



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 + 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 3 : 5$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 45^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{29}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 1, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c, d$  - первые три члена ариф. прогрессии

Плюс  $d$  - 4 член прогрессии  
Пусть  $q$  - знаменатель прогрессии, тогда

$$a = a \cdot q^0 = a$$

$$b = a \cdot q^1 = aq$$

$$c = a \cdot q^2 = aq^2$$

$$d = a \cdot q^3 = aq^3$$

рассмотрим уравнение  $ax^2 + 2bx + c = 0$

или подставим выражения для  $b$  и  $c$ , получим

$$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$$

$$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$$

$$a(x + q)^2 = 0$$

~~Если  $a = 0$ , то прогрессия будет состоять из нулей и членов  
каждый будет равен 0, тогда  $(x + q)^2 = 0$~~

$$x = -q, \text{ Но не выполнено } x = d = aq^3$$

Получаем  $aq^3 = -q$

$$aq^3 + q = 0$$

$$q(aq^2 + 1) = 0$$

П.к. ненулев. прогрессия существует  $\Rightarrow q \neq 0$

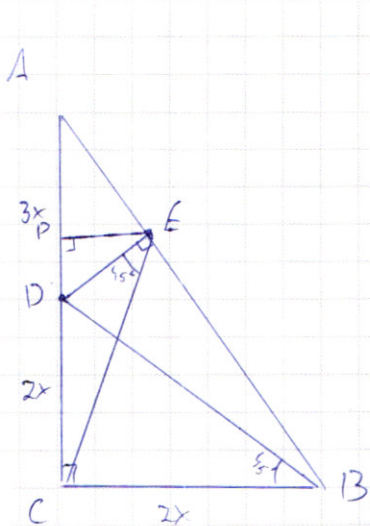
$$\Rightarrow aq^2 + 1 = 0$$

$$aq^2 = -1$$

Но  $aq^2 = c$  - третий член прогрессии

$$\Rightarrow c = aq^2 = -1$$

Ответ: -1



№ 4

a) Если  $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$ , то  $\frac{AC}{AD} = \frac{5}{3}$

$AC = AD + DC$   
 $\frac{AD+DC}{AD} = 1 + \frac{DC}{AD} = \frac{5}{3}$

$\frac{DC}{AD} = \frac{2}{3}$ , тогда пусть  $DC = 2x \Rightarrow AD = 3x$

Заметим, что в  $\triangle DEB$   $\angle DEB + \angle BCD =$

$= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$  углы  $\triangle DEB$  - смежные в вершине  $E \Rightarrow$

$\angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$  (углы, опр. на одну сторону). Тогда в  $\triangle DCB$ , т.к.

он прямоугольный, то  $\angle CDB + \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow \angle CDB = 45^\circ \Rightarrow \triangle DCB$  - равноб.  
 $\Rightarrow DC = BC = 2x$

тогда  $\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{3x+2x} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

b) Пусть  $P$  - площадь  $E$  на стороне  $AC$ ,  $S$  - площадь  $\triangle ABC$ ;  
 $S = \frac{5x \cdot 2x}{2} = 5x^2$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$  (прямоуг. с общей гипотенузой)  $\Rightarrow k$  - коэффициент подобия

$k = \frac{AB}{AD}$

по т. Пифагора  $AB = \sqrt{5x^2 + 2x^2} = \sqrt{29}x \Rightarrow k = \frac{\sqrt{29}x}{3x} = \frac{\sqrt{29}}{3}$

Площади подобных фигур относятся как  $k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{S}{S_{ADE}}$

$\left(\frac{\sqrt{29}}{3}\right)^2 = \frac{S}{S_{ADE}} \Rightarrow S_{ADE} = \frac{9S}{29}$

Заметим, что  $\triangle ADE$  и  $\triangle CDE$  имеют общую высоту  $ED = h$

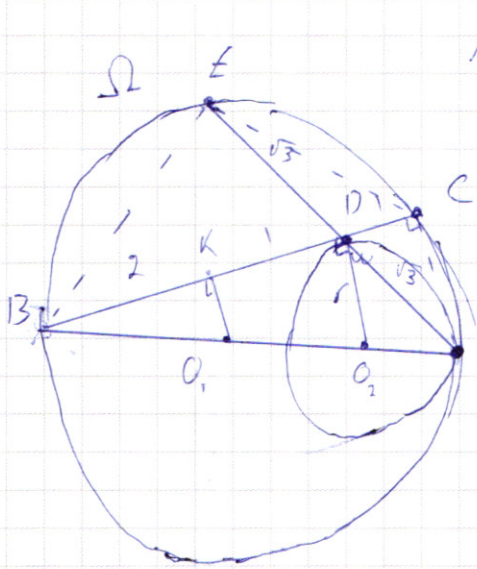
$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}} = \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{CDE} = \frac{2S_{ADE}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{9S}{29}}{3} = \frac{6S}{29}$

$\Rightarrow S_{CDE} = \frac{30}{29}x^2 \rightarrow S_{CDE} = \frac{30}{29} \cdot \frac{29}{5} = \frac{6}{5}$

$AC = \sqrt{29}$ ;  $5x = \sqrt{29}$   
 $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$ ;  $x^2 = \frac{29}{25}$

Ответ:  $\angle BAC = \frac{2}{5}$   
 $S_{CDE} = \frac{6}{5}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

Пусть  $\Omega$ ,  $O_1$  и  $O_2$ , центры  $\Omega$  и  
их соответственно.  $A$  - центр касательной,  
переводящей  $\omega$  в  $\Omega$ , в касательной  
 $O_2 \in O_1 \Rightarrow O_1, O_2$  и  $A$  - лежат  
на одной прямой;  $O_2 D \perp BC$  - радиус  
 $\perp$  касат. Пусть  $r$  и  $R$  - радиусы  
 $\omega$  и  $\Omega$  соответственно  $\Rightarrow$

$O_1 O_2 = R - r$ . Пусть  $K$  пересекает  $O_1$   
на  $BC$ , тогда  $K$  - середина  $BC$  ( $\Delta O_1 BC$  - равноб.), тогда  $BK = \frac{1}{2} BC$   
 $BC = BD + DC = 3 + 1 = 4 \Rightarrow BK = 2, DK = CK - CD = 2 - 1 = 1$ ; тогда

$\Delta BK O_1 \sim \Delta D O_2$  - прямоугол. с общими углами  $\Rightarrow$   
 $\frac{BK}{BD} = \frac{BO_1}{DO_2}; \frac{2}{3} = \frac{R}{2R-r}; 4R - 2r = 3R$   
 $R = 2r$

$BC_1 = R$

$BC_2 = BC_1 + O_1 O_2 = R + R - r = 2R - r$

Замечание. Т. Пифагора для  $\Delta BDC_2$ ;  $BC_2^2 = BD^2 + DC_2^2$

$(2R - r)^2 = 9 + r^2$

Подставим вместо  $2R$   $4r$   
 $(4r - r)^2 = 9 + r^2$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
$R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$(3r)^2 = 9 + r^2$

$9r^2 = 9 + r^2$

$8r^2 = 9$

$\triangle BCA$  - прямоугол. ~~с катетами~~  $AB$  - гипотенуза.  $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ$   
 тогда  $\cos \angle CBA = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$   
 $AB = 2BC = 3\sqrt{2}$

Найдем  $AD$  по т. косинусов для  $\triangle BDA$

$$AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \angle CBA$$

$$AD^2 = 9 + 18 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 9 + 18 - 24 = 3$$

$$AD = \sqrt{3}$$

по т. синусов для  $\triangle BDA = \frac{AD}{\sin \angle CBA} = \frac{AB}{\sin \angle BDA}$

$$\sin \angle CBA = \sqrt{1 - \cos^2 \angle CBA} = \sqrt{1 - \frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin \angle BDA}$$

$$\sin \angle BDA = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

по т. о 2 перес. хордах:  $ED \cdot AD = BD \cdot DC$

$$ED \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot 1$$

$$ED = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AE = 2\sqrt{3}$$

$$BC = 4$$

$$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin \angle BDA = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Ответ:  $\text{mag. } U = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

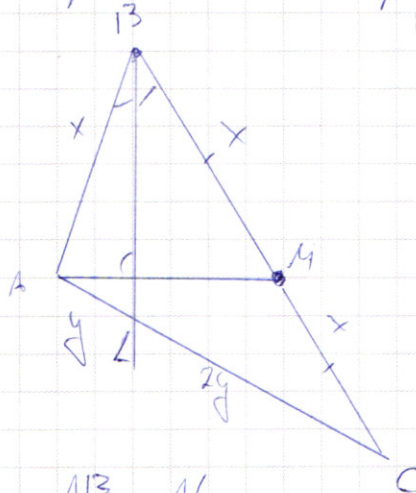
$\text{mag. } \Omega = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Рассмотрим такой треугольник  $ABC$ ;  $BL$  - биссектриса.



$AM$  - медиана

$AM \perp BL$ ; Пусть  $AB = x$ ; заметим,

что в  $\triangle ABM$  биссектриса  $BL \perp AM \Rightarrow$

$\triangle ABM$  - равнобедрен.  $\Rightarrow AB = BM = x$ , но

$BC = 2BM$  ( $AM$  - медиана)  $\Rightarrow BC = 2x$

Пусть  $AL = y$ . Заметим свойства биссектрисы.

$$BL: \frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$$

$$\frac{x}{2x} = \frac{y}{LC}, \text{ откуда } LC = 2y \Rightarrow AC = 3y. P_{ABC} = AB + BC + AC =$$

$$= x + 2x + 3y = 3(x + y) = 1200$$

$x + y = 400$ . Также углы кр-во треугольника:

$$\left. \begin{array}{l} AB + BC > AC \\ BC + AC > AB \\ AB + AC > BC \end{array} \right\} \begin{array}{l} x + 2x > 3y \\ 2x + 3y > x \\ x + 3y > 2x \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x > y \\ x < 3y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

т.к.  $x < \frac{3}{2}y$  сильнее чем  $x < 3y$ , то ~~то~~ последнее условие получается. Получим систему

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ x > y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Нам нужно найти сколько целых  $x$  удовлетв. системе. Действительно, если мы зафиксируем длину стороны при биссектрисе, то однозначно заданы треугольник. т.к. все остальные стороны выстраиваются через  $x$



$$\begin{cases} x+y=400 \\ x > y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 400 - x \\ x > 400 - x & (1) \\ x < \frac{3}{2}(400 - x) & (2) \end{cases}$$

$$1) y > 400 - x$$

$$x > 200$$

$$x > 201$$

$$2) x < \frac{3}{2}(400 - x)$$

$$x < 600 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x < 600$$

$$5x < 1200$$

$$x < 240$$

$$x \leq 239$$

Получается, что при  $x \in [201, 239]$ . Наме  
 считается бюджет вычисл  $\Rightarrow$  однозначно  
 будет задан треугольник с указанным  
 свойствами  $\Rightarrow$  кол-во треугольников  
 с той же самой стороной  $[201, 239]$   
 кол-во треуго.:  $239 - 201 + 1 = 39$

Ответ: 39

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Даны функции

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$g(x) = x + |2x - 1|$$

Получим наименьшее значение

$$f(x) \leq ax + b \leq g(x)$$

$f(x)$  - парабола

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

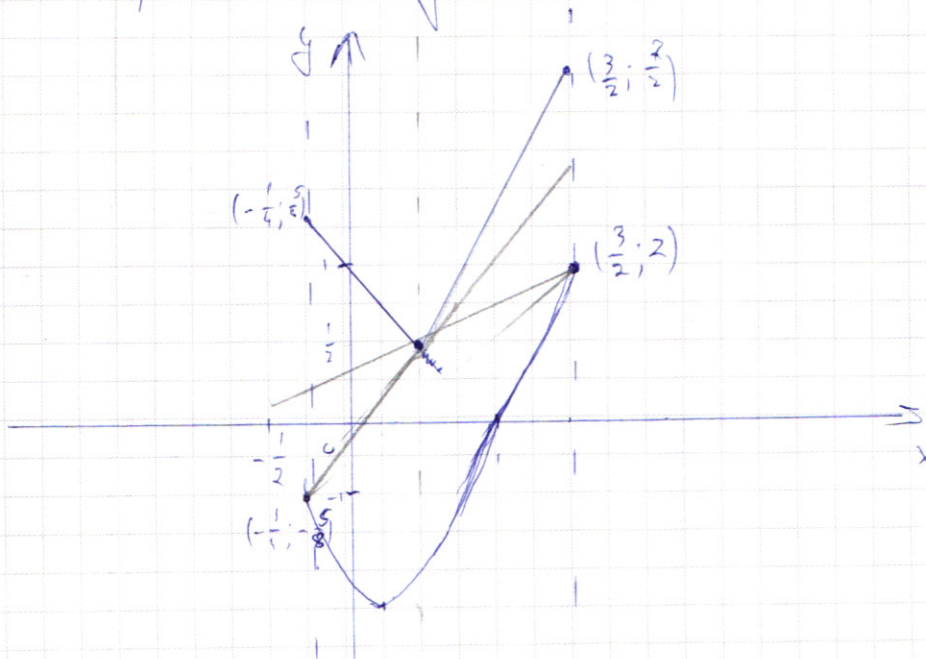
$$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{при } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + 1, & \text{при } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Построим графики  $f$  и  $g$  при  $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{7}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$g\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

$ax + b$  - прямая, касательная к параболе  $f$ , касательная в точке  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

Рассмотрим прямую, проходящую через  $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}$$

Для всех таких прямых максимум  $a$  будет при прохождении  
 через  $\tau = (-\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$

$$y = ax - \frac{1-a}{2}$$

$$\frac{5}{8} = -\frac{a}{4} - \frac{1-a}{2} \quad | \cdot 4$$

~~$$5 = -2a + 2(1-a)$$~~
~~$$5 = -2a + 2 - 2a$$~~

$$5 = -2a + 2(1-a)$$

$$5 = 2a - 4$$

$$9 = 2a$$

$$a = \frac{9}{2}$$

$a$  мин. достигается будет при прохождении

через  $(\frac{3}{2}; 2)$

$$2 = \frac{3}{2}a - \frac{1-a}{2}$$

$$4 = 3a + a - 1$$

$$5 = 4a$$

$$a = \frac{5}{4}$$

$\Rightarrow$  будет достигаться пары  $\begin{cases} a \in [-\frac{5}{4}; \frac{9}{2}] \\ b = \frac{1-a}{2} \end{cases}$

Пусть прямые проходят через:  $(\frac{3}{2}; 2)$ , т.

$$2 = \frac{3}{2}a + b$$

$$4 = 3a + 2b$$

$$b = 2 - \frac{3}{2}a$$

Тогда достигаются все прямые проход. через  $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$  до  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$   
 $(\frac{3}{2}; 2)$

$$-\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + 2 - \frac{3}{2}a$$

$$(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) : a = \frac{5}{4}$$

$$-5 = -2a + 4 - 12a$$

$$\Rightarrow \text{при } a \in [-\frac{21}{12}; \frac{5}{4}], b = 2 - \frac{3}{2}a$$

$$-21 = -12a$$

$$a = \frac{21}{12}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что  $f\left(\sqrt{x \cdot y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f(1 \cdot a) = f(a) + f(1)$   
 $f(1) = 0$

$f(x)$

$\Rightarrow$  для любых  $x$  и  $y$   $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$  ~~или~~  $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Пусть число  $x$  можно представить на промежутке  $x = p_1^{L_1} p_2^{L_2} p_3^{L_3} \dots$

Тогда  $f(x) = \underbrace{f(p_1)}_{L_1} + \underbrace{f(p_2)}_{L_2} + \dots =$

$= L_1 f\left(\frac{p_1}{2}\right) + L_2 f\left(\frac{p_2}{2}\right) + \dots = L_1 \left[\frac{p_1}{2}\right] + L_2 \left[\frac{p_2}{2}\right] + \dots$

Список от 1 до 21: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19

Тогда

$f(1) = 0$	$f(4) = 2f(2) = 2$
$f(2) = 1$	$f(6) = 2f(2) + f(3) = 3$
$f(3) = 1$	$f(8) = 3f(2) = 3$
$f(5) = 2$	$f(9) = 2f(3) = 2$
$f(7) = 3$	$f(10) = f(5) + f(2) = 3$
$f(11) = 5$	$f(12) = f(6) + f(2) = 4$
$f(13) = 6$	$f(14) = f(7) + f(2) = 4$
$f(17) = 8$	$f(15) = f(5) + f(3) = 3$
$f(19) = 9$	$f(16) = 2f(8) = 6$
	$f(18) = 2f(9) = 4$
	$f(20) = 2f(10) = 6$
	$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

Тогда если  $x = 1$ ; то в  $y$  от 2 до 21 подходит: 20 пар

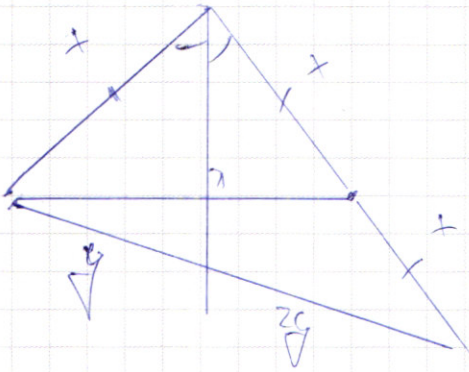
$x = 2$ ; то $y = 4, 5, 6, \dots, 21$ : 18 пар	$x = 5$ ; то $y = 6, 7, 8, 10, 11, \dots, 21$ : 15 пар
$x = 3$ ; то $y = 4, 5, 6, 7, \dots, 21$ : 18 пар	$x = 6$ ; то $y = 11, 12, 13, 14, 16, \dots, 21$ : 9 пар
$x = 4$ ; то $y = 6, 7, 8, 10, 11, \dots, 21$ : 15 пар	

$x=7;$  9 пар  
 $x=8;$  9 пар  
 $x=9;$  18 пар  
 $x=10;$  9 пар  
 $x=11;$   $y=13, 17, 19, 16, 20:$  5 пар  
 $x=12;$   $y=11, 13, 17, 19, 14, 16, 20:$  7 пар  
 $x=13;$   $y=17, 19 = 2$  пары  
 $x=14;$  7 пар  
 $x=15;$  9 пар  
 $x=16;$  2 пары  
 $x=17;$   $y=19 = 1$  пара  
 $x=18;$  7 пар  
 $x=19;$  0 пар  
 $x=20;$  2 пары  
 $x=21;$  7 пар.

Всего паров:  $\underline{20} + \underline{18} + \underline{18} + \underline{15} + \underline{15} + \underline{9} + \underline{9} + \underline{9} + \underline{18} + \underline{9} + \underline{5} + \underline{7} + \underline{2} + \underline{2} + \underline{9}$   
 $+ \underline{2} + \underline{1} + \underline{7} + \underline{0} + \underline{2} + \underline{7} = 20 + 3 \cdot 18 + 2 \cdot 15 + 5 \cdot 9 + 5 + 4 \cdot 7 +$   
 $3 \cdot 2 + 1 = 189 \text{ пар}$

Ответ: 189 пар

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x + y = 400$$

~~$$300 > 3y$$~~

$$x > y$$

$$2x + 3y > x$$

$$x > -3y$$

$$x < 3y$$

$$x + 3y > 2x$$

$$x < \frac{3}{2}y$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{1200} \mid 5 \\ \frac{10}{20} \quad \frac{1}{25} \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ x < y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$y \geq 1$$

$$x \geq 4$$

$$y = 400 - x$$

$$x > 400 - x$$

$$2x > 400$$

$$x > 200$$

$$x < \frac{3}{2} \cdot (400 - x)$$

$$x < 600 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x < 600$$

$$5x < 1200$$

$$x < 240$$

$$x \in [201; 239]$$

(39)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{3}{8} \neq 1 = -\frac{5}{8}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

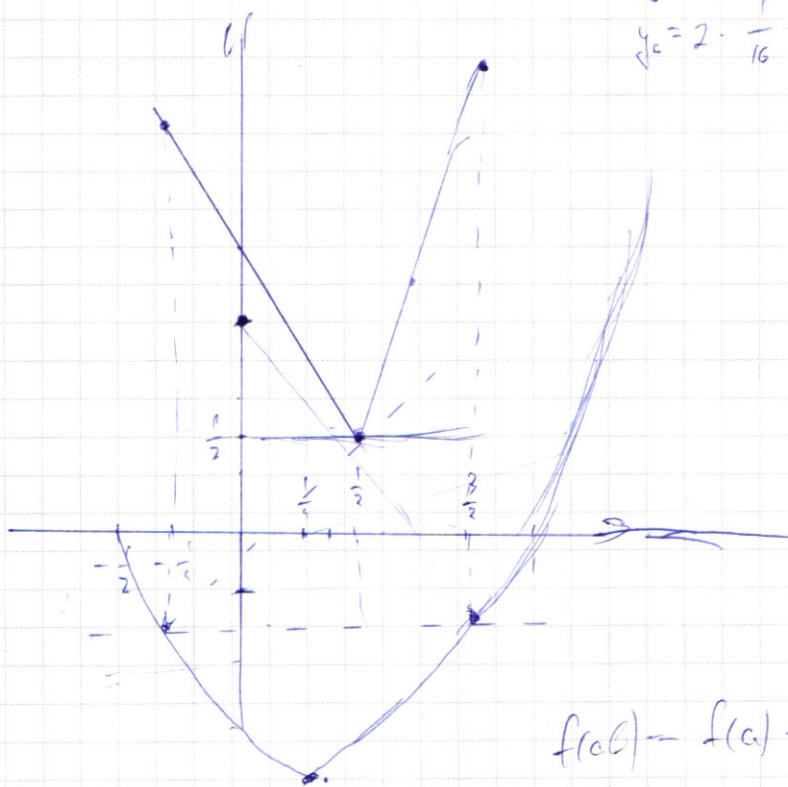
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \cdot x + b$

$$f(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$x_0 = \frac{1}{4}$$

$$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$



$$g(y) = x + 1/2x - 1$$

$$x \geq \frac{1}{2} : y = 3x - 1 : \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$x < \frac{1}{2} : y = -x + 1$$

$$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \lfloor p/2 \rfloor$$

$$x = \frac{1}{y}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) =$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 2$$

$$f(7) = 3$$

$$f(6) = f(2) + f(2) + f(3) = 3$$

$$f(b) = f(a \cdot b) - f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(x) \leq f(y)$$



$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{(y-1)(y-2)} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 - 4x + (y-3)(y-1) = 0$$

$$2x(x-2)$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 3 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 2x + y + 4x^2 - 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x^2 + 2y^2 - 2x - 3y = 0 \\ 6x^2 + 2xy + 2x - 3y - 3xy = 0 \\ 6x^2 + 2xy - 2x \\ 2x(3x + y - 1) \end{cases}$$

$$4x^2 - 2x + y(2y - 3 - 3x) = 0$$

$$2x^2 + 3xy - 6x - 5y + 6 = 0$$

$$y^2 - 3xy + 2x + y$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x(y-2) + 6 - 5y &= 0 \\ 9(y-2)^2 - 8(6-5y) &= 0 \\ 9y^2 - 36y + 36 - 48 + 40y &= 0 \\ 9y^2 + 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 \\ 4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$\begin{cases} 6x^2 + 2y^2 - 5xy - 2x - 3y \\ 7x^2 + 5xy + 6x + 5y - 5 = 0 \\ 2x^2 + 6 \end{cases}$$

$$6x^2 + 2y^2 - 5xy - 2x - 3y + 1 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$$

$$2x^2 + 6x + 5y - 5xy - 5 = 0$$

$$5y(1-x)$$

$$2x^2 + x(6-5y) + 5(y-1) = 0$$

$$36 - 60y + 25y^2 - 40y + 40 =$$

$$25y^2 - 100y + 76 =$$

~~$x^2 + 4x - 2z = 5$~~

$x^2 + (x-2) + (x-2)^2 = 5$

$x^2 + x - 2 + x^2 - 4x + 4 = 5$

$2x^2 - 3x + 2 = 3$

$2x^2 - 3x - 1 = 0$

$2x^2 - 3x + 4x - 2x - 1 = 0$

$2x^2 + 2x - 1 = 0$

$2x^2 + 2x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 4x - 1 = 0$

$4x^2 + 4x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 6x - 1 = 0$

$4x^2 + 6x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 8x - 1 = 0$

$4x^2 + 8x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 10x - 1 = 0$

$4x^2 + 10x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 12x - 1 = 0$

$4x^2 + 12x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 14x - 1 = 0$

$4x^2 + 14x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 16x - 1 = 0$

$4x^2 + 16x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 18x - 1 = 0$

$4x^2 + 18x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 20x - 1 = 0$

$4x^2 + 20x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 22x - 1 = 0$

$4x^2 + 22x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 24x - 1 = 0$

$4x^2 + 24x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 26x - 1 = 0$

$4x^2 + 26x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 28x - 1 = 0$

$4x^2 + 28x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 30x - 1 = 0$

$4x^2 + 30x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 32x - 1 = 0$

$4x^2 + 32x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 34x - 1 = 0$

$4x^2 + 34x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 36x - 1 = 0$

$4x^2 + 36x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 38x - 1 = 0$

$4x^2 + 38x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 40x - 1 = 0$

$4x^2 + 40x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 42x - 1 = 0$

$4x^2 + 42x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 44x - 1 = 0$

$4x^2 + 44x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 46x - 1 = 0$

$4x^2 + 46x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 48x - 1 = 0$

$4x^2 + 48x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 50x - 1 = 0$

$4x^2 + 50x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 52x - 1 = 0$

$4x^2 + 52x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 54x - 1 = 0$

$4x^2 + 54x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 56x - 1 = 0$

$4x^2 + 56x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 58x - 1 = 0$

$4x^2 + 58x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 60x - 1 = 0$

$4x^2 + 60x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 62x - 1 = 0$

$4x^2 + 62x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 64x - 1 = 0$

$4x^2 + 64x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 66x - 1 = 0$

$4x^2 + 66x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 68x - 1 = 0$

$4x^2 + 68x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 70x - 1 = 0$

$4x^2 + 70x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 72x - 1 = 0$

$4x^2 + 72x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 74x - 1 = 0$

$4x^2 + 74x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 76x - 1 = 0$

$4x^2 + 76x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 78x - 1 = 0$

$4x^2 + 78x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 80x - 1 = 0$

$4x^2 + 80x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 82x - 1 = 0$

$4x^2 + 82x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 84x - 1 = 0$

$4x^2 + 84x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 86x - 1 = 0$

$4x^2 + 86x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 88x - 1 = 0$

$4x^2 + 88x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 90x - 1 = 0$

$4x^2 + 90x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 92x - 1 = 0$

$4x^2 + 92x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 94x - 1 = 0$

$4x^2 + 94x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 96x - 1 = 0$

$4x^2 + 96x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 98x - 1 = 0$

$4x^2 + 98x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 100x - 1 = 0$

$4x^2 + 100x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 102x - 1 = 0$

$4x^2 + 102x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 104x - 1 = 0$

$4x^2 + 104x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 106x - 1 = 0$

$4x^2 + 106x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 108x - 1 = 0$

$4x^2 + 108x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 110x - 1 = 0$

$4x^2 + 110x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 112x - 1 = 0$

$4x^2 + 112x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 114x - 1 = 0$

$4x^2 + 114x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 116x - 1 = 0$

$4x^2 + 116x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 118x - 1 = 0$

$4x^2 + 118x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 120x - 1 = 0$

$4x^2 + 120x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 122x - 1 = 0$

$4x^2 + 122x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 124x - 1 = 0$

$4x^2 + 124x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 126x - 1 = 0$

$4x^2 + 126x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 128x - 1 = 0$

$4x^2 + 128x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 130x - 1 = 0$

$4x^2 + 130x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 132x - 1 = 0$

$4x^2 + 132x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 134x - 1 = 0$

$4x^2 + 134x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 136x - 1 = 0$

$4x^2 + 136x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 138x - 1 = 0$

$4x^2 + 138x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 140x - 1 = 0$

$4x^2 + 140x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 142x - 1 = 0$

$4x^2 + 142x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 144x - 1 = 0$

$4x^2 + 144x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 146x - 1 = 0$

$4x^2 + 146x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 148x - 1 = 0$

$4x^2 + 148x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 150x - 1 = 0$

$4x^2 + 150x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 152x - 1 = 0$

$4x^2 + 152x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 154x - 1 = 0$

$4x^2 + 154x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 156x - 1 = 0$

$4x^2 + 156x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 158x - 1 = 0$

$4x^2 + 158x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 160x - 1 = 0$

$4x^2 + 160x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 162x - 1 = 0$

$4x^2 + 162x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 164x - 1 = 0$

$4x^2 + 164x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 166x - 1 = 0$

$4x^2 + 166x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 168x - 1 = 0$

$4x^2 + 168x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 170x - 1 = 0$

$4x^2 + 170x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 172x - 1 = 0$

$4x^2 + 172x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 174x - 1 = 0$

$4x^2 + 174x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 176x - 1 = 0$

$4x^2 + 176x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 178x - 1 = 0$

$4x^2 + 178x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 180x - 1 = 0$

$4x^2 + 180x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 182x - 1 = 0$

$4x^2 + 182x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 184x - 1 = 0$

$4x^2 + 184x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 186x - 1 = 0$

$4x^2 + 186x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 188x - 1 = 0$

$4x^2 + 188x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 190x - 1 = 0$

$4x^2 + 190x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 192x - 1 = 0$

$4x^2 + 192x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 194x - 1 = 0$

$4x^2 + 194x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 196x - 1 = 0$

$4x^2 + 196x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 198x - 1 = 0$

$4x^2 + 198x + 2x - 1 = 0$

$4x^2 + 200x - 1 = 0$

$4x^2 + 200x + 2x - 1 = 0$

$16 + 8 + 9 = 25$

$16 - 8$

$9 - 16$

$A_2: x = 3g$

$A_3: x = -3g$

$A_4: 3g + 2x > x$

$A_5: x > g$

$A_6: 3x > 3g$

$A_7: x + g = 4gc$

$A_8: x + 3g = 12gc$

$A_9: x + g = 4gc$

$A_{10}: x + 3g = 12gc$

$d = ag^3$

$c = aq^2$

$b = ag$

$a$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ШИФР

(заполняется секретарём)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»



