y^2-4y+4)+16+y^2$

$f\left(\frac{p}{q}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{q}\right)=f(p)-f(q)$ x^2-12x

$x^2-12x+36-18+2y^2-4y+2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$f(x)=\log_a f(x)$

$g(ab)=$

3

$-2+7=8$

$\frac{(x-6)^2+(y-1)^2}{2}=\frac{18-(y-1)^2}{2}\geq\sqrt{(x-6)(y-1)}=x-6y$

$18-(y-1)^2\geq x-6y$

$-y^2+8y+17\geq x$

$-y^2+8y-16+33\geq x$

$-(y-4)^2\geq x-33$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=4$

$y(1)=5$

$\frac{1}{2}k+b=4$

$k+b=5$

$\frac{1}{2}k=1$

$k=2$

$2\cdot\frac{1}{2}+b=4$

$b=3$

$\frac{2x+3}{2}$

$\boxed{g(xy)=g(x)\cdot g(y)}$

$k\ \log_a 2$

$-8+6+7=5$

$8-6=2$

$\frac{-8}{4}-3+7=2$

$g(1)=g^2(1)$

$\boxed{\begin{matrix} g(1)=1 \\ g(1)=0 \end{matrix}}$

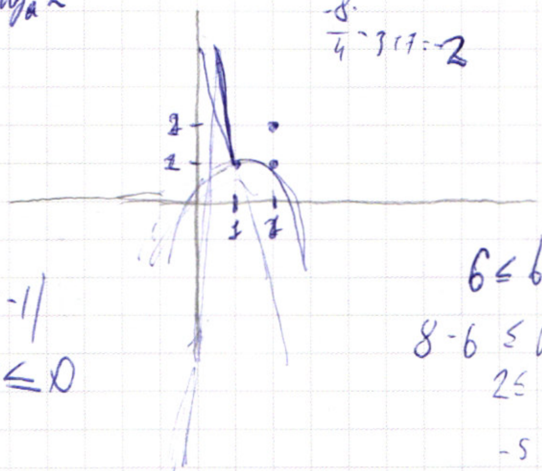
$g(2)=g(1)\,g(2)$

$g(2)=0$

$g(1)=1$

$g(x)=0$

$g(1)=1$



$g(ab)=\log_a b$

$6\leq b\leq 7$

$8-6\leq a+b\leq 5$

$2\leq a+b\leq 5$

$-5\leq a\leq -1$

$-8x^2+6x+7\geq 8x-6|2x-1|$

$8x^2+2x-7-6|2x-1|\leq 0$

$8x^2+14x-13\leq 0$

$D=196+4\cdot 8\cdot 13$

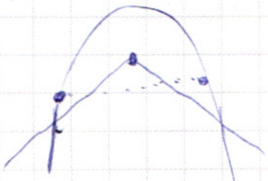
$-4-12\leq -\frac{1}{2}a+6\leq -2-3+7$

$-16\leq -\frac{1}{2}a+6\leq 2$

$-23\leq -\frac{1}{2}a\leq -4$

$\geq a\geq 8$

$-8x^2+6x+7\geq 8x-12x+6$



$f(p_1^2 p_2 \ldots)=$

$=\underbrace{f(p_1^2\ldots p_n)}+f(p)$

$8x^2-10x-1\leq 0$

$D=100+4\cdot 8=132=4\cdot 33$

$\frac{10\pm 2\sqrt{33}}{16}\ ?\ 0{,}5$

$10\pm 2\sqrt{33}\ ?\ 8$

$2\ ?\ \mp 2\sqrt{33}$

$1\ ?\ \mp\sqrt{33}$

$\frac{10\pm 2\sqrt{33}}{16}\ ?\ 1$

$10\pm 2\sqrt{33}\ ?\ 16$

$\pm 2\sqrt{33}\ ?\ 6$

$\pm\sqrt{33}\ ?\ 3$

$f(4)=2f(2)$

$f(1)=0$

$-f(0{,}5)=f(2)$

Доказать, что $f(x)>0$, когда $x>1$

$f(2)=1$

$f(0{,}5)=-1$

$f(3)=1$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$

$f(4)=2$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=-2$

☑ черновик ☐ чистовик

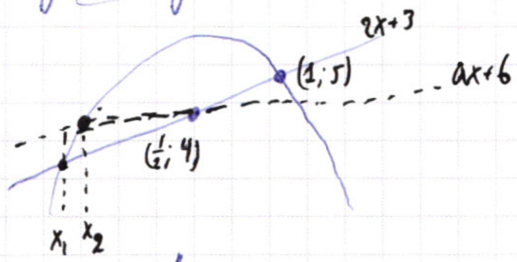
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$g(x_2) \le g(x_1) = ax_1+b$~~



обьяснение

Но $x_1 = -\frac{1}{2}$, а в т. $-\frac{1}{2}$ $g(x) = 2$.

Но значит $ax_1 + b \ge g(x_1)$

$-\frac{1}{2}a + b \ge g(-\frac{1}{2})$

Но по условию

$-\frac{1}{2}a + b \le g(-\frac{1}{2})$.

Это означает, что $ax+b$ должна совпасть с $2x+3$ из действит. $ax+b = k(x)$

$2x+3 = n(x)$

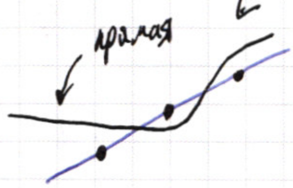
$n(-\frac{1}{2}) \ge k(-\frac{1}{2})$

$n(\frac{1}{2}) \le k(\frac{1}{2})$ ← из условия

$n(1) \ge k(1)$

$\Downarrow$

$n(x) = k(x)$



значит $ax+b = 2x+3$

$b = 3$

$a = 2$.

Ответ: только $a = 2$; $b = 3$.

№7. Докажем, что $\forall n > 1$, $n \in N$ $f(n) > 0$. База: $f(p) = [\frac{p}{2}] \ge 1$ для каждого p.

Давайте посмотрим на разложение n на простые числа:

$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \ge 1$

Заметим: $f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = f(p_1) + f(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) = \ldots = \alpha_1 \times f(p_1) + f(p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) \underset{\text{аналогично}}{=} \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots \alpha_n f(p_n) > 0$, т.к. $\alpha_i f(p_i) \ge \alpha_i \ge 1 > 0$.

Доказано.

$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Longrightarrow f(1) = 0$

$f(\frac{1}{n} \cdot n) = f(\frac{1}{n}) + f(n) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n) < 0$. Для чисел вида $\frac{1}{n}$, $f(x) < 0$.

$f(\frac{p}{q}) = f(p\cdot\frac{1}{q}) = f(p)+f(\frac{1}{q}) = f(p)-f(q)$

$f(x)=1$: 2, 3

$f(x)=2$: 4, 5, 6, 9

$f(x)=3$: 7, 8, 10, 12, 15, 18

$f(x)=4$: 14, 16, 20, 21

$f(x)=5$: 11

$f(x)=6$: 13, 22

$f(x)=7$:

$f(x)=8$: 17

$f(x)=9$: 19

Итак, нам нужно ~~выбор~~ все выбрать пару x и y так, что

$f(x) > f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x)=1$: способов $\overset{\text{for } x}{2}\times\overset{\text{for } y}{19}$; $f(x)=2$ способов $\overset{\text{for } x}{4}\times\overset{\text{for } y}{15}$; $f(x)=3$, способов $\overset{\text{for } x}{6}\times\overset{\text{for } y}{9}$;
$f(x)=4$, способов $\overset{x}{4}\cdot\overset{y}{5}$; $f(x)=5$, способов $\overset{x}{1}\times\overset{y}{4}$; $f(x)=6$, способов $\overset{x}{2}\times\overset{y}{2}$;
$f(x)=7$, способов $\overset{x}{0}\times\overset{y}{2}$; $f(x)=8$, способов $\overset{x}{1}\times\overset{y}{1}$; $f(x)=9$, способов $\overset{x}{1}\times\overset{y}{0}$.

Итого $2\cdot19+4\cdot15+6\cdot9+4\cdot5+1\cdot4+2\cdot2+0+1\cdot1+0 = 38+60+54+20+4+4+1$
$= 58+58+65 = 116+65 = 176+5 = 181$.

Другиx вар-тов нет.

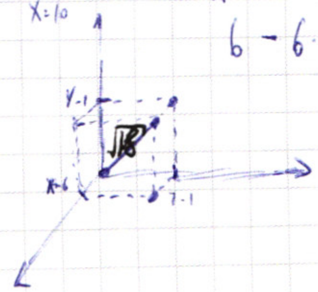
Ответ: 181 пара $(x;y)$.

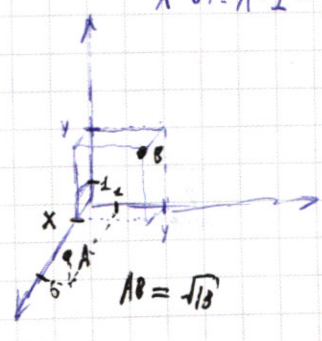
10-6=4
x=10
y=1
y=2
10
y=2
x=6 y=4
x=3 4
6-6·(-2)
y=0
x=10
$x-6y = x\cdot1-6\cdot y$

Задача №3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$(x-6)^2+(y-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{18})^2$





$AB=\sqrt{13}$

расст. от 0;0;0 до $(x-6;\ y-1;\ y-1)$
либо от 6;1;1 до $(x;y;y)$

$(x-6)(y+1)$
xy

черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2+y^2+2xy \underbrace{-2xy+y^2-12x-4y+20}_{?}$$

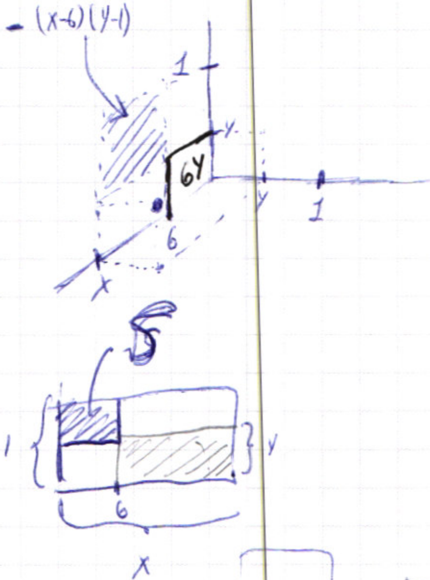
$$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$$

$$-\frac{1}{4}x^2+x+\frac{1}{4}=13xy-36y^2-6y-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+6$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-\left(6y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+6+13xy$$

~~x=6, y=2 решение~~ подходит

$x=2$; $y=0$ – решение. Подходит.



Значит:

$y=0$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}(x-6)^2+2=18\\ x=\sqrt{6-x}\end{cases}$$

$|x-6|=4 \Rightarrow 6-x=4$; $x=2$

$x-6=-4$

$2=\sqrt{6-4}$ ✓.

$x-6y$, но если $y \neq 0$, то синяя $S < x-6y$

$\| (x-6)(y-1)$

а значит и первы

Ответ: $x=2$; $y=0$.