

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
- [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
- [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

- [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1)  $b = qa$        $c = q^2 a$        $d = q^3 a$

$$ad^2 - 2bd + c = 0$$

$$a \cdot q^6 a^2 - 2qa \cdot q^3 a + q^2 a = 0$$

$$a^3 q^6 - 2q^4 a^2 + q^2 a = 0 \quad aq^2 = t$$

$$t^3 - 2t^2 + t = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c^2 - 2c + 1) = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Если прогрессия не нулевая,  
то  $c = 1$ .

3)  $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$$(x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$


---

~~$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$xy - 6y - x + 6 > 0$$

$$x - 6y > 0$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 + 6y + x - 6 - 13xy = 0$$

$$(6y + 0,5)^2 - 0,25 + (x + 0,5)^2 - 0,25 - 6 - 13xy = 0$$

$$(6y + 0,5)^2 + (x + 0,5)^2 - 6,5 = 13xy$$

$$\rightarrow (x-6)^2 = 2(9 - (y-1)^2) = 2(4-y)(2+y) \quad x-6 = \pm \sqrt{(4-y)(4+y)}$$~~

$$x = 6 \pm \sqrt{(4-y)(4+2y)}$$

$$(x+0,5)^2 + (6y+0,5)^2 = 6,5(1+2xy)$$

$$x-6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$18 - (y-1)^2 = (x-6) + (y-1)^2 - 2(x-6)(y-1)$$

$$18 - (y-1)^2 = (x+y) - 7)^2 - 2(x-6y)^2$$

~~$$x^2 + 2y^2 - 18 = 0$$~~

$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$

$$a+6 - 6(b+1) = \sqrt{ab}$$

$$y = 1 \pm 4\sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$

~~$$a^2 + b^2 - 2ab = ab$$~~

~~$$a^2 + b^2 - 3ab = 0$$~~

~~$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$~~

$$x = 6 \pm \sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$11a^2 = 6$$

$$33a^2 = 18$$

$$a^2 + 2 \cdot (4a)^2 - 18 = 0$$

~~$$y = 4x - 23$$~~

~~$$y - 1 = 4x - 24$$~~

$$b = 4a \Rightarrow y - 1 = 4(x - 6)$$

$b \neq 0$

~~$$a = \frac{18 - b^2}{3b} = \left( \frac{6}{b} - \frac{b}{3} \right)$$~~

~~$$2b^2 - 18 + \frac{3b}{b^2} + \frac{b^2}{9} - 4 = 0$$~~

~~$$b^2 \cdot \frac{19}{9} + \frac{36}{b^2} - 22 = 0$$~~

~~$$\frac{19}{9} b^4$$~~

$$1 - \frac{6b}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

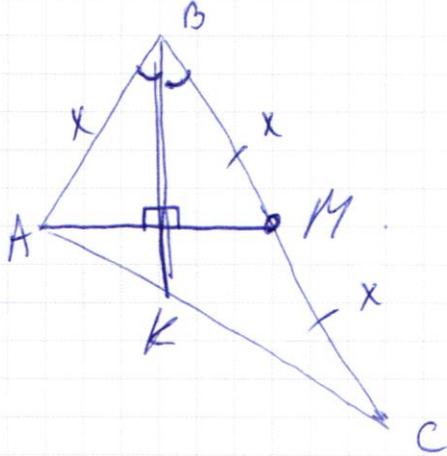
$$t = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$a = 1 + 4 \cdot 6 = 25$$

$$1 - 6t^2 = t \quad 6t^2 + t - 1 = 0$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



$$3x > 450$$

$$AB + BC < 900$$

$$x \in [151; 299] \rightarrow 149 \text{ треугольников}$$

$AM \perp BK \Rightarrow \triangle ABM$  равнобедренный

$$AB = BM$$

$$2AB = BC$$

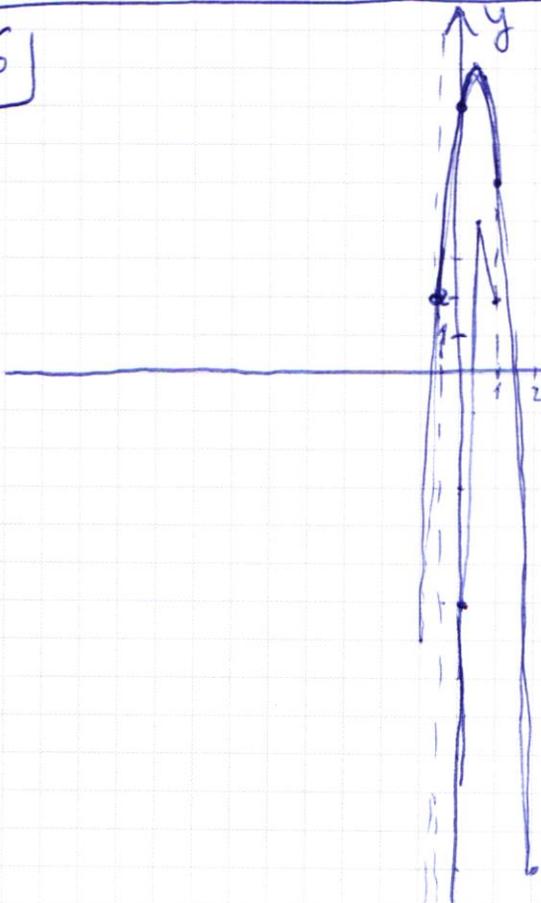
$$x + 2x > 450$$

$$\left( \begin{array}{l} AB + BC > AC \\ 2(AB + BC) > 900 \end{array} \right)$$

$$x \geq 150$$

$$3x < 900 \quad x < 300$$

6)



$$x = -\frac{1}{2} \quad -8x^2 + 6x + 7 =$$

$$-8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$$

$$-8 \left( x^2 - \frac{3}{4}x \right) + 7 =$$

$$= -8 \left( x^2 - \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{8}\right)^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \right) + 7 =$$

$$= -8 \left( x - \frac{3}{8} \right)^2 + 7 + \frac{9}{8} =$$

$$= -8 \left( x - \frac{3}{8} \right)^2 + 8 \frac{1}{8}$$

$$8x - 6 / |2x - 1| =$$

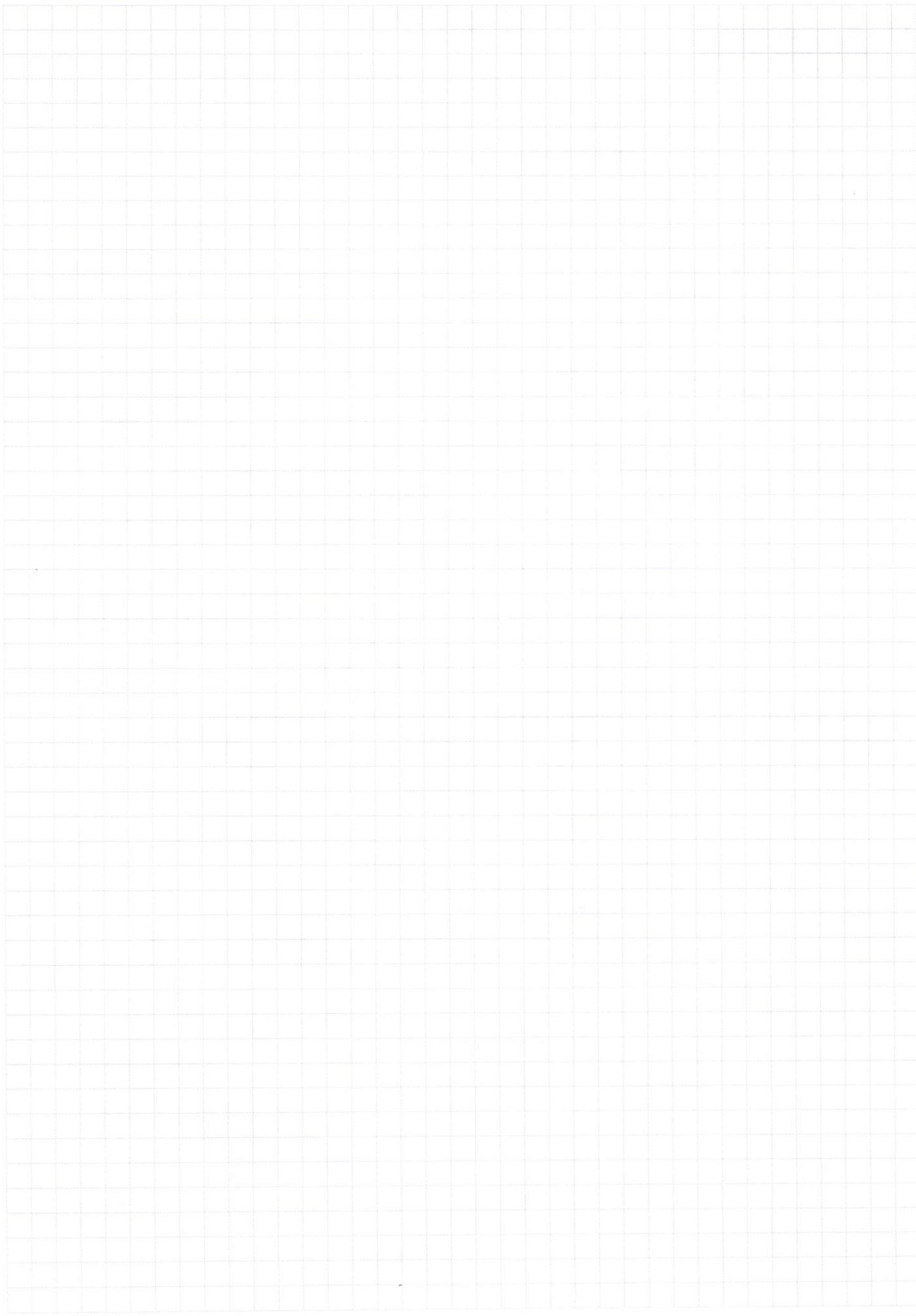
$$8x - 6(2x - 1) = \text{(когда } x > \frac{1}{2})$$

$$= 8x - 12x + 6 = 6 - 4x$$

$$8x - 6 / |2x - 1| =$$

$$= 8x + 6(2x - 1) = \text{(когда } x < \frac{1}{2})$$

$$= 20x - 6$$

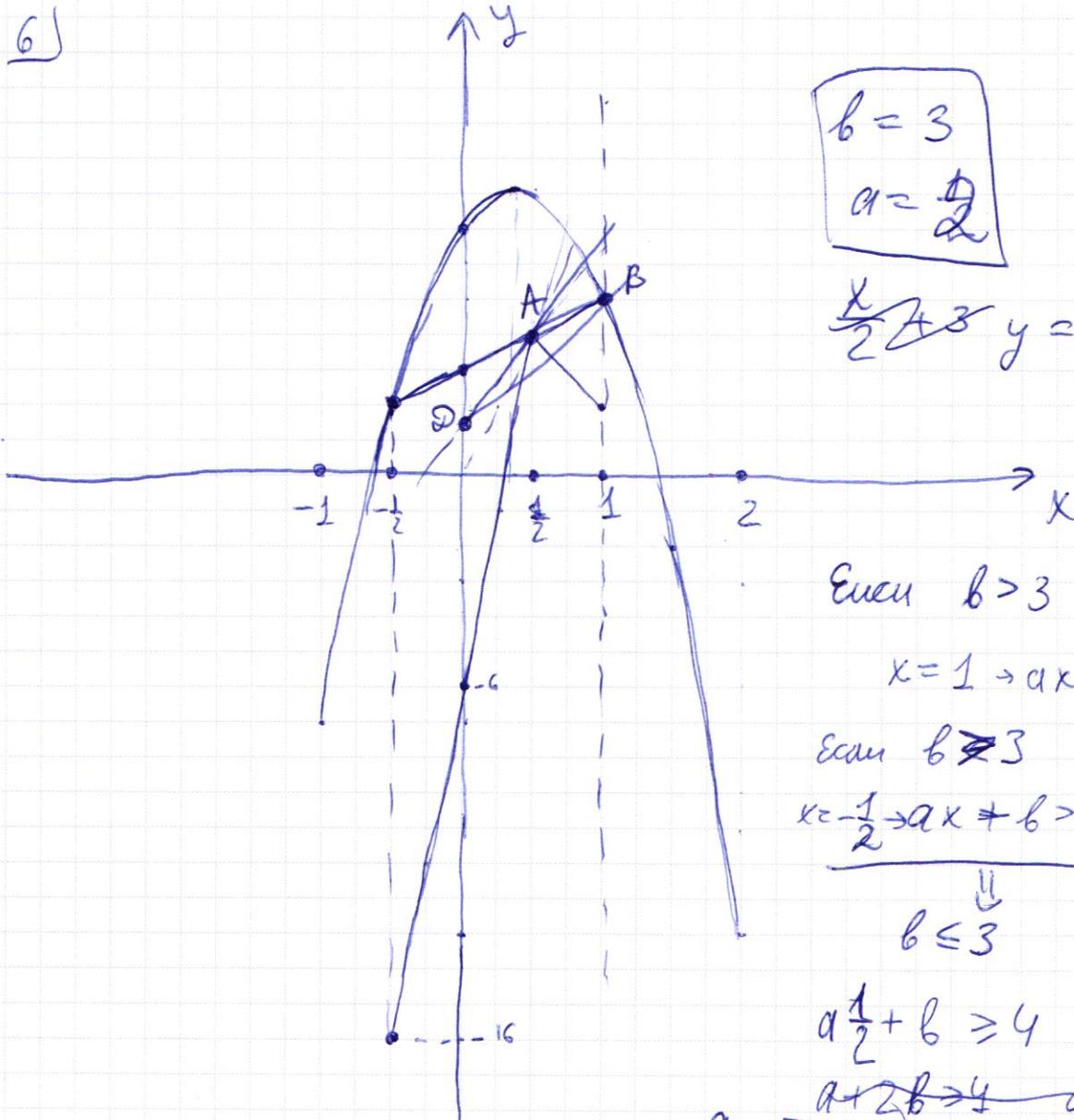


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



$$\boxed{b = 3}$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$y = 2x + 3$$

Если  $b > 3$   $a > 2$

$$x = 1 \rightarrow ax + b > -8x^2 + 6x + 7$$

Если  $b \leq 3$   $a < 2$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow ax + b > -8x^2 + 6x + 7$$

$$\Downarrow$$

$$b \leq 3$$

$$a \cdot \frac{1}{2} + b \geq 4$$

$$a + 2b \geq 4 \rightarrow a \geq 4 - 2b$$

Так как, так как  $AB \rightarrow$  единственная прямая, то когда  $b < 3$

$$ax + b \rightarrow \text{tg } \angle A \rightarrow a > \text{tg } \angle A$$

$$ax + b \geq -8x^2 + 6x + 7$$

$$x = 1$$

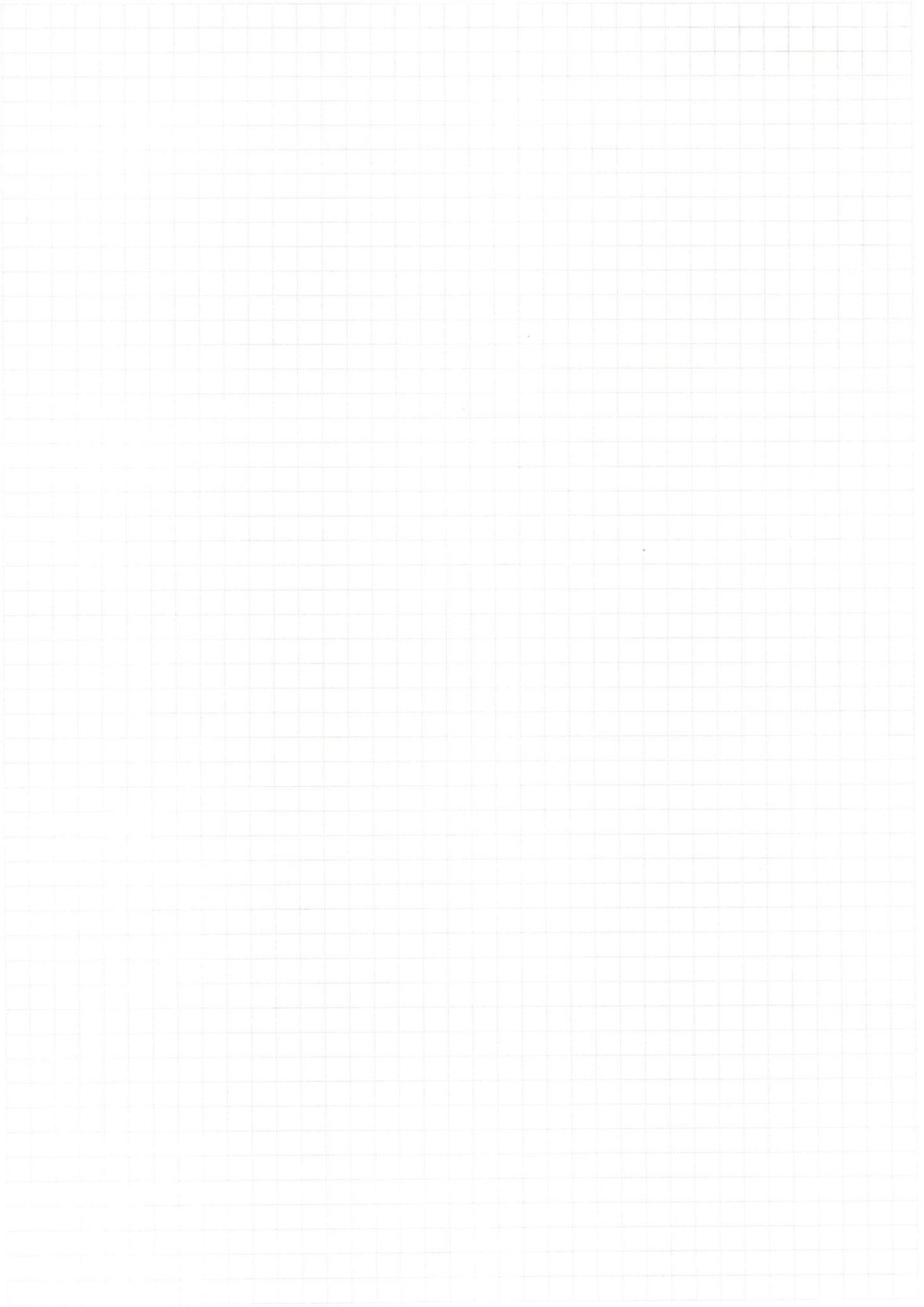
$$a \geq \text{tg } \angle A$$

$$x = \frac{1}{2} \quad ax + b < -8x^2 + 6x + 7$$

$$b = 3$$

$$\Downarrow$$

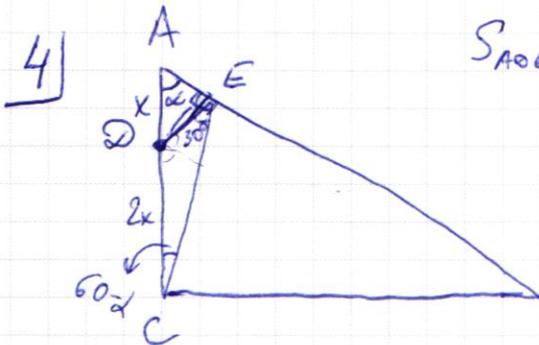
$$a = 2$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{AOE} = \frac{1}{2} \sin(90-\alpha) x \cdot \Delta E$$

$$S_{BOEC} = \frac{1}{2} \sin(90+\alpha) 2x \cdot \Delta E$$

$$\frac{S_{BOEC}}{S_{AOE}} = 2 = \frac{2 \cdot \sin(90+\alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1}{2} \sin 30 \cdot \Delta E \cdot EC = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot EA$$

$$\frac{1}{2} EC = 2 EA \quad 4EA = EC$$

$$\frac{1}{2} \sin(60-\alpha) \cdot 2x \cdot CE = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AE$$

$$2 \sin(60-\alpha) \cdot CE = \sin \alpha \cdot AE$$

$$8 \sin(60-\alpha) = \sin \alpha$$

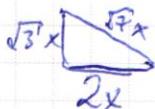
$$8 (\sin 60 \cos \alpha - \cos 60 \sin \alpha) = \sin \alpha$$

$$8 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$4\sqrt{3} \cos \alpha - 4 \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$5 \sin \alpha = 4\sqrt{3} \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5} \quad AE = y$$



$$y^2 + 16y^2 - 2 \cdot 4y^2 \cos 120 = AC^2 = 7$$

$$17y^2 + 8y^2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \quad 21y^2 = 7 \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{AEO} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin 120 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



$$7] \quad f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(a^2) = 2f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(q) = d_1 \cdot f(a_1) + d_2 \cdot f(a_2) + \dots + d_n \cdot f(a_n)$$

$$q \in \mathbb{N}, \quad q = a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2} \cdot \dots \cdot a_n^{d_n}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \rightarrow \text{prime}$$

$$x=2 \quad y \rightarrow 4, 5, \dots, 22 \rightarrow 21 - 2 = 19$$

$$x=3 \quad y \rightarrow 4, 5, \dots, 22 \rightarrow 19$$

$$x=4 \quad y \rightarrow 15 \quad x=16 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=5 \quad y \rightarrow 15 \quad x=17 \quad y \rightarrow 1$$

$$x=6 \quad y \rightarrow 15 \quad x=18 \quad y \rightarrow 9$$

$$x=7 \quad y \rightarrow 9 \quad x=19 \quad y \rightarrow 0$$

$$x=8 \quad y \rightarrow 9 \quad x=20 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=9 \quad y \rightarrow 15 \quad x=21 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=10 \quad y \rightarrow 9 \quad x=22 \quad y \rightarrow 2$$

$$x=11 \quad y \rightarrow 4$$

$$x=12 \quad y \rightarrow 9$$

$$x=13 \quad y \rightarrow 2$$

$$x=14 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=15 \quad y \rightarrow 9$$

$$2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 +$$

$$+ 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 =$$

$$= 38 + 60 + 54 + 8 + 20 + 1 =$$

$$= 181$$

$$a, b > 0$$

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{k}{l}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 2 \cdot f(2) = 2$$

$$f(5) = 2$$

$$f(6) = 2$$

$$f(7) = 3$$

$$f(8) = 3$$

$$f(9) = 2$$

$$f(10) = 3$$

$$f(11) = 5$$

$$f(12) = f(4) + f(3) = 3$$

$$f(13) = 6$$

$$f(14) = f(2) + f(7) = 4$$

$$f(15) = 3$$

$$f(16) = 4$$

$$f(17) = 8$$

$$f(18) = 3$$

$$f(19) = 9$$

$$f(20) = f(4) + f(5) = 4$$

$$f(21) = 4$$

$$f(22) = 6$$