

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть z_n - n -й член геом. прогрессии из условия $\Rightarrow z_1 = a$,

~~$z_2 = a\omega = b, z_3 = a\omega^2 = c, z_4 = a\omega^3$~~ $z_2 = a\omega = b, z_3 = a\omega^2 = c, z_4 = a\omega^3$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(a^2\omega^2 - a \cdot a\omega^2) = 0 \Rightarrow x = \frac{2b}{2a} = \frac{a\omega}{a} = \omega = z_4$$

$$\Rightarrow a\omega^3 = \omega, \omega \neq 0 \Rightarrow a\omega^2 = 1 = z_3 = c$$

Ответ: 1

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & \textcircled{1} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} & \textcircled{1} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$\textcircled{2} \quad (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

Пусть $x-6=a, y-1=b \Rightarrow x-6y = (x-6)+6 - 6(y-1)-6 = a-6b \Rightarrow$

система принимает такой вид:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab & \textcircled{A} \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 & \textcircled{B} \\ ab \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\textcircled{A} \quad a^2 - 12ab + 36b^2 = 0$$

$$D = 169b^2 - 144b^2 = 5^2b^2$$

$$a = \frac{13b \pm 5b}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \end{cases}$$

$$\textcircled{B} \quad a^2 = 18 - 2b^2$$

$$a = \pm \sqrt{18 - 2b^2}$$

Случай 1: $a = 4b, a = \pm \sqrt{18 - 2b^2} \Rightarrow 16b^2 = 18 - 2b^2 \Rightarrow b = \pm 1 \bullet \Rightarrow$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=4 \\ b=-1 \\ a=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=10 \\ y=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Случай 2: $a = 9b, a = \pm \sqrt{18 - 2b^2} \Rightarrow 81b^2 = 18 - 2b^2 \Rightarrow b = \pm \sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow$

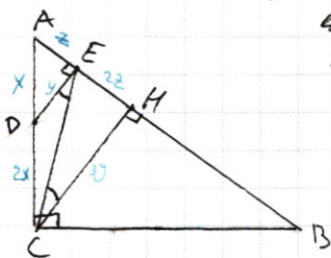
$$\begin{cases} b = \pm \sqrt{\frac{18}{83}} \\ a = \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \\ x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = -\sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \\ x = -9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \end{cases}$$

Все значения попадают в область допустимых значений.

Ответ: $(10, 2), (2, 0), (9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6, \sqrt{\frac{18}{83}} + 1), (-9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6, -\sqrt{\frac{18}{83}} + 1)$

Задача 4.

а) Пусть $AD = x \Rightarrow CD = 2x, AE = z, DE = y, \angle BAC = \beta$
 $CH \perp AB$



~~CH = 3y~~ $\angle ACH = \angle ADE = 90 - \beta \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ACH,$
 $\text{так как } k = \frac{1}{3}, CH = 3y, EH = 2z. \angle CED = 30^\circ \Rightarrow \angle HEC = 60^\circ,$
 $\angle HCE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \angle CHE = 90^\circ \Rightarrow \triangle CHE \text{ } \angle ECH = 30^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow CE = 2EH = 4z. \text{ По т. Пифагора: } CE^2 = 9y^2 + 4z^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 16z^2 = 9y^2 + 4z^2 \Rightarrow 3y^2 = 4z^2 \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} =$
 $= \frac{DE}{AE} = \tan \angle BAC$

б) $AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x^2 = \frac{7}{9}$. По т. Пифагора для $\triangle AED \quad x^2 = y^2 + z^2$.

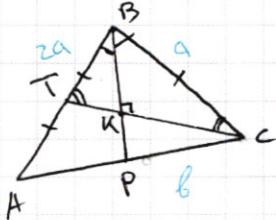
Также $y^2 = \frac{4}{3}z^2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{4}{3}z^2 \\ y^2 = \frac{7}{9} - z^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{7}{3}z^2 - \frac{7}{9} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$S_{CED} = S_{CHA} - S_{DEA} - S_{CHE} = \frac{1}{2}(3y \cdot 3z - yz - 3y \cdot 2z) = \frac{1}{2}(9yz - 7yz) = yz =$
 $= \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\tan \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}, S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.



Пусть $\triangle ABC$ - прямой. BP - выс., CT - выс. $\angle BKC = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BCK = \angle BTK \quad \text{тк } \angle TBK = \angle CBK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle TBC - \text{р/д}, \quad BT = BC = AT = a, \quad AC = b. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = 2a + a + b = 3a + b = 900, \quad a, b \in \mathbb{N},$$

$$a = \frac{900 - b}{3} = 300 - \frac{b}{3} \Rightarrow \frac{b}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow b : 3$$

Из нер-ва \triangle : $3a > b$, $2a \leq a + b \Leftrightarrow a \leq b$, $a < 2a + b \Leftrightarrow 0 < a + b$

$$3a > b \Leftrightarrow 3a + b > 2b \Rightarrow 900 > 2b \Rightarrow b < 450.$$

Пусть $b = 447 \Rightarrow a = \frac{453}{3} = 151$. $3a = 453 > 447$, $a < b \Rightarrow$

\Rightarrow такой случай подходит.

Пусть $b = 225 \Rightarrow a = \frac{675}{3} = 225 \Rightarrow a = b \Rightarrow \text{н}$

Пусть $b = 228 \Rightarrow a = \frac{672}{3} = 224$. $a < b$, ~~$3a > b$~~ \Rightarrow

$\Rightarrow b \in [228, 447]$ и в каждом из этих случаев

$\exists a$: нер-ва \triangle выполняется. Среди чисел от 228 до 447

74 числа $: 3$ (тк $\frac{449 - 228 + 1}{3} = 74$) - это ~~разные~~ различные варианты

где b . Для разных b будут разные $a \Rightarrow$ всего 74 \triangle ,
удовлет. условию

Ответ: 74

Задача 7.

$$f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right), a \in \mathbb{Q}_+ \quad (*)$$

$$2 - \text{простое} \Rightarrow f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\text{Пусть } x > 1 \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f(2) = 1 + \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow \text{если}$$

$$0 < x < 1, \text{ то } f(x) < 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow \text{или } f(x) < 0 \text{ или } f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$\text{если } f(x) < 0 \text{ и } f\left(\frac{1}{y}\right) < 0, \text{ то } x < 1 \Rightarrow \text{и}$$

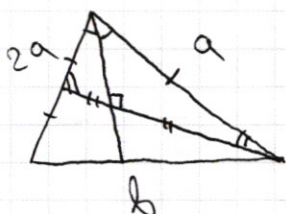
$$\Rightarrow f(x) \text{ всегда } > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < 0, \text{ и } y \neq x, \text{ иначе}$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0, f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow x < y \text{ (см } (*) \text{)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten scribbles and symbols at the top of the page.

② $p = 900$



$a, b \in \mathbb{Z}$
 $3a > b \Leftrightarrow 3a + b > 2b \Leftrightarrow 900 > 2b \Leftrightarrow b < 450$
 $a + b > 2a \Leftrightarrow b > a$
 $2a + b > a \Leftrightarrow a + b > 0$
 $3a + b = 900$
 $9a > 3a + b \Rightarrow a > 100$
 $225 \leq b < 450$
 $100 < a < 225$
 $2a + 2b > 3a + b \Rightarrow a + b > 450 \Rightarrow a > 100, b > 350$
 $3a + b > 4a \Rightarrow 900 > 4a \Rightarrow a < 225$

$b : 3$
 $a = 100$
 $b = 900 - 3 \cdot 100 = 587$

$b = 351$
 $a = (900 - b) \cdot \frac{1}{3} = \frac{549}{3} = 183$
 $a + b = 534$

$b = 348$
 $a = \frac{552}{3} = 184$

$p = 5a - 900$
 $b = 2a$
 $a = 180$
 $b = 360$

$b = 228$
 $a = \frac{672}{3} = 224$

$a + b = 1000$
 $b = 453$
 $a = \frac{547}{3} = 182$

$3a = 447$
 $450 - 228 = 222$

$b = 225$
 $a = \frac{675}{3} = 225$
 $a = b$

$b = 450$
 $a = \frac{450}{3} = 150$
 $3a = 450$
 $b = 447$
 $a = \frac{453}{3} = 151$
 $3a = 453$

$228 - 449$
 $449 - 228 + 1 = 222$
 $\frac{222}{3} = 74$

7

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$\log_x a = +$$

$$\Rightarrow x^+ = a$$

$$\log_w a + \log_w b \Rightarrow \log_w ab$$

$$\log_w a = +$$

$$w^+ + w^+ = a + b$$

$$\log_w b = P$$

$$\log_w ab = K \Rightarrow w^K = ab$$

$$f(p) = [p/2] \quad p - \text{целое}$$

$$2 \leq x \leq 22$$

$$2 \leq y \leq 22$$

$$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$$

$$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$$

$$f(p) = \frac{p-1}{2}$$

$$f(2) = 1$$

$$x > 1$$
$$f(x) = f(2) + f(\frac{x}{2}) = 1 + \frac{x}{2}$$

$$f(3) = 1 \quad f(\frac{1}{3}) = -1$$

$$f(a) = -f(\frac{1}{a})$$

~~$f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$~~
 ~~$f(0) = f(1) + f(1) = 0$~~
 ~~$f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$~~
 ~~$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $x_1 = a$
 $x_2 = ay = b$
 $x_3 = ay^2 = c$
 $x_4 = ay^3$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{ay + \sqrt{a^2y^2 - 2ay}}{a} =$$

$$= y \Rightarrow x_4 = y$$

$$\frac{ay^3 = y}{ay^2 = 1} = c = x_3$$

② $\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} & ① \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & ② \end{cases}$

$$y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1)$$

$$(x-6)^2 - 16 + 2(y-1)^2 - 2 = 0$$

① $x^2 - 12xy + 36y^2 = (x-6)(y-1)$

$$\begin{aligned} x-6 &= a & y-1 &= b \\ x-6y &= (x-6) + 6 - (y-1) - 6 = a - 6b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} \mid \frac{4}{1} \mid \frac{-4}{-1}$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 - 13ab = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 13ab + 36b^2 &= 0 \\ \Delta &= 13^2b^2 - 16 \cdot 36b^2 = (169 - 576)b^2 = -407b^2 \\ a &= \frac{13b \pm \sqrt{-407b^2}}{2} = \frac{13b \pm 5b}{2} = 9b/4b \end{aligned}$$

$$a = \pm \sqrt{18 - 2b^2}$$

Ⓐ $9b = \sqrt{18 - 2b^2}$

$$81b^2 = 18 - 2b^2$$

$$83b^2 = 18$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{18}{83}} \Rightarrow y = b+1 = \pm \sqrt{\frac{18}{83}} + 1$$

$$x = a+6 = 9b+6 = \pm 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6$$

$$ab \geq 0$$

$$\begin{aligned} 34b^2 - 13ab + 18 &= 0 \\ 34b^2 - 13b\sqrt{18-2b^2} + 18 &= 0 \end{aligned}$$

Ⓑ $4b = \sqrt{18 - 2b^2}$

$$16b^2 = 18 - 2b^2$$

$$18b^2 = 18$$

$$b = \pm 1$$

$$y = b+1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = a+6 = 4b+6 = \begin{bmatrix} 4+6=10 \\ -4+6=2 \end{bmatrix}$$

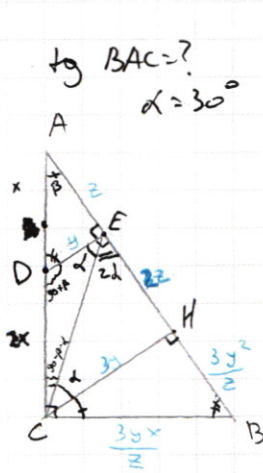
5

$$\begin{cases} 8x - 6|2x-1| \leq ax + 6 & \Leftrightarrow -8x + 6|2x-1| \geq -ax - 6 \\ -8x^2 + 6x + 7 \geq ax + 6 & \Leftrightarrow 8x^2 - 6x - 7 \leq -ax - 6 \end{cases}$$

$$8x^2 + 2x - 6|2x-1| - 7 \leq 0$$

$$-16x^2 + 4x + 6|2x-1| + 7 \geq ax - 6$$

4



tg BAC = ?
 $\alpha = 30^\circ$

$$\text{tg BAC} = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{CH}{AH} = \frac{y}{z}$$

$DE \parallel CH \Rightarrow CHED$ - up/yr TP-um

uz wogedum: $DE = y, CH = 3y, AE = z, CH = 2z$

$$\frac{CH}{AH} = \frac{3y}{3z} = \frac{CB}{AC} = \frac{HB}{AH}, \quad CB = \frac{3yx}{z}, \quad HB = \frac{y}{z} \cdot 3z = 3y$$

$$AC \cdot CB = CH \cdot AB \Leftrightarrow 3x \cdot \frac{3yx}{z} = 3y \cdot \left(3z + \frac{3y}{z}\right) =$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2y}{z} = 9y \left(\frac{z^2 + y^2}{z} \right) \Rightarrow x^2 = z^2 + y^2$$

$$CB^2 = AB \cdot HB \Leftrightarrow \frac{9x^2}{z^2} = \frac{3y}{z} \cdot \frac{3(z^2 + y^2)}{z}$$

$$CE = \sqrt{9y^2 + 4z^2} = 4z \Rightarrow 9y^2 + 4z^2 = 16z^2$$

$$9y^2 = 12z^2 \Rightarrow 3y^2 = 4z^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$S_{CED} = S_{CHA} - S_{DEA} - S_{CHE} =$$

$$= \frac{1}{2} (3y \cdot 3z - y \cdot z - 3y \cdot 2z) =$$

$$= \frac{1}{2} (2yz) = yz = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$3x = \sqrt{7}$
 $9x^2 = 7$
 $x^2 = \frac{7}{9}$

$$\frac{y}{z^2} = \frac{4}{3}$$

$$y^2 + z^2 = \frac{7}{9}$$

$$y^2 = \frac{4}{3} z^2$$

$$y^2 = \frac{7}{9} - z^2$$

$$\frac{4}{3} z^2 + z^2 - \frac{7}{9} = 0$$

$$\frac{7}{3} z^2 - \frac{7}{9} = 0$$

$$z^2 - \frac{1}{3} = 0$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad z = \frac{2}{3}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)