МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

$+1$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

Сделаю замену $b=x-1$; $a=y-2$. Тогда система будет:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ (a-2b)^2=ab \\ a^2+2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ 4b^2-5ab+a^2=0 \\ 2b^2+a^2=3 \end{cases}$$

Решу второе ур-е отн-но b: $4b^2-5ab+a^2=0$

$$b=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-16a^2}}{8}=\frac{5a\pm 3a}{8};\ b_1=a;\ b_2=\frac{a}{4}$$

Подставлю в 3-е ур-е: $2b_1^2+a_1^2=3$; $3a_1^2=3$; $a_1=\pm 1$

Здесь $a_1=b_1=\pm 1$; Пара $(1;1)$ не подх., т.к. $a\geq 2b$, а пара $(-1;-1)$ подходит. Дальше подставлю b_2: $2b_2^2+a_2^2=3$

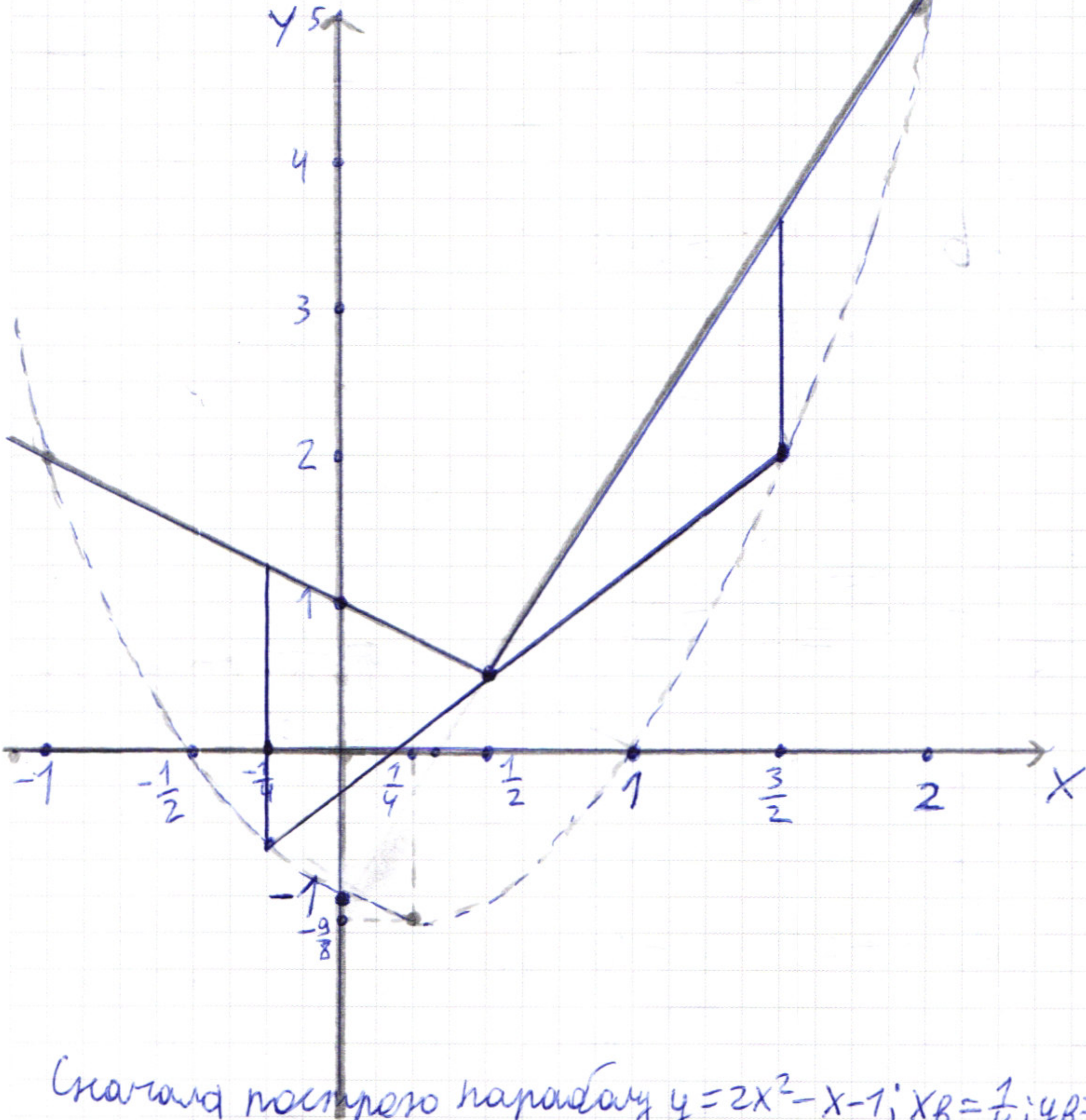
$2\cdot\frac{a_2^2}{16}+a_2^2=3$; $a_2^2\cdot\frac{9}{8}=3$; $a_2^2=\frac{8}{3}$; $a_2=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$; $b_2=\frac{\pm\sqrt{\frac{8}{3}}}{4}$

Третья пара $(a;b)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ подходит, т.к. $a\geq 2b$, а четвертая пара $\left(-\frac{\sqrt{8}}{3};-\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ не подходит. Обратная замена: $\begin{matrix} x=b+1 \\ y=a+2 \end{matrix}$; Первая пара: $(x;y)=(0;1)$; Вторая пара: $(x;y)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+1;\sqrt{\frac{1}{6}}+2\right)$.

Ответ: подходят лишь две пары чисел x и y и это: $(x;y)=(0;1)$; и $(x;y)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+1;\sqrt{\frac{1}{6}}+2\right)$

Задача 6 (лист 1) | Решу задачу графически. Для уменьшения рисунка сожму ось y вдвое. $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

Сначала пойдет график, а ~~потом~~ потом пояснения.



Сначала построю параболу $y=2x^2-x-1$; $x_в=\frac{1}{4}$; $y_в=-\frac{9}{8}$.

$2x^2-x-1=0$; $x=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 2}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=1;-\frac{1}{2}$.

Далее часть с модулем: $y=x+|2x-1|$; $x\ge\frac{1}{2} \Rightarrow y=3x-1$

$x\le\frac{1}{2} \Rightarrow y=1-x$. Точки пересечения параболы и уголка:

$2x^2-x-1=3x-1$; $x=2$; $y=5$; Вторая точка $2x^2-x-1=1-x$; $x=-1$; $y=2$.

Ясно, что на участке $[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}]$ прямая $ax+b$ должна лежать под „уголком" и над параболой. При этом она должна пересечь прямые $x=-\frac{1}{4}$ и $x=\frac{3}{2}$, которые заключены в этой области. Рассмотрим прямую, (лист 2 →)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 лист 2 которая проходит через точку $\left(\frac{3}{2};2\right)$ и через точку $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$. Эти точки являются пересечением параболы с указанными прямыми.

Ур-е прямой прох. через эти 2 точки: $y=ax+b$

$$\begin{cases} 2=\frac{3}{2}a+b \\ -\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}a+b \end{cases} \Rightarrow \frac{21}{8}=\frac{7}{4}a \Rightarrow a=\frac{3}{2};\ b=2-\frac{3}{2}a=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}.$$

$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$. Замечу, что точка, являющаяся „вершиной уголка" лежит на этой прямой. (т.к. $\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$)

Значит, при любом изменении a или b прямая ax+b будет пересекать либо параболу, либо уголок, а такое недопустимо условием. Значит такая прямая единственна. $\boxed{\text{Ответ: } (a;b)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 1 | ~~Пуска~~ Пускай знаменатель прогрессии q. Тогда $b=aq$; $c=aq^2$ или $a=\frac{c}{q^2}$; $b=\frac{c}{q}$.

$ax^2+2bx+c=0$; Корни: $x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$, подставим a и b из начала: $x=\frac{-2\cdot\frac{c}{q}\pm\sqrt{4\cdot\frac{c^2}{q^2}-4\cdot\frac{c}{q^2}\cdot c}}{2\cdot\frac{c}{q^2}}=\frac{-\frac{2c}{q}}{\frac{2c}{q^2}}=$

$=-\frac{2c}{q}\cdot\frac{q^2}{2c}=-q$. У уравнения один корень и это 4-й член прогрессии, равный cq. Значит

$cq=-q$; $c=-1$

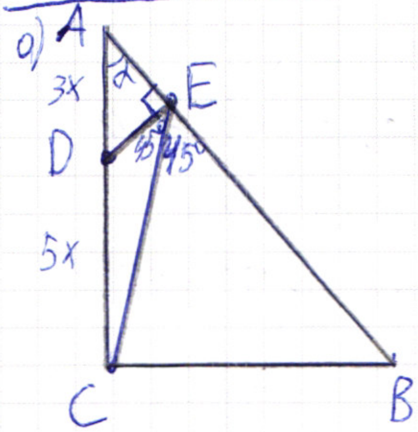
$\boxed{\text{Ответ: Третий член } c=-1}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 | Найти: $tg\,BAC = tg\,\alpha$.

а)



Решение: $\angle BEC = 90 - \angle CED = 45^\circ$

Обозначим $AD = 3x$; $DC = 5x$, и $\angle BAC = \alpha$.

Тогда $\angle ADE = 90 - \alpha$; $\angle EDC = 180^\circ - \angle ADE = 90 + \alpha$. Также $\angle ABC = 90 - \angle BAC = 90 - \alpha$.

Теорема синусов для $\triangle CEB$:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin(90-\alpha)} = \frac{EC}{\cos\alpha}.$$

Теор. синусов для $\triangle DEC$:

$$\frac{DC}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin\angle EDC} \Rightarrow \frac{5x}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\sin(90+\alpha)} = \frac{EC}{\cos\alpha}.$$

Отсюда видим, что $\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{5x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow BC = 5x$. $\boxed{tg\,\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}.}$

б) $\sin\alpha = \frac{5}{8}\cos\alpha = \frac{5}{8}\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\sin^2\alpha = \frac{25}{64} - \frac{25}{64}\sin^2\alpha$; $\frac{89}{64}\sin^2\alpha = \frac{25}{64}$

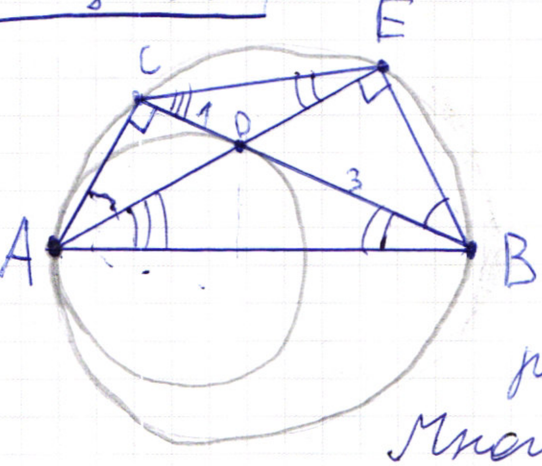
$\sin^2\alpha = \frac{25}{89}$; $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{89}}$, т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Также $x = \frac{\sqrt{29}}{8}$.

$ED = 3x\sin\alpha = 3\cdot\frac{\sqrt{29}}{8}\cdot\frac{5}{\sqrt{89}} = \frac{15}{8}\sqrt{\frac{29}{89}}$. $\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{89}}$. Из выше следует, что $EC = \frac{5x\cos\alpha}{\sin 45^\circ}$ (из теор. син. $\triangle DEC$); $EC = \frac{5\cdot\sqrt{29}}{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{89}} = 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{29}{89}}$. Тогда $S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot EC\cdot ED\cdot\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{29}{89}}\cdot\frac{15}{8}\sqrt{\frac{29}{89}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{29}{89}\cdot\frac{5\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot 15\cdot\cancel{\sqrt{2}}}{2\cdot 8\cdot\cancel{2}} = \frac{29\cdot 5\cdot 15}{89\cdot 16}$

~~75 × 29 = 675 + 150 = 2175; 89 × 16 = 534 + 89 = 1424; 2175 − 1424 = 751~~

Ответ: $S_{CED} = \frac{2175}{1424}$ или $S_{CED} = 1\frac{751}{1424}$, Ответ: $tg\angle BAC = \frac{5}{8}$

Задача 5



Дано: CD=1; BD=3

Найти: R, r, S_{BACE}.

$R=\frac{AB}{2}$.

Решение:

$\angle ACB=\angle AEB=90°$, т.к. они опираются на диаметр AB.

Много равных углов и несколько подобных треугольников. Углы равны, т.к. опираются на 1 дугу. $\triangle ADB \sim \triangle DCE$, $\triangle ACD \sim \triangle BED$.

Задача 7

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(x/y)\in[\frac{1}{21};21]$. Можно узнать $f(x)$ и $f(y)$ для всех $1\le x,y\le 21$. $f(1)=f(2\cdot\frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{2})=0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{2})=-f(2)$; Также: $f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$. $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

$f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(4)=2$; $f(5)=2$; $f(6)=2$; $f(7)=3$ $f(8)=3$

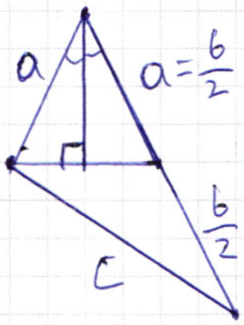
$f(9)=2$; $f(10)=3$; $f(11)=5$ $f(12)=2+1=3$; $f(13)=6$ $f(14)=4$ $f(15)=3$

Если выписать все значения f, то можно будет взять все $f(y)>f(x)$ и мы найдем кол-во.

$f(16)=4$; $f(17)=8$ $f(18)=3$ $f(19)=9$ $f(20)=4$ $f(21)=4$

Задача 2 | Рассмотрим ~~...~~ треугольник. Если удвоить боковую сторону, то получившийся треугольник нам подходит.

У нашего треугольника стороны a, b, c. И $a=\frac{b}{2}$. Условие, приведенное выше достаточное и единственное. Теорема косинусов:



$$c^2=4a^2+a^2-2\cdot 2a\cdot a\cdot \cos\alpha$$

$$c^2=5a^2-4a^2\cos\alpha=a^2(5-4\cos\alpha)$$

$$c=a\sqrt{5-4\cos\alpha}$$

$$1200=2\cdot600=2\cdot2\cdot2\cdot150=2^3\cdot2\cdot75=2^4\cdot5\cdot15=2^4\cdot5^2\cdot3$$

Сумма всех сторон это $a(\sqrt{5-\cos\alpha}+3)$, должна делиться на 1200.

$\sqrt{5-\cos\alpha}\in[1;\sqrt{5}]$; $(\sqrt{5-4\cos\alpha}+3)\in[4;3+\sqrt{5}]$, Значит, если идти по этому промежутку и брать делители числа 1200, то мы найдем все возмож. варианты. Варианты:

$\frac{1200}{S_a}\in\left[\frac{1200}{3+\sqrt{5}};300\right]$

$\frac{(\sqrt{5}-3)1200}{5-9}=[(3-\sqrt{5})\cdot300]=[900-2.23\cdot300]=[230.....]+1=$

$=230+1=231 \Rightarrow \frac{1200}{S_a}\in[231;300]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего $300-231+1=70$ вариантов.

Ответ: 70 треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

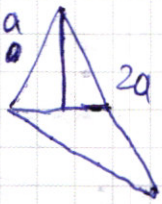
Задача 8 (страница №7). Пусть ~~углы~~ стороны треугольника это a, b, c. Записав теорему косинусов для него, получим

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{cases}$$

И так

Как. a, b, c это натур. числа, то косинус может принимать значения: $1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0$, которым соответствуют возможные углы: 60°; 120°; 90°. То есть возможны треугольники с углами: (60°, 60°, 60°). и всё. Если взять 60° и 90° будет $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, что нельзя. Если взять 60° и 120°, то третий угол 0°. Ясно, что 120° и 90° тоже нельзя, т.к. сумма углов должна быть равна 180°.

ЧЕРНОВИК.



$c^2=4a^2+a^2-2\cdot 2a\cdot a\cos\alpha$

$c^2=5a^2-4a^2\cos\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c; $b = qa$; $c = q^2 a = bq$; $b = \frac{c}{q}$; $a = \frac{c}{q^2}$

$ax^2 + 2bx + c$

$D = 4b^2 - 4ac$; $x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = aq^3 = cq$

$cq = \frac{-2\frac{c}{q} \pm \sqrt{4\frac{c^2}{q^2} - 4 \cdot \frac{c}{q^2} \cdot c}}{2 \cdot \frac{c}{q^2}} = \frac{-\cancel{2}\cancel{c}}{\cancel{q}} \cdot \frac{q^{\cancel{2}}}{\cancel{2c}}$

$\Rightarrow cq = -q \Rightarrow c = -1$

7)

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = [p/2]$, p - простое

$0 \longrightarrow +\infty$

$[x] \in \mathbb{Z}$; $[x] \leq x$; $1 \leq x \leq 21$; $1 \leq y \leq 21$

$(x;y) \in \mathbb{N}$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(1) = f(1) + f(1)$; $f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$; $f(3) = 1$; $f(5) = 2$; $f(7) = 3$; $f(11) = 5$; $f(13) = 6$

$f(17) = 8$; $f(19) = 9$; $f(4) = f(2 \cdot 2) = 2$; $f(6) = 2$; $f(8) = 3$; $f(9) = 2$; $f(10) = 3$

$f(a^2) = 2f(a)$ $f\left(\frac{1}{4}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{1}{9}\right) = 2f\left(\frac{1}{3}\right)$

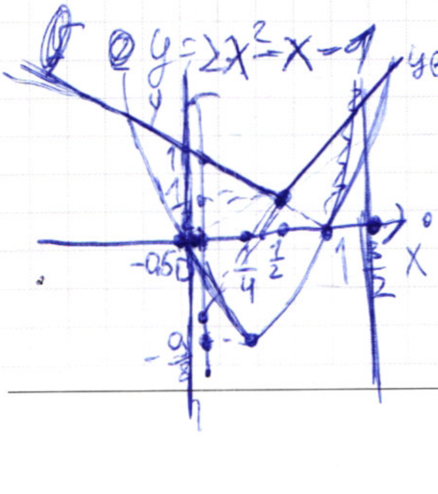
6) $y = 2x^2 - x - 1$ $y_B = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$

$y = x + |2x - 1|$

$x \geq \frac{1}{2}$; $y = 3x - 1$

$\frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = 1; -\frac{1}{2}$;

$x \leq \frac{1}{2}$; $y = x - 2x + 1 = 1 - x$



$y \leq x + |2x - 1|$

$3x - 1 = 2x^2 - x - 1$; $2x^2 = 4x$

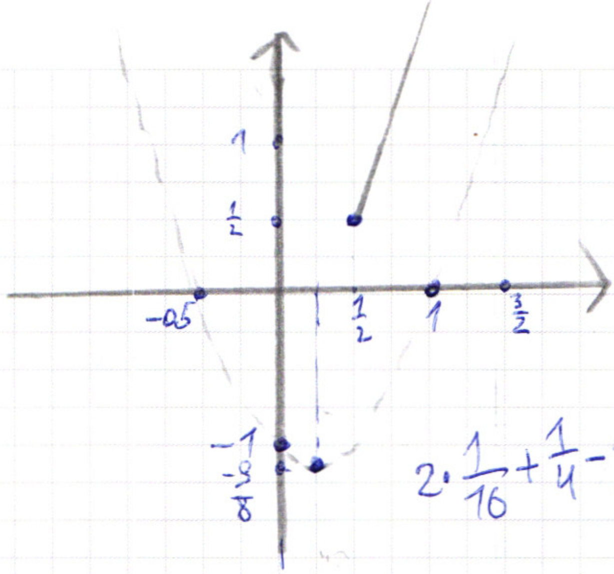
$x^2 = 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

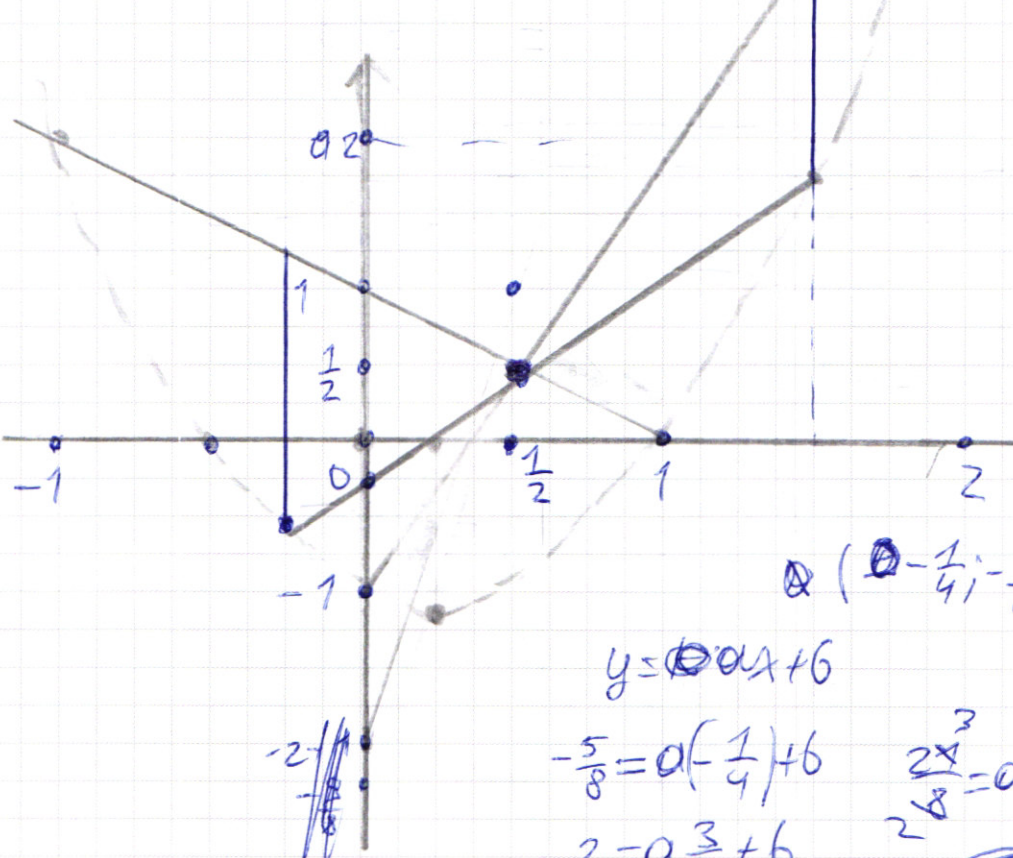
14 см

$1-x=2x^2-x-1$

$2x^2=2$

$x^2=\pm1$

$1=-1$



$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=$

$=-\frac{5}{8}$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1=2$

$\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};2\right)$

$y=ax+b$

$-\frac{5}{8}=a\left(-\frac{1}{4}\right)+b$

$2=a\frac{3}{2}+b$

$\frac{21}{8}=a\left(\frac{6}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}a$

$a=\frac{3}{2}$

$b=2-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}$; $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$; $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

1 пара $(a;b)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$

$\begin{cases} y\geq 2x \\ y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2 \end{cases}$

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$;

$\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}\cdot 2=4x$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0=(y-2)^2+2x^2-4x-1$; $(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2=2x^2+2-4x$

$(y-2)^2+(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2=3$

$y\geq 2x$

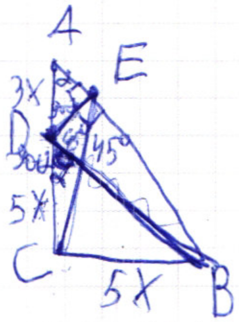
$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0$

$x(y-2)-(y-2)=(x-1)(y-2)$

$y-2x=y-2+2-2x=(y-2)-2(x-1)$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$tg\,\alpha - ?$



$\frac{BC}{\sin 45} = \frac{EC}{\cancel{\sin(90+\alpha)}\cos\alpha}$

$\frac{BC}{\sin 45^\circ} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{5x} = \frac{EC}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\alpha}{EC}$

$\frac{5x}{\sin 45^\circ} = \frac{EC}{\cos\alpha}$

$tg\,\alpha = \frac{BC}{5x}$

$tg\,\alpha = \frac{ED}{AE}$; $\frac{3x}{AB} = \frac{ED}{BC}$; $\frac{AE}{8x} = \frac{3x}{AB}$

$AE = \frac{24x^2}{AB}$ $EB = AB - \frac{24x^2}{AB} = \frac{AB^2 - 24x^2}{AB}$

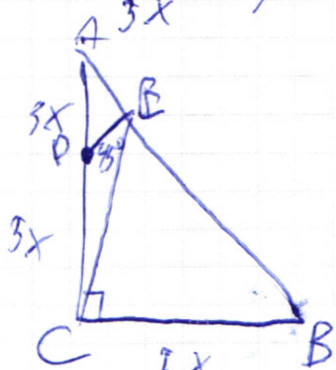
$BC = \sqrt{AB^2 - 64x^2}$

$180 - 180 + \alpha - 45 = \alpha - 45$; $90 - \alpha + 45 = 135 - \alpha$

$180 - 90 - \alpha - 45 = 45 - \alpha$; $90 - 45 + \alpha = 45 + \alpha$

$\sin(90+\alpha) = \sin(180 - 90 - \alpha) = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$

$\frac{BC}{3x} = 1$; $BC = 3x$;



$tg\,BAC = tg\,\alpha = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}$

$8x = \sqrt{29}$

$S_{CED} - ?$

$\frac{5}{8}$

$\frac{5x}{\sin 45} \cdot \frac{8}{\sqrt{89}} \cdot \frac{15}{8}\sqrt{\frac{29}{89}} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{5\sqrt{29}}{\sqrt{89}} \cdot \frac{15}{16} \cdot \sqrt{\frac{29}{89}} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3\end{cases};\ y-2=a;\ x-1=b$$

$$\begin{cases}a-2b=\sqrt{ab} \\ 2b^2+a^2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\geq 2b \\ a^2+4b^2-4ab=ab;\ a^2+4b^2-5ab=0 \\ 2b^2+a^2=3\end{cases}$$

$$\cancel{a^2+4b^2-4ab-2b^2-a^2=ab-3;\ 2b^2-5ab+3=0}$$

$$b=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-4\cdot3\cdot2}}{4}=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-24}}{4}$$

$$a^2-4ab-ab+4b^2=0$$

$$4b^2-5ab+a^2=0$$

$$b=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-4\cdot4\cdot a^2}}{8}=\frac{5a\pm3a}{8}=a;\ \frac{a}{4}$$

$$a^2+2b^2=3;\ a^2+2\cdot a^2=3;\ a^2=1;\ a=\pm1\quad b=\pm1$$

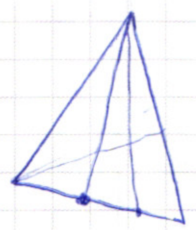
$\underline{a=-1;\ b=-1}$; $a^2+8\cdot\frac{a^2}{16}=3;\ \frac{3}{8}a^2=3;\ a^2=\frac{8}{3};\ a=\pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

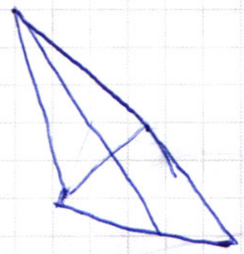
$b=\frac{a}{4};\ a\geq 2b;\ \sqrt{\frac{8}{3}}\geq\frac{\sqrt{\frac{8}{3}}}{2};$

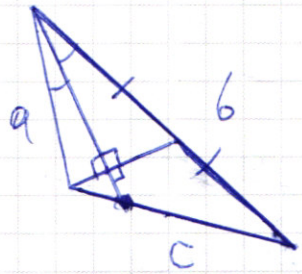
$\left(\sqrt{\frac{8}{3}};\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$; $y=a+2$, $x=b+1$; $(x;y)=(0;1)$

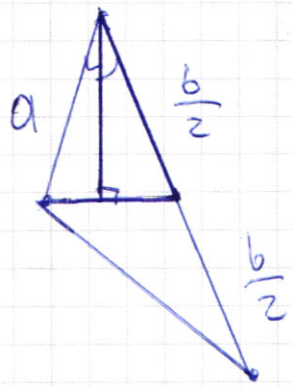
$(x;y)=\left(\sqrt{\frac{8}{3}}+1;\sqrt{\frac{1}{6}}+2\right)$

$P=1200=a+b+c;\ a,b,c\in N$









$a=\frac{b}{2}$

$c=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$\Rightarrow\cos\alpha$ либо $1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\angle\alpha$ это 0° или 180° или 60° или 120°

60° или 120° или 90°

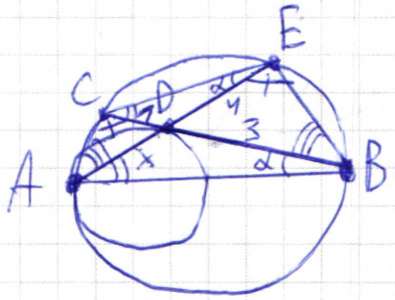
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



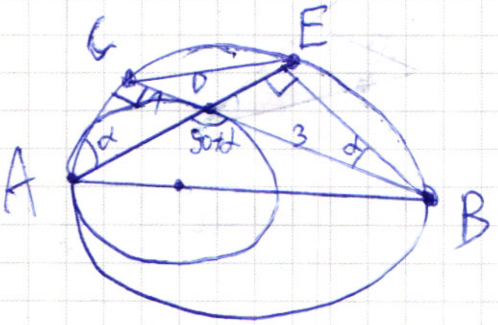
$R_б = \frac{AB}{2}$

$a+b+c+d = 180^\circ$

$a+b+x = 180$

$\frac{3}{4} = \frac{x}{1}$

$\frac{3}{x} = \frac{4}{1}$



$\frac{CE}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\angle CEA}$

$\cancel{AD = \sin\alpha}$ $\frac{1}{AD} = \sin\alpha$; $\frac{AD}{1} = \frac{1}{\sin\alpha}$.

$EB = 3\cos\alpha$; $AC = \operatorname{ctg}\alpha$

$AB = \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + 16}$