МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[2 балла]** Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. **[4 балла]** Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

геометрическая прогрессия y_n $\quad y_1 = a$, $y_2 = b$, $y_3 = c = ?$

$ax^2 - 2bx + c = 0$ $\quad y_4$ − корень $\quad c = bq = aq^2$

$\frac{c}{q^2}x^2 - \frac{2c}{q}x + c = 0$ $\quad q \neq 0$ $\quad c \neq 0$ $\quad b = \frac{c}{q}$ $\quad a = \frac{c}{q^2}$

если $c = 0$ то вся прогрессия это нули

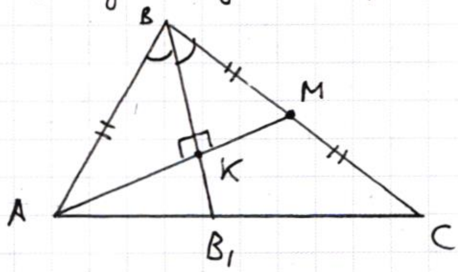
$x^2 - 2qx + q^2 = 0$ $\quad$ единственный корень уравнения

$(x-q)^2 = 0$ $\quad x = q$ $\Rightarrow$ $y_4 = q = y_3 \cdot q = c \cdot q$ $\Rightarrow$ $y_3 = c = 1$

Ответ: 1.

№ 2. (часть 1)

Т. в треугольнике одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан тогда и только тогда, когда одна сторона в 2 раза больше другой.



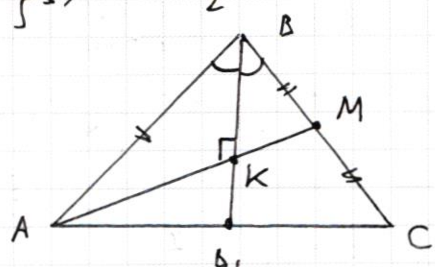
1. Дано: бис. $\perp$ медиане ($BB_1 \perp AM$)

Док-во: $\left.\begin{array}{l} BK - \text{высота } \triangle ABM \\ BK - \text{бис. } \angle ABM \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABM$ − равнобедр.

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} AB = BM \\ AM - \text{мед.} \Rightarrow BM = MC \end{array}\right\} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}BC$

2. Дано: $AB = \frac{1}{2}BC$, BB_1 − бис. AM − мед.



Док-во: $AB = BM$ $\Rightarrow$ $\triangle ABM$ − равнобедр. BK − бис.

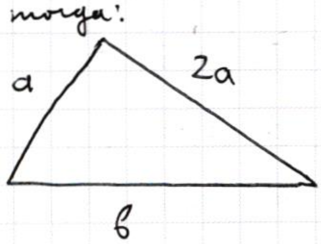
$\Downarrow$

BK − высота и мед.

$\Downarrow$

$BB_1 \perp AM$ − бис $\perp$ медиане.

тогда:



$3a + b = P$ $\quad 3a > b$ $\quad 2a < a + b \Rightarrow b > a$

$a < b < 3a \Rightarrow 4a < P < 6a$ $\quad P = 900 \Rightarrow 150 < a < 225$

№2 (часть 2)

a, в – целые   для каждого a от 150 до 225 существует всего один треугольник, удовлетворяющий условию; для каждого a все стороны треугольника определяются однозначно, а т.к. если a – другое, то и 2a тоже другое, никакая сторона другого треугольника не может равняться первому a т.к. $2a_{min} = 302$, а $в_{min} = 228$ при $150 < a < 225$ остальные стороны всегда больше любого $a: 150 < a < 225$.

Тогда таких треугольников равно количеству целых чисел $150 < a < 225$

Ответ: 74.

№7. (часть 1)

ф-ия f на множестве положительных рациональных чисел для любых чисел a и в из этого множества $f(a \cdot в) = f(a) + f(в)$, при этом $f(p) = [\frac{p}{2}]$ для любого простого числа p

Найти: кол-во пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22$, $2 \leq y \leq 22$ и $f(\frac{x}{y}) < 0$.

Решение: $f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $f(a \cdot 1) = f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(\frac{1}{y} \cdot y) = f(\frac{1}{y}) + f(y) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$ тогда $f(\frac{x}{y}) < 0$

тогда: $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ когда $f(x) < f(y)$

$f(x) = f(p_{1_x}) + f(p_{2_x}) + \ldots + f(p_{m_x})$ (где $p_{1..m_x}$ – простые множители x) (x – натуральное)

$f(y) = f(p_{1_y}) + f(p_{2_y}) + \ldots + f(p_{k_y})$ (где $p_{1..k_y}$ – простые множители y).

тогда можно посчитать: $f(2) = f(3) = 1$; $f(4) = f(5) = f(6) = f(9) = 2$; $f(7) = f(8) = f(10) = f(12) = f(15) = f(18) = 3$; $f(11) = 5$; $f(13) = f(22) = 6$; $f(14) = f(16) = f(20) = f(21) = 4$; $f(17) = 8$; $f(19) = 9$.

тогда нужных пар $(x; y)$ при $x = 2$ – 19; $x = 3$ – 19; $x = 4, x = 5, x = 6, x = 9$ | по 15; $x = 7, x = 8, x = 10, x = 12, x = 15, x = 18$ | по 9; $x = 14, x = 16, x = 20, x = 21$ | по 5;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (часть 2)

$x=11$ – 4; $x=13, x=22$ | по 2; $x=17$ – 1; $x=19$ – 0;

Всего пар нужных $(x;y)$ – $\underbrace{19+19}_{38} + \underbrace{4\cdot\overset{60}{15} + 6\cdot\overset{54}{9} + 4\cdot\overset{20}{5}}_{134} + \underbrace{4 + 2\cdot\overset{4}{2}+1}_{9} = 181$

Ответ: 181.

№6.

Найти: $(a;b)$, для всех $x\in[-\frac{1}{2};1]$ выполнено неравенство

$$8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$$

$$\begin{cases} ax+b \leq -8x^2+6x+7 \\ ax+b \geq 8x-6|2x-1| \end{cases} \qquad \begin{cases} 8x^2+x(a-6)+b-7\leq 0 \\ \left[\begin{array}{ll} ax+b\geq 6-4x & x\geq\frac{1}{2} \\ ax+b\geq 20x-6 & x<\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

$D=a^2-12a-32b+260\geq 0$

$x=\frac{6-a\pm\sqrt{D}}{16}$

$\frac{6-a-\sqrt{D}}{16}$ $\frac{6-a+\sqrt{D}}{16}$

$$\left[\begin{array}{l} x\geq\frac{6-b}{a+4} \\ x\geq\frac{-6-b}{a-20}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\frac{6-a-\sqrt{D}}{16}\leq-\frac{1}{2} \\ \frac{6-a+\sqrt{D}}{16}\geq 1\end{cases} \quad \begin{cases} 14-a\leq\sqrt{D} \\ \sqrt{D}\geq 10+a\end{cases} \Rightarrow \sqrt{D}\geq 12$$

$a^2-12a-32b+260\geq 144$

$a^2-12a-32b+116\geq 0$

$$\begin{cases} \cancel{196}-\overset{-16a}{\cancel{28a}} \leq \overset{64}{\cancel{260}}-\cancel{12a}-32b \\ \cancel{100}+\overset{32a}{\cancel{20a}} \leq \cancel{260}-\cancel{12a}-32b\end{cases} \qquad \begin{cases} a\geq 2b-4 \\ a\leq 5-b\end{cases} \quad 5-b\geq 2b-4 \quad \underline{b\leq 3}$$

$$\left[\begin{array}{l} \ldots \\ -\frac{1}{2}\geq\frac{-6-b}{a-20}\end{array}\right. \qquad \frac{1}{2}\geq\frac{6-b}{a+4}$$

$$\left[\begin{array}{l} a+4\geq 12-2b \\ 20-a\leq 12+2b\end{array}\right. \quad a\geq 8-2b$$

$a\geq 2b-4$ $\quad 5-\cancel{b}\geq 8-\cancel{2}b$

$a\leq 5-b$ $\quad \underline{b\geq 3}$

$b=3$

$a=2$

$4-\underset{24}{\cancel{\ldots}}-96+116=0$

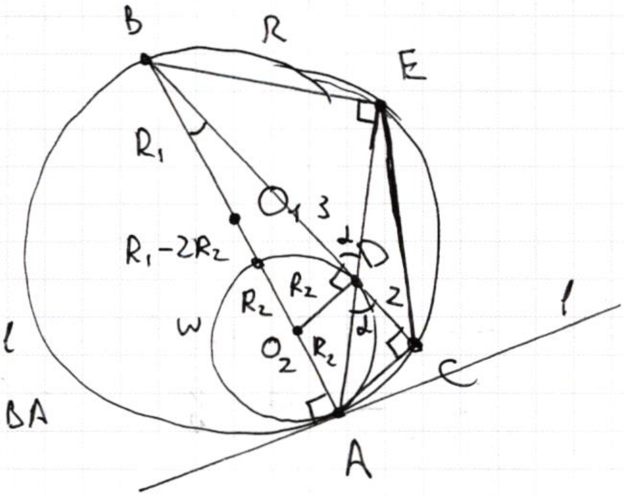
Ответ: $(2;3)$.

№ 5.

$R_1, R_2, S_{BACE} = ?$ $CD = 2$

$BD = 3$

Решение:



Ω и ω касаются в т. A.

проведем их общую касательную l

через т. A. $BA \perp l$, но R_2 тоже $\perp l$

тогда $O_2D \perp BC$ $\Rightarrow$ O_2 лежит на BA

$O_2D = R_2$ $\quad (2R_1 - R_2)^2 = R_2^2 + 9$

$\underline{4R_1^2 - 4R_1R_2 = 9}$ $\quad \angle BCA = 90^\circ$ т.к. угол впис. и опирается на диаметр.

$\frac{3}{5} = \frac{R_2}{AC}$ $\Leftarrow \triangle ABC \sim \triangle O_2BD$

$AC = \frac{5}{3}R_2$ $\quad$ тогда $\underline{(2R_1)^2 = \frac{25}{9}R_2^2 + 25}$

$R_2 = \frac{4R_1^2 - 9}{4R_1}$ $\quad 9 \cdot 4R_1^2 = \frac{25}{16R_1^2} \cdot (4R_1^2 - 9)^2 + 25 \cdot 9$

$9 \cdot 4 \cdot 16 R_1^4 = 25 \cdot 16 R_1^4 - 25 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 2 \cdot R_1^2 + 25 \cdot 81 + 25 \cdot 9 \cdot 16 \cdot R_1^2$

$R_1^4 \cdot 16 \cdot 11 - 25 \cdot 9 \cdot 8 R_1^2 - 25 \cdot 81 = 0$ $\quad D = 25^2 \cdot 81 \cdot 64 + \cancel{16}^{64} \cdot 25 \cdot 81 \cdot \cancel{44}^{11}$

$D = 25 \cdot 81 \cdot 64 (25 + 11) = 25 \cdot 81 \cdot 64 \cdot 36$ $\quad R_1^2 = \frac{25 \cdot 9 \cdot 8 \pm 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6}{16 \cdot 22}$

$R_1^2 = \frac{5 \cdot 9 \cdot \cancel{8}(5+6)^{11}}{2\cancel{16} \cdot 22} = \frac{5 \cdot 9}{4}$ $\quad \underline{R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}}$ $\quad R_1^2 \geq 0$

$\underline{R_2 = \frac{6}{5}\sqrt{5}}$ $\quad AC = \frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{5}}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} BC \cdot AE \cdot \sin\alpha$ $\quad AD = 2\sqrt{6}$

$BC = 5$ $\quad AD^2 = \left(\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{5}} \cdot \sqrt{5}\right)^2 + 4 = 24$

$\triangle BDE \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{3} = \frac{2}{DE}$ $\quad DE = \frac{6}{AD} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

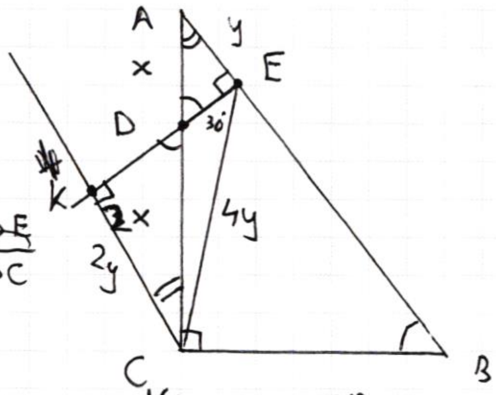
$AE = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}$ $\quad \sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{2}\cancel{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{\frac{5}{\cancel{6}}} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$

Ответ: $R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $R_2 = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; $S_{BACE} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$AD : AC = 1 : 3 \quad DE \perp AB$

а) $tg\ BAC = ? \quad \angle CED = 30°$

$\cancel{\triangle ADE \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB} = \frac{DE}{BC}}$

$\cancel{9x^2 = AE^2 + EC^2 + AE \cdot EC}$

продлим ED так, что $CK \parallel AB \quad \triangle CKD \sim \triangle AED$

против угла в 30° в прямоуг. треуг. лежит катет в 2 раза меньший гипотенузы.

$\left.\frac{CD}{AD} = \frac{CK}{AE} = \frac{2}{1}\right\} \Rightarrow AE = y,\ KC = 2y,\ CE = 4y$

$\cancel{9x^2 = y^2 + 16y^2 + 4y^2} \quad \cancel{9x^2 = 21y^2 \quad 3x^2 = 7y^2 \quad x^2 = \frac{7}{3}y^2}$

$\cancel{DE^2 = x^2 - y^2 = \frac{4}{3}y^2} \quad \cancel{tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt3}}$

$\cancel{DE = \frac{2}{\sqrt3}y} \quad KE = \sqrt{16y^2 - 4y^2} = 2\sqrt3 y \quad DE = \frac{2}{\sqrt3}y$

$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt3} \quad x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y^2 = \frac{7}{3}y^2 \quad y^2 = \frac{3}{7}x^2$

б) $AC = \sqrt7 = 3x \quad S_{CED} = ?$

$S_{CED} = S_{KEC} - S_{KDC} = \frac{2\sqrt3 y \cdot 2y}{2} - \frac{4}{\sqrt3}y \cdot \frac{2y}{2} = 2\sqrt3 y^2 - \frac{4}{3}\sqrt3 y^2$

$S_{CED} = \frac{2}{3}\sqrt3 y^2 \quad x^2 = \frac{7}{9} \quad y^2 = \frac{3}{7}\cdot\frac{7}{9} = \frac{1}{3}$

$S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt3}$ Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt3}$ б) $\frac{2}{3\sqrt3}$.

№3.

$\cancel{x^2 - 12xy + 36y^2 - x^2 - 2y^2 + 12x + 4y - 20 = xy - 6y - x + 6}$

$34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 26 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \le 5-b$

№6.

$y = 8x - 6|2x-1|$

$36+224$

260

максимум при x_{max}

$x<\frac12 \quad y = 8x+12x-6 = 20x-6$

$x \ge \frac12 \quad y = 8x-12x+6 = 6-4x$

максимум при x_{min}

$\frac{a}{2}+b \ge 4$

$y = (8x-6|2x-1|)_{max} = 4.$ при $x=\frac12$

$y = -8x^2+6x+7$

y_{max}

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac38$

$\frac{a}{2}+b \le 8$

$y_0 = -\frac98 + \frac{18}{8} + 7 = 8\frac18$

$8x^2 + x(a-6) + b - 7 \le 0 \qquad ax+b \le -8x^2+6x+7$

$D = (a-6)^2 - 32(b-7) = a^2-12a-32b+260 \ge 0$

$x = \frac{6-a-\sqrt{a^2-12a-32b+260}}{16}$

$x = \sqrt{a^2-12a-32b+260} \ge 16+a$

оно выполнено в этом промежутке.

$x<\frac12 \quad 20x-6 \le ax+b \qquad x(20-a)-b-6 \le 0 \quad x \le \frac{b+6}{20-a}$

$x \ge \frac12 \quad 6-4x \le ax+b \qquad x(4+a)+b-6 \ge 0 \quad x \ge \frac{b-6}{a+4}$

выполнено при таких x.

надо чтобы любое $-\frac12 \le x < \frac12$ было $\le \frac{b+6}{20-a}$

$\frac{b+6}{20-a} \ge \frac12$

любое $1 \ge x \ge \frac12$ было $\ge \frac{b-6}{a+4}$

$5-b \ge 3b-$

$\frac{b-6}{a+4} \le \frac12$

$3 \ge b$

$$\begin{cases} 2b+12 \ge 20-a \\ 2b-12 \le a+4 \end{cases}$$

$~~a+4+2b+24 \ge 2b-12+20-a~~$

$14 \cdot 14 = 56, 14 = 196$

$b \ge 2$

$8-2b \le 5-b$

$$\begin{cases} a \ge 8-2b \\ ~~a \ge 2b-16~~ \end{cases}$$

$a \le 5-b$

$a \ge -4$

$b \le 6$

$6 - a - \sqrt{a^2-12a-32b+260}$

≤ -8

$a \ge 2b-4$

$196 - 16 - a \le -32b+260$

$14 - a - \sqrt{a^2-12a-32b+260} \le 0$

$32b \le 16a+64$

$(14-a)^2 \le a^2-12a-32b+260$

$2b \le a+4$

№5.

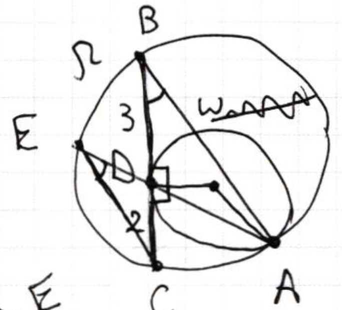
R и r = ?

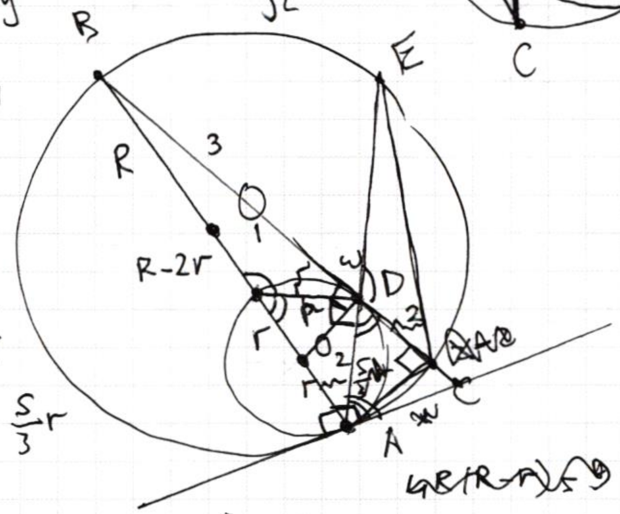
CD = 2

BD = 3

$S_{BNCE} = ?$ $\quad 8y^2 \quad 4y^2$

$12y^2$





16 − 4

$\frac{3}{5} = \frac{r}{x}$

$x = \frac{5}{3}r$

$5 \cdot 9 = \frac{25}{9} \cdot \frac{36}{25} \cdot 5 + 25$

$5 \cdot 9 - 9 \cdot 4 = 9$

$\frac{5 \cdot 3 \cdot 6}{5 \cdot 2}$

$r = \frac{4R^2 - 9}{4R}$

$3^2 = (2R - r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr = 9$

$\frac{3}{EC} = \frac{2R - 2r}{ED}$

$4R^2 = \frac{25}{9}r^2 + 25$

$4R^2 = \frac{25}{9} \cdot \frac{16R^4 - 72R^2 + 81}{16R^2} + 25$

$9 \cdot 4 \cdot 16 R^4 = 25(16R^4 - 72R^2 + 81) + 25 R^2 \cdot 16 \cdot 9$

$16R^4(36 - 25) - 25 \cdot 8 \cdot 9 R^2 - 25 \cdot 81 = 0$

$D = 100 + 4 \cdot 34 \cdot 26$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

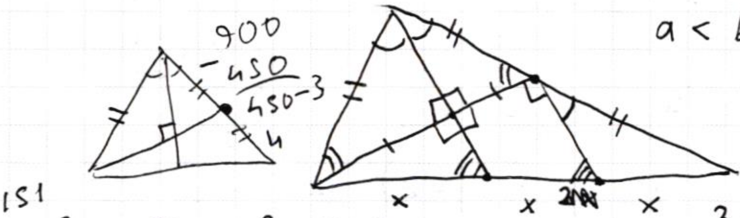
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$P = 900$ целые стороны

$225 \cdot 4 = 900$



$a < b \leq 3a$

$2a < a + b$

$4a < 3a + b < 6a$

900

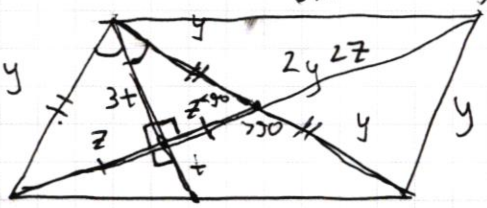
$4a < 900$

$a < 225$

$a > 150$

$a \in (150; 225)$

$a = 151$

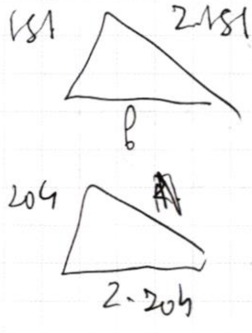


$\sqrt{y^2 - z^2} = 3\sqrt{x^2 - z^2}$

$x^2 = y^2 + 16t^2 - 8yt\cos\alpha$

$4x^2 = 4y^2 + 16t^2 - 16y \cdot t\cos\alpha$

$3x^2 = 3y^2 - 8yt\cos\alpha$



$\frac{y^2 - x^2 + 16t^2}{8yt} = \frac{4y^2 - 4x^2 + 16t^2}{16yt}$

$a_1 = t$, $2a_1 = 2t$, $b_1 = 900 - 3t$, $900 - 3t$

$3(300 - 224)$ 76, 210, 228

$y^2 - 2y^2 + 8t^2 = x^2 - 2x^2$

$x^2 + 8t^2 = y^2$ $\quad 24t^2 = 8yt\cos\alpha$

$3t = y\cos\alpha$

$3x^2 = 3y^2 - 24t^2$

$\cos\alpha = \frac{3t}{y}$

$a_2 = t$, $2a_2 = 2t$, $b_2 = 900 - 3t$

151 152, 224 150, от 1 до 74

$5a = 900$, $a = 180$, $b = 2a$, 672

302 151, 224 448, 228, $b \neq a$

$b \in [228; 447]$

$a \in [151; 224]$

$2a \in [302; 448]$

224 − 150 = 74

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3.

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$2\cdot 6$ $+38$

$x-6y \geq 0$

$xy-6y-x+6 \geq 0$

$y(x-6)-(x-6)$

$(y-1)(x-6) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 1 \\ x < 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$2y^2-4y+2$ $\quad x^2-12x+36$

$2(y^2-2y+1)+x^2-12x+36-18=0$

$2(y-1)^2+(x-6)^2-18=0$

$x^2-12yx+36y^2=\cancel{xy}-6y-x+6$

$x \geq 6y$

$2((y-1)^2-9)$ $\quad 2((y-4)(y+2))+(x-6)^2=0$

от 2 до 22

№7.

21

ф-ия f определена на множестве полож. рацион. чисел.

9 21

для любых a и b этого множ. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$21\cdot 21$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$ для любого простого p

79 441

$181+181$

$f(2)=1$ $\quad f(1\cdot 2)=f(1)+1$ $\quad f(1)=0$

362

1

$f(x)=f(x)$

78

Найти:

кол-во пар $(x;y)\in N$ таких, что $2 \leq x \leq 22$

$2 \leq y \leq 22$

~~2+12+30+12+1+2+~~

32

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\Updownarrow$ $f(x)<f(y)$

$4+\underbrace{16+36+16}+\underbrace{1+4+1}$

если $x=y$ то $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$

$f(x)=f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$ – по простым множ.

$0=f\left(a^1\cdot\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f(a)$ $\quad f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $\quad \cancel{f(2)=1}$ $\quad \cancel{f(3)=1}$

$\cancel{f(4)=f(2)+f(2)=2}$ $\quad \cancel{f(5)=2}$ $\quad \cancel{f(6)=f(2)+f(3)=2}$

$\cancel{f(7)=3}$ $\quad \cancel{f(8)=f(2)\cdot 3=3}$ $\quad \cancel{f(9)=f(3)+f(3)=2}$

$\cancel{f(10)=f(5)+f(2)=3}$ $\quad \cancel{f(11)=5}$ $\quad \cancel{f(12)=f(2)\cdot 2+f(3)=3}$

$\cancel{f(13)=6}$ $\quad \cancel{f(14)=f(2)+f(7)=4}$ $\quad \cancel{f(15)=3}$ $\quad \cancel{f(16)=4}$ $\quad f(17)=8$

$\cancel{f(18)=3}$ $\quad f(19)=9$ $\quad \cancel{f(20)=4}$ $\quad \cancel{f(21)=4}$ $\quad \cancel{f(22)=6}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)