## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

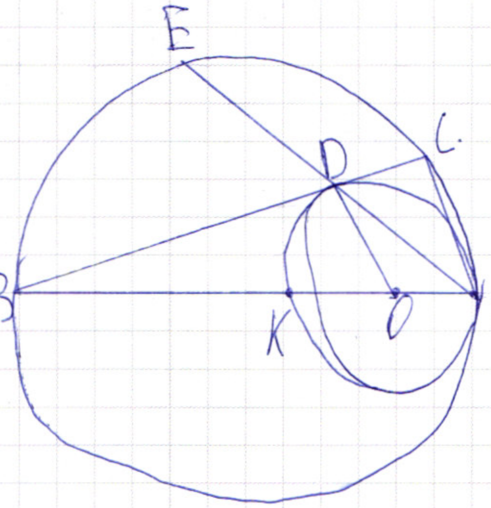
7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставив, получаем, что 2 из 4 ~~ответов~~ пар не подходят, т.к. извлекается корень из отрицательного числа при подставлении, или ~~не выполняется~~ числа по разные стороны от знака = противоположны.

Ответ: $(0;1)$; $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

№5




Дано:
$BD=3$
$CD=1$
$BC$ - касательная к $w$
$AB$ - диаметр.
Найти:
~~$r$~~ $R$, $r$,
$S_{BACE}$

Решение:

1. $BC$ - касательная к $w \Rightarrow OD \perp BC$.
2. $\angle BCA = 90^\circ$, ~~т.к.~~ как вписанный, опирающийся на диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow AC \parallel DO$, как перпендикуляры к одной прямой $\Rightarrow \frac{BD}{CD} =$
$= \frac{BO}{AO}$ по теореме Фалеса $\Rightarrow \frac{BO}{OA} = 3 \Rightarrow \frac{2R-r}{r} = 3 \mid +1 \Rightarrow$
$R = 2r$.
3. Запишем степень точки $A$ к окружности $w$ двумя способами

$BD^2 = AB \cdot BK$

$BD^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$, но $R = 2r$.

$8r^2 = BD^2$

$r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. $AC^2 = AB^2 - BC^2$ по теореме ~~пиф~~ Пифагора

$AC = \sqrt{2}$

5. $AD^2 = CD^2 + AC^2$ по теореме Пифагора

$AD = \sqrt{3}$

6. ~~Степень точки~~ Запишем степень точки D к окружности $\Omega$ двумя способами $AD \cdot DE = BD \cdot CD$, $DE = \frac{BD \cdot CD}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow DE = AD \Rightarrow S_{BACE} = 2S_{BAC} = AC \cdot BC = 4\sqrt{2}$

Ответ: ~~$S_{BACE}$~~ $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$, $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№ 6

Ответ: ~~таких~~ x, a и b нет

№ 7.

Из 2 условия очевидно, что $f(1) = 0$, при этом 1 можно представить, как $a \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$. Заметим, что $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$, тогда, опираясь на вышесказанное $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. Заметим, что сама функция от какого-то числа равна сумме функций от его простых множителей. Найдём f от всех чисел от 1 до 21, суммируя f от его простых множителей

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из этого условия а также из того, что $P = 1200$ очевидно что если нам известна одна из сторон, то мы можем однозначно найти две остальные.

Будем рассматривать сторону, которая в два раза меньше какой-то из двух оставшихся, т.к. вполне очевидно, что если она целочисленна, то и другие стороны целочисленны. Опираясь на вышесказанное, достаточными условиями будут то, что $P - 3a < \frac{P}{2}$, $2a < \frac{P}{2}$, $a \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < \frac{P}{3} \\ a < \frac{P}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a > \frac{P}{6} \\ a < \frac{P}{4} \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a \in (200; 300),\ a \in \mathbb{N}$$

, тогда таких $a$ всего 99

Ответ: 99.

## №3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \quad |^2 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \cancel{5x \pm \sqrt{\ }} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \qquad \frac{5x - 1 \pm \sqrt{25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8}}{2}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5x-1 \pm \sqrt{9x^2-18x+9}}{2} \\ \cancel{y=} 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \cancel{4x\ldots} 4x-2 \\ 2x^2+16x^2-16x+4-4x-16x+8+3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x+1 \\ 2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cancel{2x^2} 18x^2-36x+15=0 \\ \cancel{3x^2-6x=0} \quad y=4x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x^2-6x=0 \\ y=x+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим первое и второе кв. уравнение

1) $3x^2-6x=0$

$3x(x-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$$

2) $18x^2-36x+15=0 \quad |:3$

$6x^2-12x+5=0$

$$x=\frac{12 \pm \sqrt{144-120}}{12} = \left[\begin{array}{l} 1+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1-\frac{\sqrt{6}}{6} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2+\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ y=2-\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 3 | 1 |
| 4 | 2 |
| 5 | 2 |
| 6 | 2 |
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |
| 9 | 2 |
| 10 | 3 |
| 11 | 5 |
| 12 | 3 |
| 13 | 6 |
| 14 | 4 |
| 15 | 3 |
| 16 | 4 |
| 17 | 8 |
| 18 | 3 |
| 19 | 9 |
| 20 | 4 |
| 21 | 4 |

Их того. В таблице ~~x~~ 0 всего 1, 1 – 2, 2 – 4, 3 – ~~5~~ 6, 4 – 4, 5 – 1, 6 – 1, 7 – 0, 8 – 1, 9 – 1.
Тогда ~~если $y=9$, то $f(y)=9$, $x$ - один для $y=10$~~ $f(x(y))=9$ есть 20 $x$ иксов, удовлетворяющих условию, для $f(y)=8$ – 19, $f(y)=6$ – 18, $f(y)=5$ – 17, $f(y)=4$ – 13, $f(y)=3$ – 7, $f(y)=2$ – 3, $f(y)=1$ – 1 итого 78

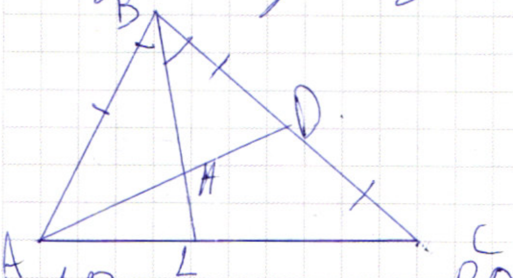
Ответ: 78

~~№6.~~

Доказательство факта из задачи 2:

Пусть одна из сторон в два раза больше другой, $BC=2AB$

Док-во



1. $AD$ – медиана $\to BD=\frac{1}{2}BC=AB$
2. Рассмотрим $\triangle ABD$ – р/б.

$BH$ – биссектриса $\Rightarrow BH$ – медиана и высота

ч.т.д.

Докажем обратное: если биссектриса перпендикулярна одной из медиан, то одна из сторон в 2 раза больше другой

Док-во.

1. ~~BL – бисс.~~ Рассмотрим $\triangle ABD$.

$BL$ – бисс и высота $\Rightarrow \triangle ABD$ – р/б $\Rightarrow AB=BD$.

2. $AP$ – медиана $\Rightarrow BD=\frac{1}{2}BC$, но $BD=AB \Rightarrow \cancel{AB}\ BC=2AB$

ч.т.д.

№6.

Вычтем из каждого элемента неравенства $x$ и получим

$\cancel{x}\ 2x^2-2x-1 \le \cancel{ax} + (a-1)x+b \le |2x-1|$, обозначим $(a-1)$ за $c$.

~~x~~ и построим графики.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Зная, что a, b, c и d - 1, 2, 3 и 4 члены соответственно, выразим a, b, c и d через c и ~~x~~ отношение соседних членов, обозначив его за l. Подставим в уравнение d вместо ч.

$\frac{c}{l^2} \cdot \frac{c^2 l^2}{} + 2\frac{c}{l} \cdot cl + c = 0$

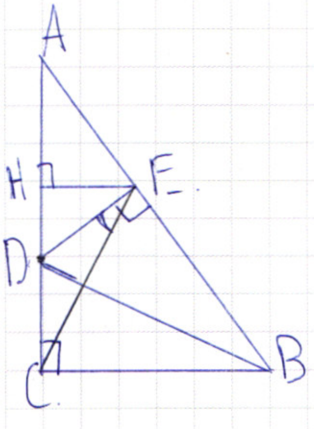
$c^3 + 2c^2 + c = 0.$

$c(c+1)^2 = 0.$

$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1. \end{array}\right.$, если $c=0$, то a, b и c заданы.

Ответ: -1 ~~c - либо 0~~, ~~тогда геом. прогрессия постоянная, либо -1~~

№4.



Дано:

$DE \perp AB$

$\triangle ABC$ - прямоуг.

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ $AC = \sqrt{29}$

Найти:

$tg\angle BAC$, $S_{\triangle CED}$

~~AC=~~

Решение.

1. $\angle DEB = 90^0$, $\angle DCB = 90^0 \Rightarrow DEBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^0$ (опираются на одну дугу) $\Rightarrow BC = \frac{DC}{tg45^0}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2. $BC = \frac{DC}{tg45^\circ}$, $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \cancel{+1} \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{2}{5}$, $BC = \frac{2}{5} \frac{AC}{tg45} \Rightarrow tg\angle \cancel{AB} BAC =$

$= \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5 tg45} = \frac{2}{5}$

~~Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$~~

3 Доп. постр. $EH \perp AC$

4. Из гомотетии ~~переводящей EH~~ относительно точки A, переводящей EH в параллельный ему BC, следует, что $\frac{AE}{AB} = \frac{EH}{BC}$.

5 $AE = \cancel{DE \cdot tg BAC}\ \frac{DE}{tg BAC}$ в прямоуг $\triangle AED$.

6. $BE = \frac{DE}{tg DBE}$, но $\angle DBE = 90^\circ - \angle BAC - \angle CBD = 45^\circ - \angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\angle DBE = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{BE}{AE} = \frac{14}{15}$ $+1$, $\frac{AB}{AE} = \frac{29}{15}$, $\frac{AE}{AB} = \frac{15}{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{EH}{BC} = \frac{15}{29}$, но $BC = \frac{2}{5} AC \Rightarrow EH = \frac{6}{29} AC$.

7. $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} DC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} AC \cdot \frac{6}{29} AC = \frac{3}{5} \cdot 1{,}2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$, $S_{\triangle CED} = 1{,}2$.

~~$2x^2 - x - 1 \leq ax + b$~~

~~$2x^2 - x - 1 - a - ax - b \leq 0$~~

~~$2(x + \frac{\sqrt{a+1}}{2})^2 + (b x + (1-b$~~

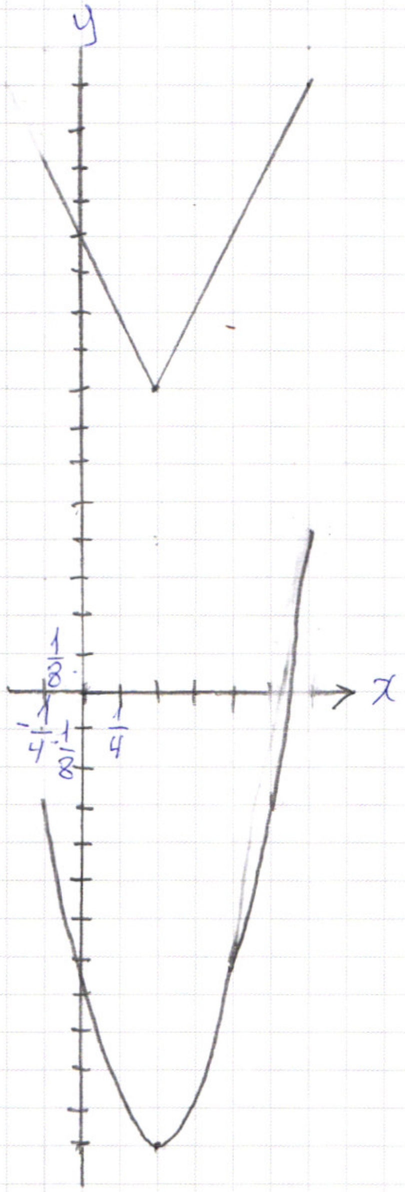
№2

~~Для того, чтобы~~ Одна из биссектрис треугольника перпендикулярна одной из медиан тогда и только тогда, когда одна из сторон в два раза больше другой (см доказательство на с. 8).

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$c=c$

$a=\frac{c}{12}$

$b=\frac{c}{1}$

$d=c$

$2x^2-x-1 \le ax+b \quad 3x-1$

$c^3+2c^2+c=0$

$c=0 \quad y \ge 2x \quad \frac{3}{8}-1$

$c^2+c+1=0$

$c=-1$

$2x^2-x-1=x+|2x-1|$

f abc $\frac{9}{2}-\frac{3}{2}$

$f(a)+f(b)+f(c)$

3 8 3,5

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y \ge 2,\ x \ge 1 \quad y-2x=\sqrt{(y-2)\cdot x-(y-2)}$

$x(x-1)+(x-1)(x+1)$

$(x-1)\cdot(x+2)$

$2x^2 + \cancel{y^2} - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(y-2)(x-1) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \\ \cancel{y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0} \end{cases}$$

$(x-1)(x+2) \quad -(x-1)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) \quad 0;\ 1$

$(x\sqrt{2}+y-\sqrt{2}-2)^2=(y-2x)^2+3$

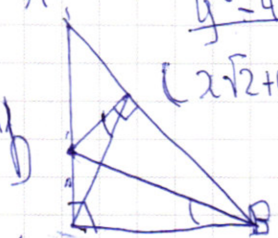
$y=\frac{4 \pm \sqrt{16-8x^2+16x-12}}{2}$

$y=\frac{4 \pm \sqrt{-8x^2+16x+4}}{2}$

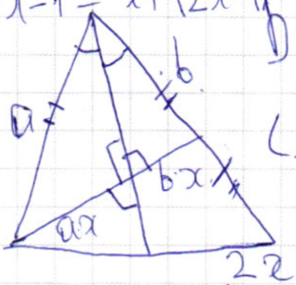
$(y-x\sqrt{2}-\sqrt{2}-2)^2$

$4(-2x^2+4+1)$

$5x$



A D C



a b $ax$ $bx$ $2x$

$\frac{1}{2}$ f

$\sqrt{20}\ x$

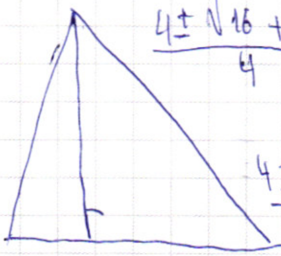
$\frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{4}$ sin

$2 \pm \sqrt{-2x^2+4x+1}$

$2x^2-4x-1=0$

$-2x^2+4x+1 \ge 0$ 9 $\cancel{B+r^2=d^2+d^2-2dr+r^2}$

$(x-1)\cdot(\pm\sqrt{1+4x-2x^2})=$



$\frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{5+2}$

$\frac{5+2}{5+2}$ $2 \pm \sqrt{6}$

$\cancel{\cos\alpha \sin\beta}$ $\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\frac{\cos\beta-\sin\beta}{\cos\beta+\sin\beta}$$

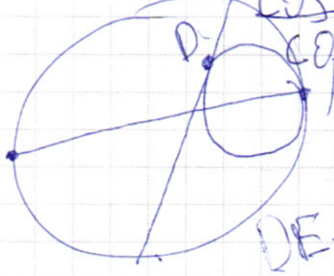
$y^2-4xy-4x^2=xy+2x+y-2$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

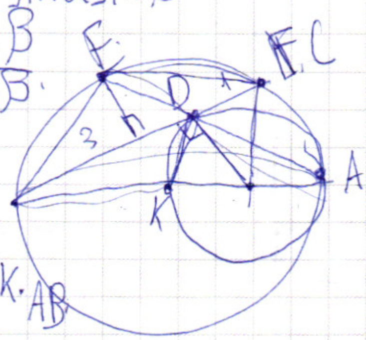
$y^2-5xy-4x^2+2x+y-2$

$3+9+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$\cancel{d-2r}$ $84R^2-84Rr=$



D A B



F E C D A B K 3 h

$DE \cdot AD = BK \cdot AB$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № X
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{(y-2x)^2 = (x-1)(y-2)}$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4y^2+16y^2+\cancel{12}}}{4}$ $4 \pm 2\sqrt{-y^2}$

1 0 $ax+b \le$ $-x+1$

2 1 $-\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $1^{12}$ $1^{8}$ $-4y^2+16y^2+4$ $\frac{1}{4}$

3 1 $-\frac{9}{8}$ $y^2-4y-1$

4 2 $\frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2}$ $2 \pm \sqrt{5}$

5 2

6 $2y^2$ $4x^2$ $a=2,\ b=0$

$y^2 - 5xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$ $9x^2 - 18x + 9$

7 3

8 $3y = \cancel{5x}\ 5x - 1 \pm \sqrt{25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8}$ $b \in [-1; 1]$

9 2

$\frac{5x-1+\sqrt{\ }}{2}$ $3(x-1)$

10 3 21

11 $\frac{5}{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}$

12 3 $2\sqrt{\ }$ $\cancel{2}$ $\frac{\sqrt{6}}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ $\frac{2}{3} + \sqrt{6} - 2 - \frac{\sqrt{6}}{3} - 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2$

13 6

14 $4^2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $3 \cdot 7 + \frac{1}{2}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

15 3 $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

16 4 $f(x) + f(\frac{1}{y})$ $f(1)$ $\frac{3}{2} - 3 - 1$

$2x^2 - 2x - 1 \le (a-1)x + b \le |2x-1|$

17 8 $\cancel{x-a}$ $3x - ax - (b+1) \ge 0$

18 3 $-1$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{8}$ $2x^2 - x - 1 \le ax + b$

19 9 $BD^2$

20 4 c $b\ 5$ $\cancel{2 - \frac{3}{2}a - b - 1 \ge 0}$

21 4

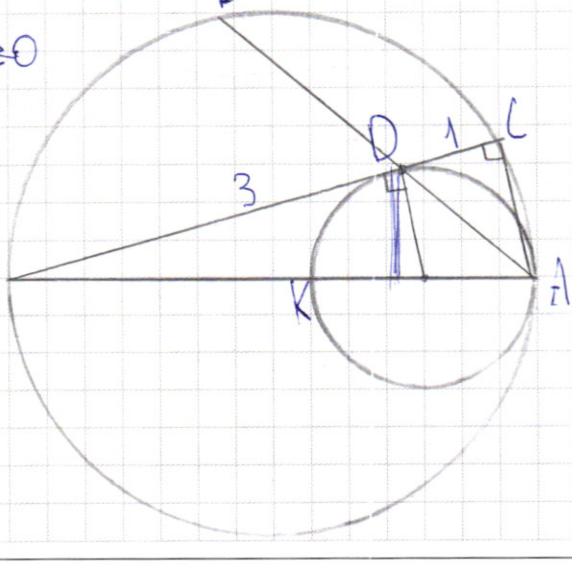
$3 \le \frac{3}{2}a + b \le 3{,}5$ $\frac{6\sqrt{2}}{4} \cdot 3\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

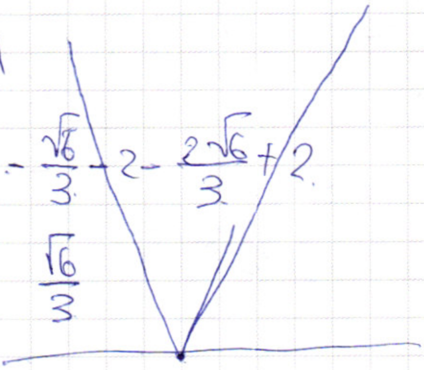
$19+18+17+13+7+3+1$

$-\frac{1}{8} \le b \le 1$

0 1 1 2,2 2 3 3 2 5 3 78

~~12 1~~



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)