МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

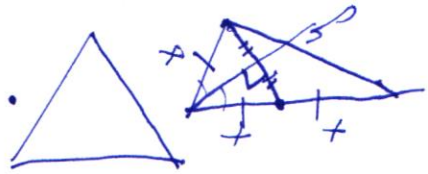
ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений



$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

$Q > 0$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

160

$\cancel{f(a;b)}$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]; p$ – простое

$\frac{32}{5}$
0

$(x;y) \in \mathbb{N}$
$2 \le x \le 22$
$2 \le y \le 22$
$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$260 \,|\, 32$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

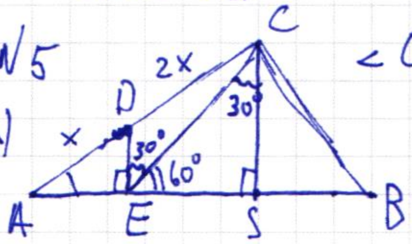
$a = a$; $b = a\cdot q$; $c = aq^2$; $x = aq^3$; $a; b; c; q \neq 0$; $x = 0$

$ax^2 - 2bx + c = 0 \to D = 4aq^2 - 4aq^2 = 0$

$x = \frac{2b}{2a} = \frac{aq}{a} = q = aq^3 \to a = \frac{1}{q^2}$; $c = aq^2 = \frac{1}{q^2}\cdot q^2 = 1$

Ответ: 1

№5



$\angle CED = 30^\circ$ $\quad tg\angle CAB = \frac{CS}{AS}$ - ?

а)

$\angle CES = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$; $\angle ECS = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Пусть $DE = y$; $\triangle ACS \sim \triangle ADE$ (по 3 углам) $\Rightarrow \frac{CS}{DE} = \frac{3}{1} \to CS = 3y$

По Теореме синусов в $\triangle ECS$: $\frac{ES}{\frac{1}{2}} = \frac{3y}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \to ES = \sqrt{3}y$, из подобия $\triangle ACS$ и $\triangle ADE$: $AS = \frac{3}{2}ES = \frac{3\sqrt{3}y}{2}$; $CS = 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CS}{AS} = \frac{3y}{\frac{3\sqrt{3}}{2}y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = tg\angle BAC$

$AC = \sqrt{7}$

б) По Теореме Пифагора: $AC^2 = CS^2 + AS^2 \Leftrightarrow 7 = 9y^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot y^2 \to$

$\to y = \frac{2}{3}$; $S_{\triangle CED} = S_{EDCS} - S_{\triangle ECS} =$

$EDCS$ - трапеция, т.к. $ED \parallel CS$; $\angle DEA = \angle CSE$ $\quad S_{EDCS} = \frac{8\sqrt{3}}{9}$; $S_{\triangle ECS} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S_{\triangle CED} = \frac{8\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{9} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6 $8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$; $x\in[-\frac{1}{2};1]$

1) $8x-6|2x-1|=g(x)$

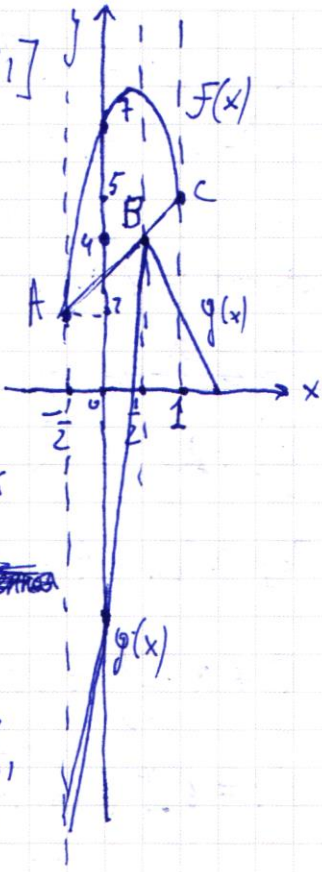
$x\ge\frac{1}{2} \to g(x)=-4x+6$

$x<\frac{1}{2} \to g(x)=20x-6$

$g(\frac{1}{2})=4$

2) $-8x^2+6x+7=f(x)$

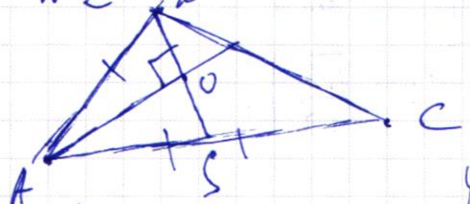
$f(-\frac{1}{2})=2$; $f(1)=5$



3) Заметим, что $A(-\frac{1}{2};2)$; $B(\frac{1}{2};4)$; $C(1;5)$ лежат на одной прямой, ~~это единственная прямая, кот. пересекает эти точки~~ $y=2x+3$, значит это единственная прямая, при $x\in[-\frac{1}{2};1]$, что $g(x)\le ax+b\le f(x)$; $y=2x+3$ и имеет вид $ax+b$, значит $a=2$; $b=3$

Ответ: $(2;3)$

N2



Медиана перпендикулярна биссектрисе, тогда одна сторона вдвое больше другой, т.к. в $\triangle ABS$ биссектриса AO является высотой, тогда $\triangle ABS$ — р/б, тогда $AB=AS$, но BS — медиана $\Rightarrow$ $\Rightarrow AB=AS=SC$, пусть стороны треугольника $a;b;c\in N$, $b=2a$ тогда нам нужно найти количество пар решений в N-числах ~~диофантового~~ уравнения $3a+c=900$; $c=3(300-a)\Rightarrow$ $c \vdots 3$, тогда c можно выбрать 332 способами,

№3 $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-x+6-6y} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

ОДЗ: $(x-6)(y-1)\geq 0$ Пусть: $\begin{cases} x-6=u \\ y-1=v \end{cases}$

$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} :(1) \mid : v : (1) \\ u^2+2v^2=18 :(2) ; v^2 : (2) \end{cases}$ $v\neq 0$

$\begin{cases} \frac{u}{v}-6=\sqrt{\frac{u}{v}} :(1) \\ \cancel{u^2+2v^2=18 :(2)} \\ \frac{u^2}{v^2}+2=\frac{18}{v^2} \end{cases}$ Пусть: $\frac{u}{v}=t\geq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-t-6=0;\ t_{1,2}=-2;3;\ t=-2 \text{ - не подходит} :(1) \\ t^4+2=\frac{18}{v^2} :(2) \end{cases}$

Подставим $t=3$ во (2): $81+2=\frac{18}{v^2} \rightarrow v=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$

(2): $u^2+2\cdot\frac{18}{63}=18 \rightarrow u=\pm\sqrt{18\left(1-\frac{2}{63}\right)}$

$\begin{cases} x=6\pm\sqrt{18\left(1-\frac{2}{63}\right)} \\ y=1\pm\sqrt{\frac{18}{63}} \end{cases}$

Ответ: $\left(6+\sqrt{18\left(1-\frac{2}{63}\right)};1+\sqrt{\frac{18}{63}}\right)$;
$\left(6-\sqrt{18\left(1-\frac{3}{63}\right)};1+\sqrt{\frac{18}{63}}\right)$;
$\left(6+\sqrt{18\left(1-\frac{2}{63}\right)};1-\sqrt{\frac{18}{63}}\right)$;
$\left(6-\sqrt{18\left(1-\frac{2}{63}\right)};1-\sqrt{\frac{18}{63}}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Продолжение.

3a можно выбрать 332 способами; 2a — 166 способами, a — одним способом, ~~значит~~ ~~не треуг в~~ но треугольни-ки могут повторятся, ~~т.к. a может быть~~ значит всего случаев ~~[illegible]~~ : $\frac{166\cdot 332\cdot}{6!}$ способов.

Ответ: $\frac{166\cdot 322}{6!}$ способов.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a=a \quad b=aq \quad c=aq^2 \quad x_1=aq^3 \qquad a\neq 0$

$ax^2-2bx+c=0 \qquad D=4b^2-4ac=4a^2q^2-4\cdot a^2q^2=0$

$x_1=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}=\frac{aq}{a}=q=aq^3 \Rightarrow a=$ $\quad +2$

$aq^2-2\cdot aq^2+aq^2=0 \rightarrow q^2(a-2a+a)=0$

$q=aq^3 \Rightarrow a=\frac{1}{q^2} \ ; q\neq 0 \rightarrow c=a\cdot q^2=\frac{1}{q^2}\cdot q^2=1$ Ответ.

№3

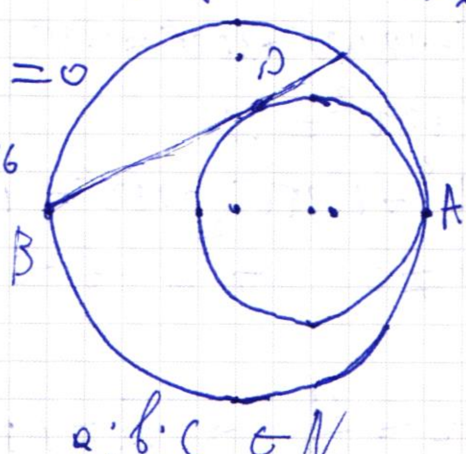
$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

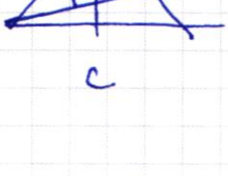
ОДЗ: $xy-6y-x+6\geq 0 \Rightarrow x-6y\geq 0$

$36-16$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2+2y^2=-20+12x+4y$





$a+b+c=900 \quad a;b;c\in N$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$\to x^2+2(y-1)^2-12x+18=0$

$2y^2-2y-2y+1+1$

$2(y-1)^2$

$x^2-12x+36-18+2(y-1)^2=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x-6+6-6y+6-6=(x-6)+6-6(y-1)-6=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

ОДЗ: $(x-6)(y-1)\geq 0$

$$\begin{cases} (x-6)+\cancel{6}-6(y-1)\cancel{-6}=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$\sqrt{x-6}=u\geq 0$

$\sqrt{y-1}=v\geq 0$

$x-6=u\geq 0$

$y-1=v\geq 0$

~~$u-6v=\sqrt{\ }$~~

$$\begin{cases} u^2-6v^2=uv \to u^2=uv+6v^2 \\ u^4-2v^4=18 \quad u^2=\sqrt{18+2v^4} \end{cases}$$

$u-6v\geq 0$

$$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \\ u^2+2v^2=18 \end{cases}$$

$\frac{u}{v}-6=\sqrt{\frac{u}{v}} \quad \frac{u}{v}=6+\sqrt{\frac{u}{v}}$, $=t$

$\frac{u^2}{v^2}+2=\frac{18}{v^2}$

$$\begin{cases} u^2-12uv+36v^2=uv \\ u^2+2v^2=18 \end{cases}$$

$2v^2+12uv-36v^2=18-uv$

$v\neq 0 \quad t^2-t-6=0 \quad D=25 \to t_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=-2;3$

$t^4+2=\frac{18}{v^2} \to \left[\begin{array}{l} \frac{18}{v^2}=18 \to v=\pm 1 \\ \frac{18}{v^2}=83 \to v=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \end{array}\right.$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 3 \\ \hline 81 \end{array}$$
2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

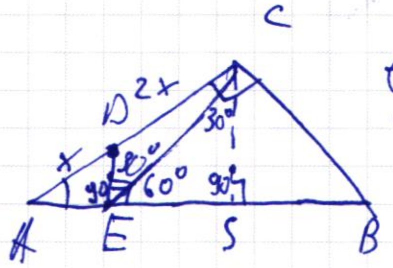
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$tg\angle BAC$; $\frac{CS}{AS}$ - ?

$\angle CED = \frac{\pi}{6} = 30°$

Рассмотрим $\triangle ADE$ и $\triangle ABC$: $\angle ACB = \angle DEA$; $\angle CAB$ - общ $\Rightarrow$

$\triangle ADE$ подобен $\triangle ABC$

$CS^2 + AS^2 = 9x^2$

~~$AE = y \to ES = 2y$~~ $DE = y \to SC = 3y$

$AE = \sqrt{x^2 - y^2}$ $AS = \sqrt{9x^2 - 9y^2}$

из-за 30°

$\frac{CS}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{ES}{\frac{1}{2}} \to \frac{3y}{\sqrt{3}} = ES = \sqrt{3}y$; $EC = 2\sqrt{3}y \Rightarrow$

из подобия $AE = \frac{ES}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}y \to AE + ES = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right)y = AS$

$SC = 3y$ $\frac{CS}{AS} = \frac{3y}{y\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\right)} = \frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{3} \cdot 2}{\cancel{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$tg \angle BAC = arctg\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$S_{ACS} = \frac{CS \cdot AS}{2} = \frac{3\sqrt{\frac{28}{63}} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{28}{63}}}{2} = 3\sqrt{3} \cdot \frac{14}{63}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 $a; b; c \in \cancel{N}$ $a; b; c \geq 0$

$997 \,|\, 3$
$\quad\; 3$

$996 \,|\, 3$
$\quad\; 332$

$c = \cancel{90}\ 3(300-a)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

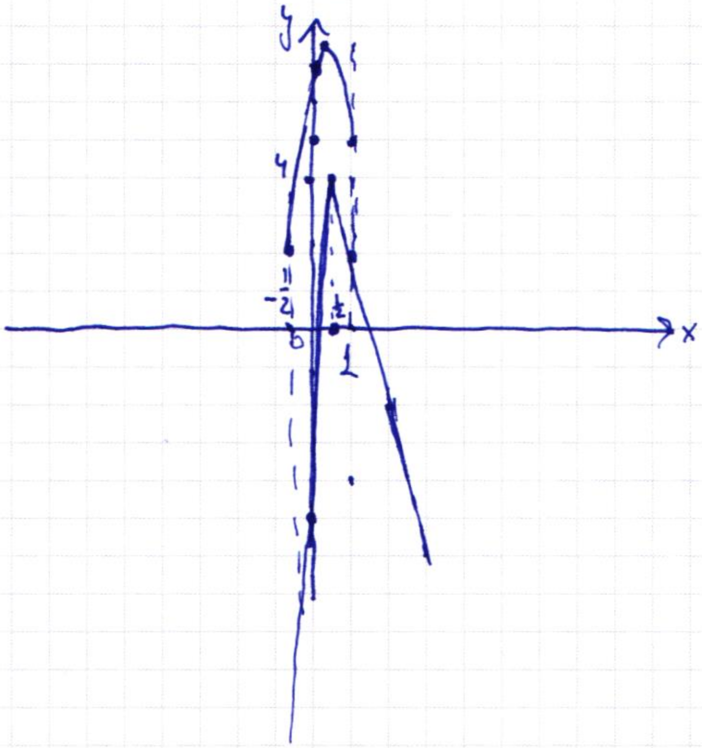
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$ $\quad x \in [-\frac{1}{2};1]$

$(a;b)$ - ?



$8x-6|2x-1| = g(x)$

$2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$:

$8x-12x+6 = g(x)$

$-4x+6 = g(x)$

$x < \frac{1}{2}$:

$8x+12x-6 = g(x)$

$20x-6$

1
32
$\underline{5}$
160

$-8x^2+6x+7 = f(x)$ $\quad f(1) = -8+6+7 = 5$

$D = 36+224 = 260$ $\quad f(\frac{1}{2}) = -2-3+7 = 2$

$x_{min} = \frac{-6}{-16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$y_{min} = \frac{-260}{-32} = \frac{130}{16} = \frac{65}{8}$

6
28
$\underline{8}$
224

$\cancel{ax+b = }$ $\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b=2 \\ a+b=5 \end{cases}$ $|\cdot 2 \to -a+2b=4$

$3b=9$

$b=3 \quad a=2$

$2\cdot\frac{1}{2}+3 = 4$

20
$\underline{8}$
160
64

$+5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9y^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2y^2=7$$

$$9y^2+\frac{27}{4}y^2=7 \quad |\cdot 4 \to 36y^2+27y^2=28 \to 63y^2=28 \to y=\sqrt{\frac{28}{63}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$S_{\Delta CED}=S_{ACS}-S_{\Delta ADE}-S_{\Delta ECS}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{\frac{28}{63}}\cdot\sqrt{\frac{28}{63}}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{28}{63}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

$$S_{\Delta ECS}=\frac{\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\Delta ACS}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot 2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{3y+y}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}y}{2}$$

$$S_{\Delta CED}=\frac{27\sqrt{3}-12\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{18}=\frac{13\sqrt{3}}{18}$$

$$y\cdot 3\sqrt{3}y=\frac{4}{9}\cdot 3\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$2y\cdot\sqrt{3}y \qquad 2\sqrt{3}\cdot\frac{4}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$\frac{3y\cdot\sqrt{3}y}{2}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}}{2} \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)