

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

- [2 балла] Числа a , b , c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a , b , c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
- [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
- [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

- [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
- [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.
- [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

- [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22$, $2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $b = qa$ $c = q^2 a$ $d = q^3 a$

$$ad^2 - 2bd + c = 0$$

$$a \cdot q^6 a^2 - 2qa \cdot q^3 a + q^2 a = 0$$

$$a^3 q^6 - 2q^4 a^2 + q^2 a = 0 \quad aq^2 = t$$

$$t^3 - 2t^2 + t = 0$$

$$c^3 - 2c^2 + c = 0$$

$$c(c^2 - 2c + 1) = 0$$

$$c(c-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Если прогрессия не нулевая,
то $c = 1$.

3) $x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$$(x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

~~$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$xy - 6y - x + 6 > 0$$

$$x - 6y > 0$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 + 6y + x - 6 - 13xy = 0$$

$$(6y + 0,5)^2 - 0,25 + (x + 0,5)^2 - 0,25 - 6 - 13xy = 0$$

$$(6y + 0,5)^2 + (x + 0,5)^2 - 6,5 = 13xy$$

$$\rightarrow (x-6)^2 = 2(9 - (y-1)^2) = 2(4-y)(2+y) \quad x-6 = \pm \sqrt{(4-y)(4+2y)}$$~~

$$x = 6 \pm \sqrt{(4-y)(4+2y)}$$

$$(x+0,5)^2 + (6y+0,5)^2 = 6,5(1+2xy)$$

$$x-6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0$$

$$18 - (y-1)^2 = (x-6) + (y-1)^2 - 2(x-6)(y-1)$$

$$18 - (y-1)^2 = (x+y-7)^2 - 2(x-6y)^2$$

~~$$x^2 + 2y^2 - 18 = 0$$~~

$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$

$$a+6 - 6(b+1) = \sqrt{ab}$$

$$y = 1 \pm 4\sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$

~~$$a^2 + b^2 - 2ab = ab$$~~

~~$$a^2 + b^2 - 3ab = 0$$~~

~~$$a^2 + 2b^2 - 18 = 0$$~~

$$x = 6 \pm \sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{6}{11}}$$

$$11a^2 = 6$$

$$33a^2 = 18$$

$$a^2 + 2 \cdot (4a)^2 - 18 = 0$$

~~$$y = 4x - 23$$~~

~~$$y - 1 = 4x - 24$$~~

$$b = 4a \Rightarrow (y-1) = 4(x-6)$$

$b \neq 0$

~~$$a = \frac{18 - b^2}{3b} = \left(\frac{6}{b} - \frac{b}{3} \right)$$~~

~~$$2b^2 - 18 + \frac{3b}{b^2} + \frac{b^2}{9} - 4 = 0$$~~

~~$$b^2 \cdot \frac{19}{9} + \frac{36}{b^2} - 22 = 0$$~~

~~$$\frac{19}{9} b^4$$~~

$$1 - \frac{6b}{a} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

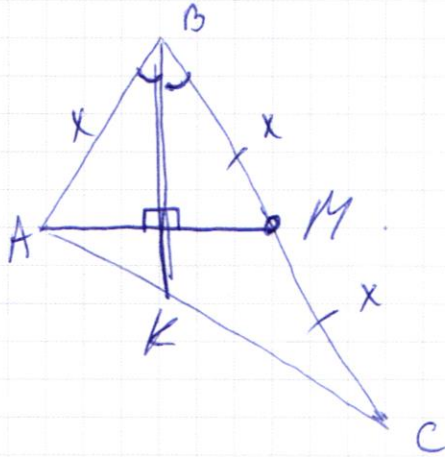
$$t = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$$a = 1 + 4 \cdot 6 = 25$$

$$1 - 6t^2 = t \quad 6t^2 + t - 1 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)



$AM \perp BK \Rightarrow \triangle ABM$ равнобедренный

$$AB = BM$$

$$2AB = BC$$

$$x + 2x > 450$$

$$\left(\begin{array}{l} AB + BC > AC \\ 2(AB + BC) > 900 \end{array} \right)$$

$$x > 150$$

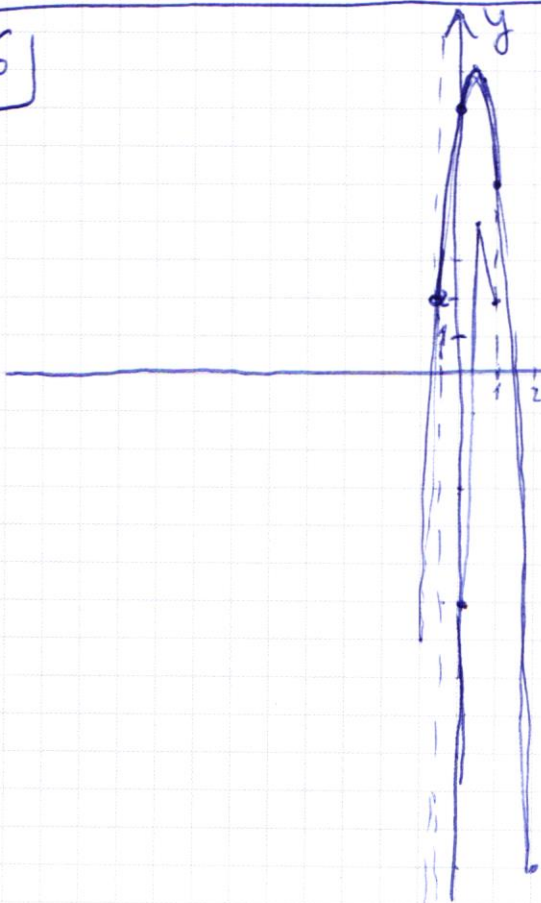
$$3x > 450$$

$$AB + BC < 900$$

$$3x < 900 \quad x < 300$$

$$x \in [151; 299] \rightarrow 149 \text{ треугольников}$$

6)



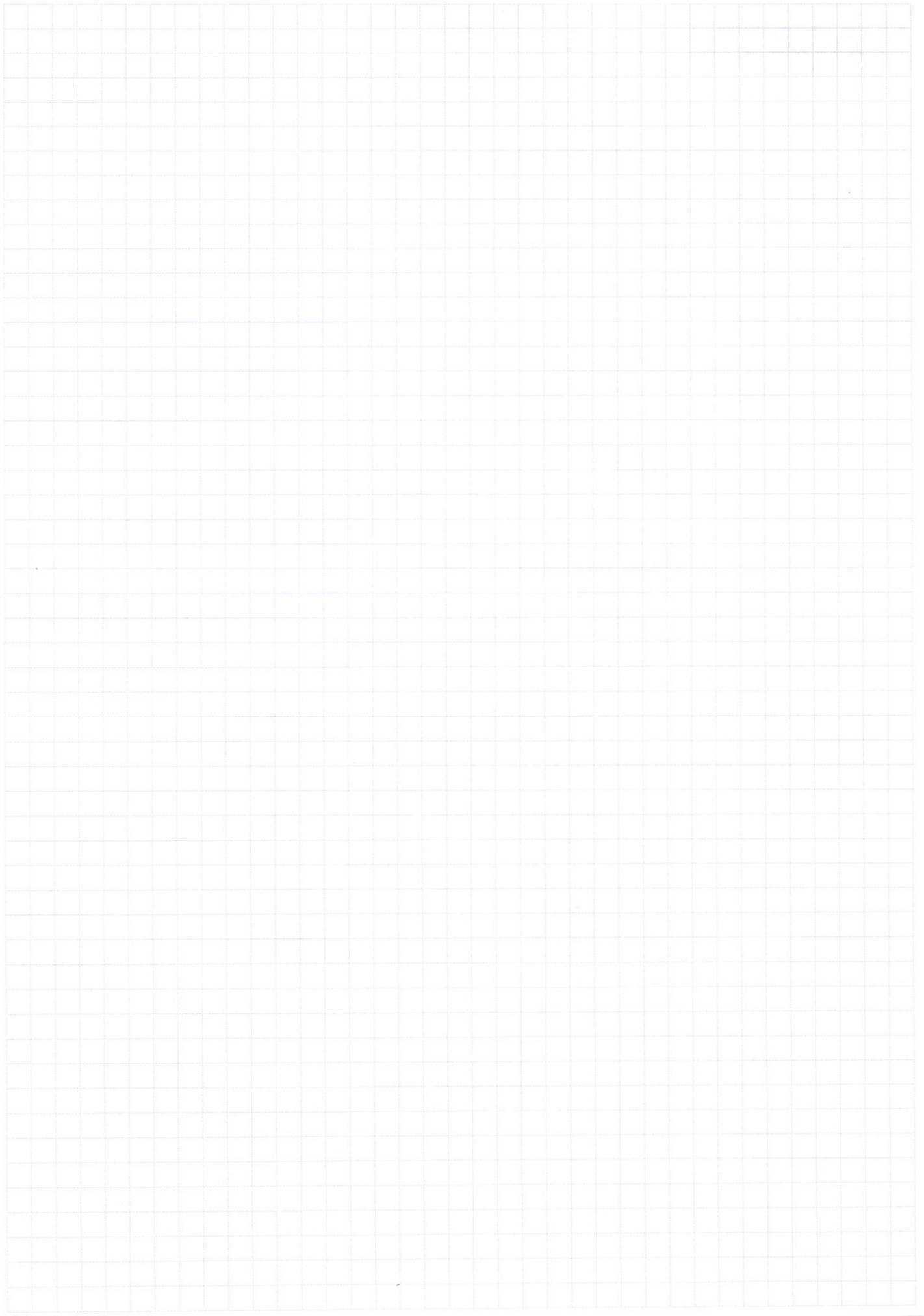
$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2} \quad & -8x^2 + 6x + 7 = \\ -8 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 & = -8(x^2 - \frac{3}{4}x) + 7 = \\ = -2 - 3 + 7 & = -8(x^2 - \frac{3}{4}x + (\frac{3}{8})^2 - (\frac{3}{8})^2) + 7 = \\ = 2 & = -8(x - \frac{3}{8})^2 + 7 + \frac{9}{8} = \\ -\frac{9}{4}x + 6 \cdot \frac{3}{2} + 7 & = -8(x - \frac{3}{8})^2 + 8 + \frac{1}{8} \\ = -18 + 7 + 9 & \end{aligned}$$

$$8x - 6/|2x - 1| =$$

$$\begin{aligned} 8x - 6(2x - 1) &= \text{(когда } x > \frac{1}{2}) \\ = 8x - 12x + 6 &= 6 - 4x \end{aligned}$$

$$8x - 6/|2x - 1| =$$

$$\begin{aligned} = 8x + 6(2x - 1) &= \text{(когда } x < \frac{1}{2}) \\ = 20x - 6 \end{aligned}$$

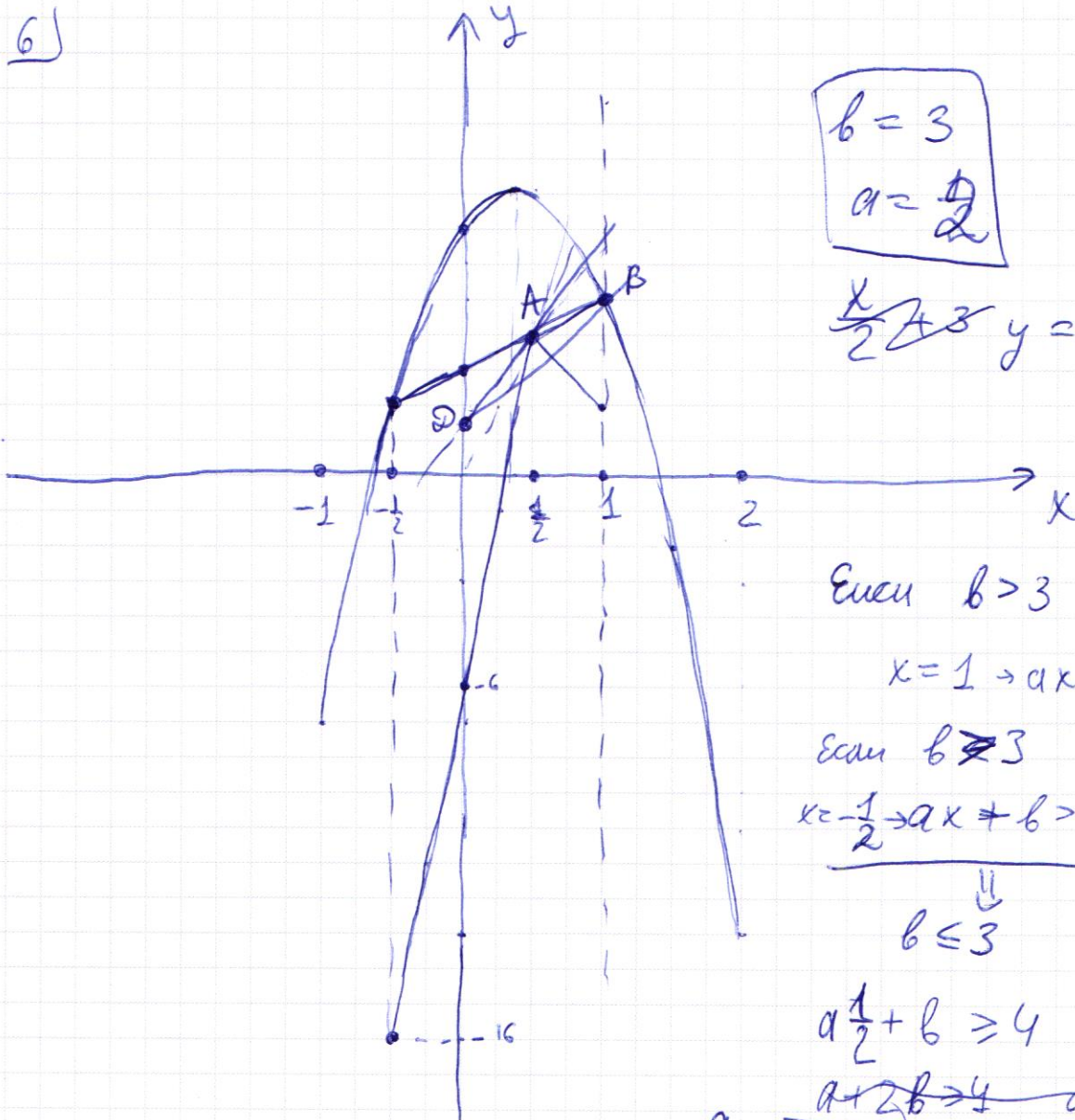


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



$$\boxed{b = 3}$$

$$\boxed{a = 2}$$

$$\frac{x}{2} \neq 3 \quad y = 2x + 3$$

Если $b > 3$ $a > 2$

$$x = 1 \rightarrow ax + b > -8x^2 + 6x + 7$$

Если $b \geq 3$ $a < 2$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow ax + b > -8x^2 + 6x + 7$$

$$\Downarrow$$

$$b \leq 3$$

$$a \frac{1}{2} + b \geq 4$$

$$a + 2b \geq 4 \quad a \geq 4 - 2b$$

Так как, так как $AB \rightarrow$ единственный $\frac{a}{2} \geq y - b$
прямой, то когда $b < 3$

$$ax + b \rightarrow \text{tg} \angle A \rightarrow a > \text{tg} \angle A$$

$$ax + b \geq -8x^2 + 6x + 7$$

$$x = 1$$

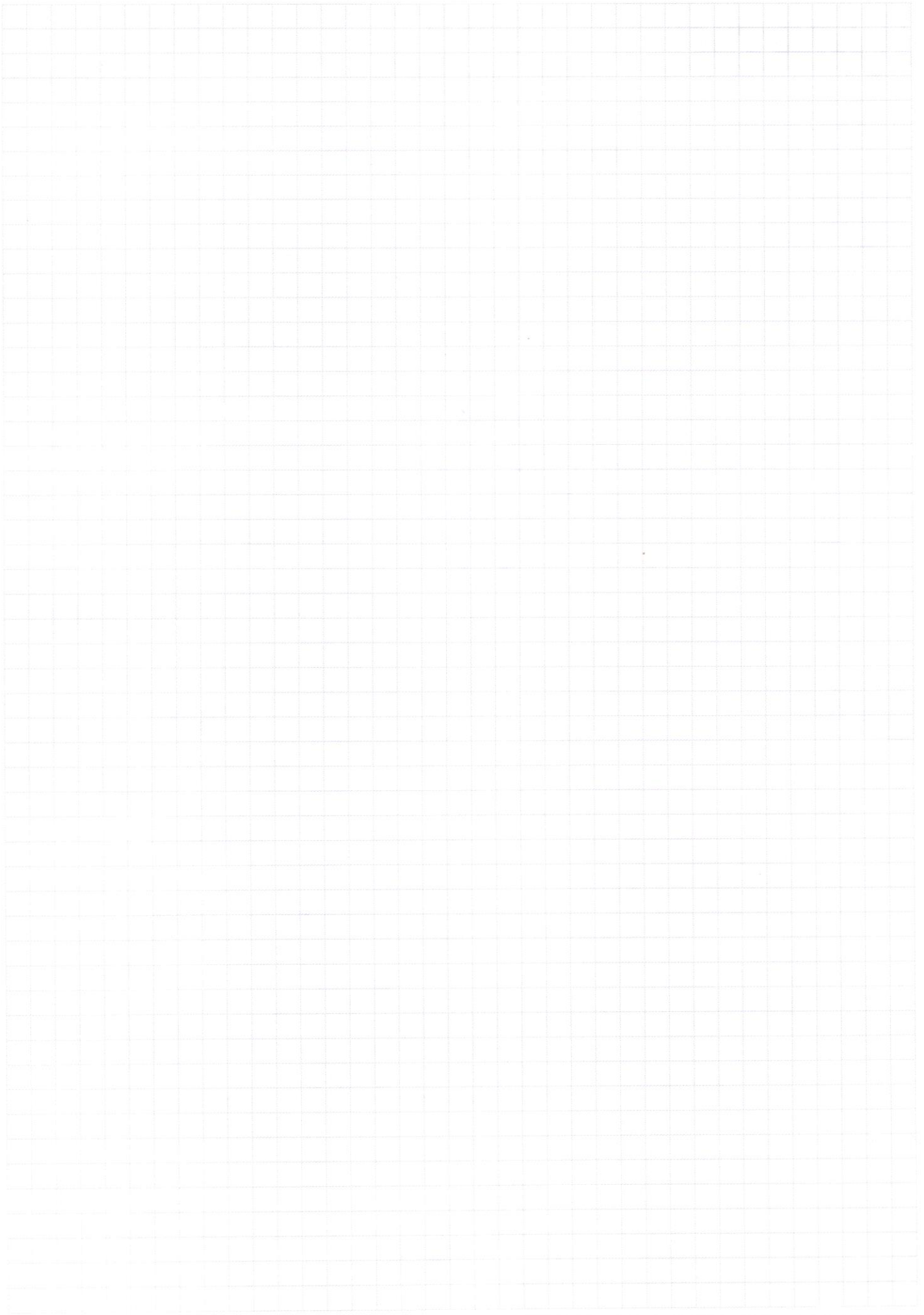
$$a \geq \text{tg} \angle A$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$ax + b < -8x^2 + 6x + 7$$

$$b = 3 \quad \Downarrow$$

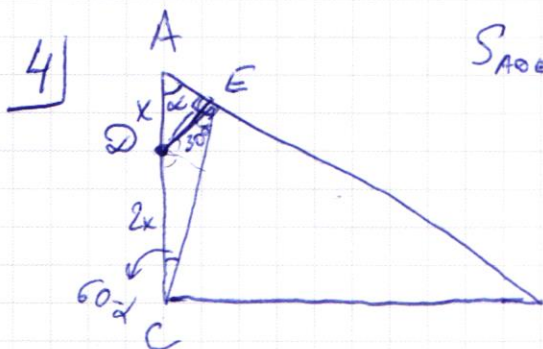
$$a = 2$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_{A0E} = \frac{1}{2} \sin(90-\alpha) x \cdot 2E$$

$$S_{0EC} = \frac{1}{2} \sin(90+\alpha) 2x \cdot 2E$$

$$\frac{S_{0EC}}{S_{A0E}} = 2 = \frac{2 \cdot \sin(90+\alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\frac{1}{2} \sin 30 \cdot 2E \cdot EC = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot EA$$

$$\frac{1}{2} EC = 2 EA \quad 4EA = EC$$

$$\frac{1}{2} \sin(60-\alpha) \cdot 2x \cdot CE = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AE$$

$$2 \sin(60-\alpha) \cdot CE = \sin \alpha \cdot AE$$

$$8 \sin(60-\alpha) = \sin \alpha$$

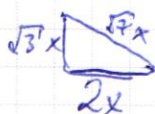
$$8 (\sin 60 \cos \alpha - \cos 60 \sin \alpha) = \sin \alpha$$

$$8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin \alpha \right) = \sin \alpha$$

$$4\sqrt{3} \cos \alpha - 4 \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$5 \sin \alpha = 4\sqrt{3} \cos \alpha$$

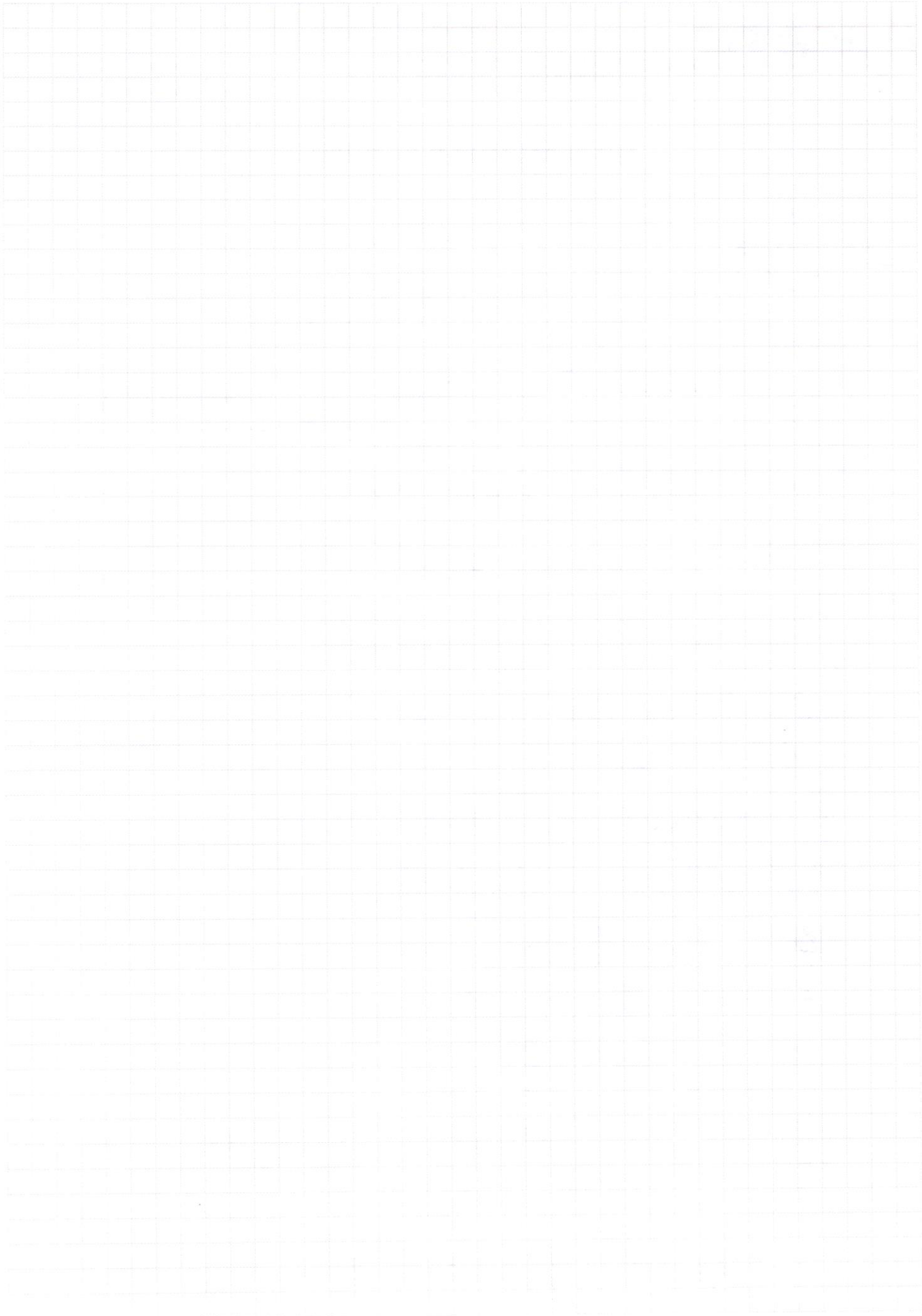
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5} \quad AE = y$$



$$y^2 + 16y^2 - 2 \cdot 4y^2 \cos 120 = AC^2 = 7$$

$$17y^2 + 8y^2 \cdot \frac{1}{2} = 7 \quad 21y^2 = 7 \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_{AEC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \sin 120 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$7] \quad f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(a^2) = 2f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(q) = d_1 \cdot f(a_1) + d_2 \cdot f(a_2) + \dots + d_n \cdot f(a_n)$$

$$q \in \mathbb{N}, \quad q = a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2} \cdot \dots \cdot a_n^{d_n}$$

$$a_1, a_2, \dots, a_n \rightarrow \text{prime}$$

$$x=2 \quad y \rightarrow 4, 5, \dots, 22 \rightarrow 21 - 2 = 19$$

$$x=3 \quad y \rightarrow 4, 5, \dots, 22 \rightarrow 19$$

$$x=4 \quad y \rightarrow 15 \quad x=16 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=5 \quad y \rightarrow 15 \quad x=17 \quad y \rightarrow 1$$

$$x=6 \quad y \rightarrow 15 \quad x=18 \quad y \rightarrow 9$$

$$x=7 \quad y \rightarrow 9 \quad x=19 \quad y \rightarrow 0$$

$$x=8 \quad y \rightarrow 9 \quad x=20 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=9 \quad y \rightarrow 15 \quad x=21 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=10 \quad y \rightarrow 9 \quad x=22 \quad y \rightarrow 2$$

$$x=11 \quad y \rightarrow 4$$

$$x=12 \quad y \rightarrow 9$$

$$x=13 \quad y \rightarrow 2$$

$$x=14 \quad y \rightarrow 5$$

$$x=15 \quad y \rightarrow 9$$

$$2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 +$$

$$+ 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 1 =$$

$$= 38 + 60 + 54 + 8 + 20 + 1 =$$

$$= 181$$

$$a, b > 0$$

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{k}{l}$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 2 \cdot f(2) = 2$$

$$f(5) = 2$$

$$f(6) = 2$$

$$f(7) = 3$$

$$f(8) = 3$$

$$f(9) = 2$$

$$f(10) = 3$$

$$f(11) = 5$$

$$f(12) = f(4) + f(3) = 3$$

$$f(13) = 6$$

$$f(14) = f(2) + f(7) = 4$$

$$f(15) = 3$$

$$f(16) = 4$$

$$f(17) = 8$$

$$f(18) = 3$$

$$f(19) = 9$$

$$f(20) = f(4) + f(5) = 4$$

$$f(21) = 4$$

$$f(22) = 6$$