МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c,$ ~~d~~ - первые три члена геом. прогрессии

d - 4 член прогрессии

Тогда пусть q - знаменатель прогрессии, тогда

$a = a \cdot q^0 = a$

$b = a \cdot q^1 = aq$

$c = a \cdot q^2 = aq^2$

$d = a \cdot q^3 = aq^3$

Рассмотрим ур-ние $ax^2+2bx+c=0$

Подставим выражения для b и c, получим

$ax^2+2aqx+aq^2=0$

$a(x+2qx+q^2)=0$

$a(x+q)^2=0$

~~Если $a=0$, то прогрессия будет состоять из нулей и четвертый член будет равен 0,~~ $(x+q)^2=0$

$x=-q$. Но по условию $x=d=aq^3$

Получаем $aq^3=-q$

$aq^3+q=0$

$q(aq^2+1)=0$

Т.к. геометр. прогрессия существует $\Rightarrow q \neq 0$

$\Rightarrow aq^2+1=0$

$aq^2=-1$

Но $aq^2=c$ - третий член прогрессии

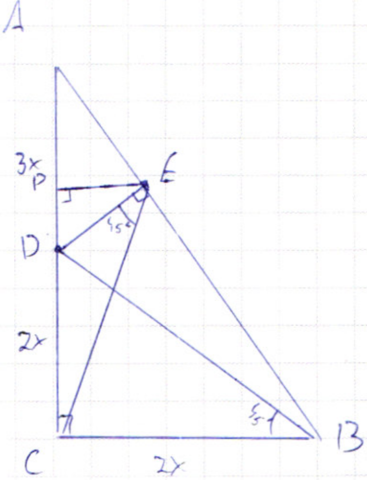
$\Rightarrow c=aq^2=-1$

Ответ: -1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№4



а) Если $\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$, то $\frac{AC}{AD}=\frac{5}{3}$

$AC=AD+DC$

$\frac{AD+DC}{AD}=1+\frac{DC}{AD}=\frac{5}{3}$

$\frac{DC}{AD}=\frac{2}{3}$, тогда пусть $DC=2x \Rightarrow AD=3x$

Заметим, что в чт. $DEBC$ $\angle DEB+\angle BCD = 90^\circ+90^\circ=180^\circ \Rightarrow$ четыр. $DEBC$ — вписанный в окружн. $\Rightarrow$ $\angle DEC=\angle DBC=45^\circ$ (углы, опир. на одну дугу). Тогда в $\triangle DCB$, т.к. он прямоуг., то $\angle CDB+\underset{45}{\angle DBC}=90^\circ \Rightarrow \angle CDB=45 \Rightarrow \triangle DCB$ - равнобед.
$\Rightarrow DC=BC=2x$

$tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{3x+2x}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}$

б) Пусть P — проекция E на прямую AC, S — площадь $\triangle ABC$;

$S=\frac{5x\cdot 2x}{2}=5x^2$

$\triangle ADE\sim\triangle ABC$ (прямоуг. с общим углом) $\Rightarrow k$ — коэффиц. подобия

$k=\frac{AB}{AD}$

по т. Пифаг. $AB=\sqrt{5x^2+2x^2}=\sqrt{29}x \Rightarrow k=\frac{\sqrt{29}x}{3x}=\frac{\sqrt{29}}{3}$

Площади будут относится как $k^2 \Rightarrow k^2=\frac{S}{S_{ADE}}$

$\left(\frac{\sqrt{29}}{3}\right)^2=\frac{S}{S_{ADE}} \Rightarrow S_{ADE}=\frac{9S}{29}$

Заметим, что $\triangle ADE$ и $\triangle CDE$ имеют общую высоту $EP \Rightarrow$

$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}=\frac{AD}{DC}=\frac{3}{2} \Rightarrow S_{DCE}=\frac{2S_{ADE}}{3}=\frac{2\cdot\frac{9S}{29}}{3}=\frac{\overset{6}{\cancel{18}}S}{\cancel{3}\cdot 29}=\frac{6}{29}S$

$S=5x^2 \Rightarrow$

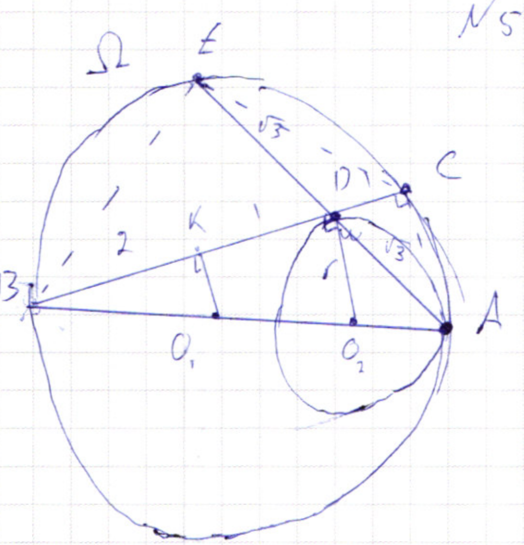
$\Rightarrow S_{CDE}=\frac{30}{29}x^2 \longrightarrow S_{CDE}=\frac{\overset{6}{\cancel{30}}}{\cancel{29}}\cdot\frac{\cancel{29}}{\underset{5}{\cancel{25}}}=\frac{6}{5}$

$AC=\sqrt{29}$; $5x=\sqrt{29}$; $x=\frac{\sqrt{29}}{5}$; $x^2=\frac{29}{25}$

Ответ: $tg\angle BAC=\frac{2}{5}$; $S_{CDE}=\frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Пусть O_1 и O_2, центры Ω и ω соответственно. A – центр гомотетии, переводящей ω в Ω, в частности O_2 в O_1 $\Rightarrow$ O_1, O_2 и A – лежат на одной прямой AB; $O_2D \perp BC$ – радиус $\perp$ касат. Пусть r и R – радиусы ω и Ω соответственно $\Rightarrow$

$O_1O_2 = R - r$. Пусть K проекция O_1 на BC, тогда K – середина BC ($\triangle O_1BC$ – равноб), тогда $BK = \frac{1}{2}BC$

$BC = BD + DC = 3+1 = 4 \Rightarrow BK = 2$, $DK = CK - CD = 2 - 1 = 1$; тогда

$\triangle BKO_1 \sim \triangle BDO_2$ – прямоугол. с общим углом $\Rightarrow$

$\frac{BK}{BD} = \frac{BO_1}{BO_2}$; $\frac{2}{3} = \frac{R}{2R-r}$; $4R - 2r = 3R$; $\boxed{R = 2r}$

$BO_1 = R$

$BO_2 = BO_1 + O_1O_2 = R + R - r = 2R - r$

Запишем т. Пифагора для $\triangle BDO_2$: $BO_2^2 = BD^2 + DO_2^2$

$(2R - r)^2 = 9 + r^2$

Подставляя вместо $2R$ $4r$

$(4r - r)^2 = 9 + r^2$

$(3r)^2 = 9 + r^2$

$9r^2 = 9 + r^2$

$8r^2 = 9$

$$\boxed{r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \qquad R = 2r = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$

$\triangle BCA$ – прямоуг., ~~смотр~~ AB – диам. $\Rightarrow \angle BCA = 90°$

тогда $\cos\angle CBA = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3\sqrt2} = \frac{4\sqrt2}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt2}{3}$

$AB = 2R = 3\sqrt2$

Найдем AD по т. косинусов для $\triangle BDA$

$AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2AB\cdot BD\cdot\cos\angle CBA$

$AD^2 = 9 + 18 - 2\cdot 3\sqrt2\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt2}{3} = 9 + 18 - 24 = 3$

$AD = \sqrt3$

по т. синусов для $\triangle BDA$ $= \frac{AD}{\sin\angle CBA} = \frac{AB}{\sin\angle BDA}$

$\sin\angle CBA = \sqrt{1-\cos^2\angle CBA} = \sqrt{1-\frac{8}{9}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

$\frac{\sqrt3}{\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt2}{\sin\angle BDA}$

$\sin\angle BDA = \sqrt{\frac{2}{3}}$

По т. о 2 перес. хордах: $ED\cdot AD = BD\cdot DC$

$ED\cdot\sqrt3 = 3\cdot 1$

$ED = \frac{3}{\sqrt3} = \sqrt3$

$\Rightarrow AE = 2\sqrt3$

$BC = 4$

$S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot BC\cdot\sin\angle BDA = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt3\cdot 4\cdot\frac{\sqrt2}{\sqrt3} = 4\sqrt2$

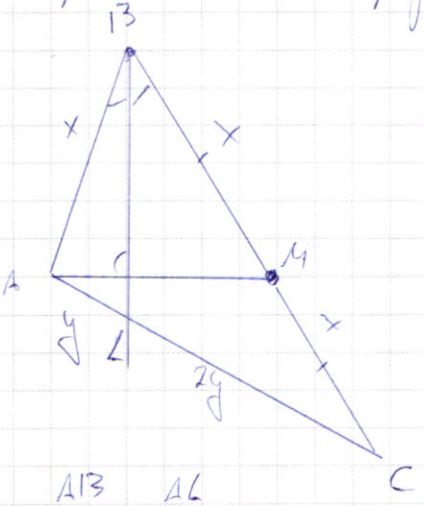
Ответ: рад. $\omega = \frac{3\sqrt2}{4}$

рад. $\Omega = \frac{3\sqrt2}{2}$

$S_{BACE} = 4\sqrt2$

№2

Рассмотрим такой треугольник ABC; BL - биссектр. AM - медиана



$AM \perp BL$; пусть $AB = x$; заметим, что в $\triangle ABM$ биссект $BL \perp AM \Rightarrow$ $\triangle ABM$ - равнобедр. $\Rightarrow AB = BM = x$, но $BC = 2BM$ (AM - медиана) $\Rightarrow BC = 2x$

Пусть $AL = y$. Запишем свойство биссектр. BL: $\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{LC}$

$\frac{x}{2x} = \frac{y}{LC}$, откуда $LC = 2y \Rightarrow AC = 3y$. $P_{ABC} = AB + BC + AC =$
$= x + 2x + 3y = 3(x+y) = 1200$

$x + y = 400$. Также условия нер-ва треугольника:

$$\left.\begin{array}{l} AB + BC > AC \\ BC + AC > AB \\ AB + AC > BC \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2x > 3y \\ 2x + 3y > x \\ x + 3y > 2x \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x > y \\ x < 3y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Т.к. $x < \frac{3}{2}y$ сильнее чем $x < 3y$, то ~~его~~ неравенство можно убрать. Получим систему

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ x > y \\ x < \frac{3}{2}y \end{cases}$$

Нам нужно понять сколько целых x удовлетв. системе. Действительно, если мы фиксируем меньшую сторону при биссектрисе, то однозначно задаем треугольник. Т.к. все остальные стороны выражаются через x

черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x>y \\ x<\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{y}=400-x \\ x>400-x \quad (1) \\ x<\frac{3}{2}(400-x) \quad (2) \end{cases}$$

1) $x>400-x$

$x>200$

$x\geq 201$

2) $x<\frac{3}{2}(400-x)$

$x<600-\frac{3}{2}x$

$\frac{5}{2}x<600$

$5x<1200$

$x<240$

$x\leq 239$

Получаем, что при $x\in[201, 239]$. Наша система будет верна $\Rightarrow$ однозначно будет задан треугольник с указанным свойством $\Rightarrow$ кол-во треугольников есть длина отрезка $[201; 239]$

кол-во треуг.: $239-201+1=39$

Ответ: 39

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Пусть $f(x) = 2x^2 - x - 1$

$g(x) = x + |2x - 1|$

Тогда наше н-во имеет вид

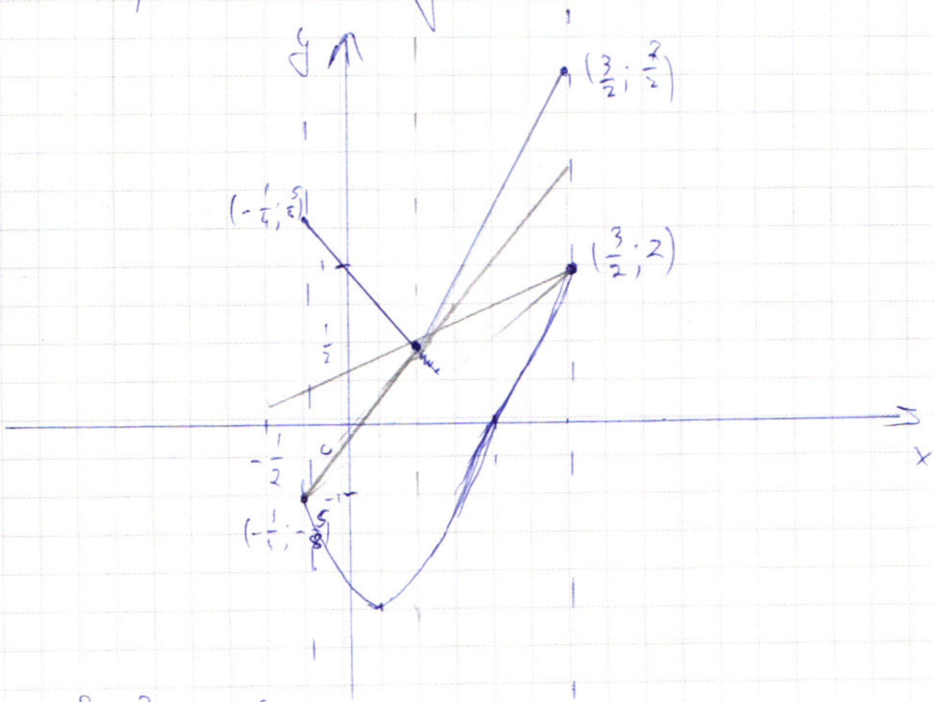
$f(x) \le ax + b \le g(x)$

$f(x)$ - парабола $x_0 = \frac{1}{4}$

$y_0 = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$ $x_1 = 1$ $x_2 = -\frac{1}{2}$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ при } x \geq \frac{1}{2} \\ -x + 1, \text{ при } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Построим графики f и g при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



$f(\frac{3}{2}) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$

$f(-\frac{1}{4}) = 2(-\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{5}{8}$

$g(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$

$g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$

$ax + b$ - прямая, должна быть выше f, но ниже g

Рассмотрим прямую проходящую через $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b \Rightarrow a = 1 - 2b$, тогда $b = \frac{1-a}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7
(Нумеровать только чистовики)

Для всех таких прямых максимум a будет при прохождении через т. $\left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{8}\right)$

$y = ax - \left(\frac{1-a}{2}\right)$

$\frac{5}{8} = -\frac{a}{4} - \left(\frac{1-a}{2}\right) \mid \cdot 8$

~~$5 = -2a - (1-a)$~~

~~$5 = -6a$~~

$5 = -2a - 4(1-a)$

$5 = 2a - 4$

$9 = 2a$

$a = \frac{9}{2}$

а мин. положением будет прохождение через $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$2 = \frac{3}{2}a - \frac{1-a}{2}$

$4 = 3a + a - 1$

$5 = 4a$

$a = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ будут подходить пары $\begin{cases} a \in \left[\frac{5}{4}; \frac{9}{2}\right] \\ b = \frac{1-a}{2} \end{cases}$

Пусть прямые проходят через: $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, т.

$2 = \frac{3}{2}a + b$

$4 = 3a + 2b$

$b = 2 - \frac{3}{2}a$

Тогда подойдут все прямые проход. через $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ до $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$-\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + 2 - \frac{3}{2}a$

$-5 = -2a + 16 - 12a$

$-21 = -12a$

$a = \frac{21}{12}$

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$: $a = \frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ при $a \in \left(\frac{21}{12}; \frac{5}{4}\right)$, $b = 2 - \frac{3}{2}a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1\cdot a) = f(a) + f(1)$

$f(1)=0$

№1

Заметим, что $f(\underbrace{y\cdot\frac{x}{y}}_{f(x)}) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$\Rightarrow$ для любых x и y $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ если $f(x/y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Пусть число x имеет разложение на простые $x = p_1^{L_1} p_2^{L_2} p_3^{L_3}\ldots$

Тогда $f(x) = \underbrace{f(p_1)+f(p_1)\ldots}_{L_1} + \underbrace{f(p_2)+f(p_2)\ldots}_{L_2}\ldots =$

$= L_1 f(p_1) + L_2 f(p_2) + \ldots = L_1\left[\frac{p_1}{2}\right] + L_2\left[\frac{p_2}{2}\right]\ldots$

Простые от 1 до 21: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19

$f(1)=0$
$f(2)=1$
$f(3)=1$
$f(5)=2$
$f(7)=3$
$f(11)=5$
$f(13)=6$
$f(17)=8$
$f(19)=9$

Тогда

$f(4)=2f(2)=2$
$f(6)=2f(2)+f(3)=3$
$f(8)=3f(2)=3$
$f(9)=2f(3)=2$
$f(10)=f(5)+f(2)=3$
$f(12)=f(6)+f(2)=4$
$f(14)=f(7)+f(2)=4$
$f(15)=f(5)+f(3)=3$
$f(16)=2f(8)=6$
$f(18)=2f(9)=4$
$f(20)=2f(10)=6$
$f(21)=f(7)+f(3)=4$

Тогда если $x=1$; то в y от 2 до 21 подходят: 20 пар

$x=2$; то $y=4, 5, 6, \ldots 21$: 18 пар

$x=3$; то $y=4, 5, 6, 7, \ldots 21$: 18 пар

$x=4$; то $y=6, 7, 8, 10, 11 \ldots 21$: 15 пар

$x=5$; то $y=6, 7, 8, 10, 11 \ldots 21$; 15 пар

$x=6$; то $y=11, 12, 13, 14, 16, \ldots 21$: 9 пар

$x = 7$; 9 пар

$x = 8$; 9 пар

$x = 9$; 18 пар

$x = 10$; 9 пар

$x = 11$; $y = 13, 17, 19, 16, 20$: 5 пар

$x = 12$; $y = 11, 13, 17, 19, 14, 16, 20$: 7 пар

$x = 13$; $y = 17, 19$: 2 пары

$x = 14$; 7 пар

$x = 15$; 9 пар

$x = 16$; 2 пары

$x = 17$; $y = 19$: 1 пара

$x = 18$; 7 пар

$x = 19$; 0 пар

$x = 20$; 2 пары

$x = 21$; 7 пар.

Итого получаем: $20 + 18 + 18 + 15 + 15 + 9 + 9 + 9 + 18 + 9 + 5 + 7 + 2 + 7 + 9 + 2 + 1 + 7 + 0 + 2 + 7 = 20 + 3 \cdot 18 + 2 \cdot 15 + 5 \cdot 9 + 5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2 + 1 = 189$ пар

Ответ: 189 пар

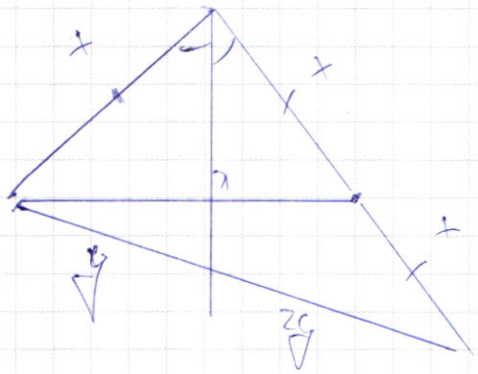
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x+y=400$

$\cancel{3x>3y}$

$x>y$

$2x+3y>x$

$x>-3y$

$x<3y$

$x+3y>2x$

$x<\frac{3}{2}y$

$1200 \,|\, 5$, 10, 20, 24

$$\begin{cases} x+y=400 \\ x>y \\ x<\frac{3}{2}y \end{cases}$$

$x\geq 1$

$\cancel{x\geq 1}$

$y=400-x$

$x>400-x$

$2x>400$

$x>200$

$x<\frac{3}{2}\cdot(400-x)$

$x<600-\frac{3}{2}x$

$\frac{5}{2}x<600$

$5x<1200$

$x<240$

$x\in[201;239]$

39

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-1$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}-1=-\frac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

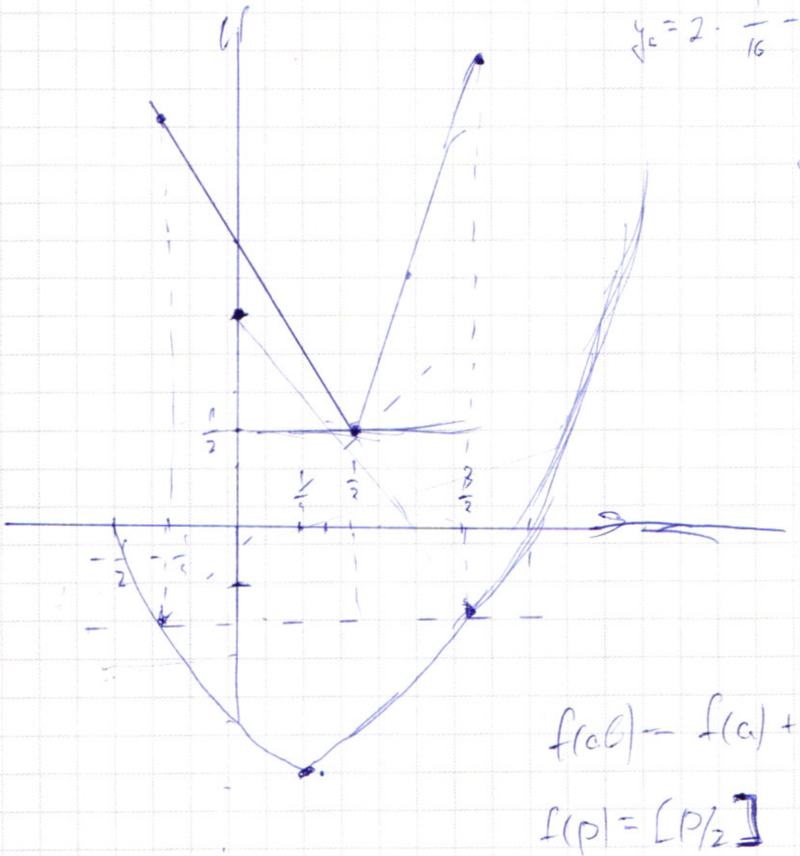
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b$

$f(x)=2x^2-x-1$

$x_0=\frac{1}{4}$

$y_0=2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{4}-1=-\frac{5}{4}$



$g(x)=x+|2x-1|$

$x\geqslant\frac{1}{2}: y=3x-1: \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$x<\frac{1}{2}: y=-x+1$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$

$f(\frac{x}{y})<0$

$x\cdot\frac{1}{y}$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=2$

$f(7)=3$

$f(6)=f(2)+f(2)+f(3)=3$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{x}{y})=$

$f(b)=f(ab)-f(a)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(x)\leq f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2-4x+(y-3)(y-1)=0$

$\cancel{2x(x-2)}$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+3 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} y^2-5xy+2x+y+4x^2-3=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}}$$

$\cancel{6x^2+2y^2-2x-3y-3xy=0}$

$6x^2+2y^2-2x-3y-3xy=0$

$\cancel{6x^2+2xy-2x}$

$2x(3x+y-1)$

$\cancel{6x^2-2x+y(2y-3-3x)=0}$

$y^2-3xy+2x+y$

$2x^2+3xy-6x-5y+6=0$

$\cancel{2x^2+3x(y-2)+6-5y=0}$

$\cancel{9(y-2)^2-8(6-5y)=0}$

$\cancel{9y^2-36y+36-48+40y}$

$\cancel{9y^2+4y-}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$$\begin{cases} 4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\cancel{6x^2+2y^2-5xy-2x-3y}$

$\cancel{2x^2+5xy+6x+3y-5=0}$

$2x^2+6x$

$\cancel{6x^2+2y^2-5xy-2x+3y+1=0}$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$2x^2+6x+5y-5xy-5=0$

$5y(1-x)$

$2x^2+x(6-5y)+5(y-1)=0$

$36-60y+25y^2-40y+40=$

$25y^2-100y+76$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a $\quad aq^{3}\ -?$

$b = aq$ $\quad c - ?$

$c = aq^2$ $\quad d = aq^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

$aq^3 = -q$

$aq^3 + q = 0$

$q(aq^2+1) = 0$

$aq^2 = -1$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

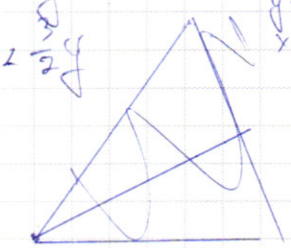
$y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)}$

$\boxed{y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}}$

$\cancel{2x^2 + y^2 - 4 + 4}$ $\quad x^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 5$

$x + 3y > 2x$

$y < x < \frac{3}{2}y$



$x + y = 400$

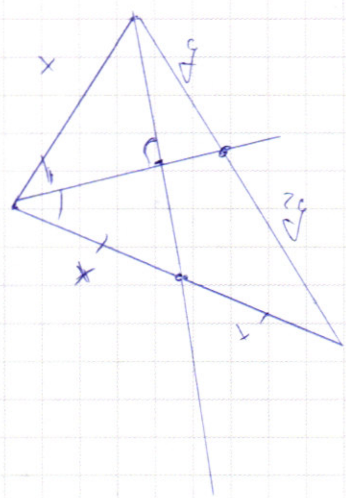
$y < \frac{x}{3}$

$x < \cancel{2}3x + 3y = 1200$

$x + y = 400$

$3x > 3y$

$x > y$



$3y + 2x > x$

$x > -3y$

$x < 3y$

$4 - 6$

$16 -$

$16 + 8 = 24$

$y^2 - 4y + 2x^2 - 4x + 3 = 0$

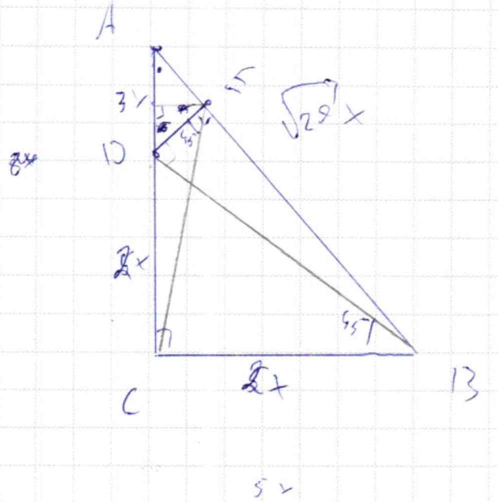
$(y^2 - 4y + 4) + 2x^2 - 4x + 1 = 0$

$(y-2)^2 +$

$y^2 - 2xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 3xy + 4x^2 = -2x - y + 2$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$



$8x = \sqrt{29}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{8}$

$\sqrt{25+64}$

$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

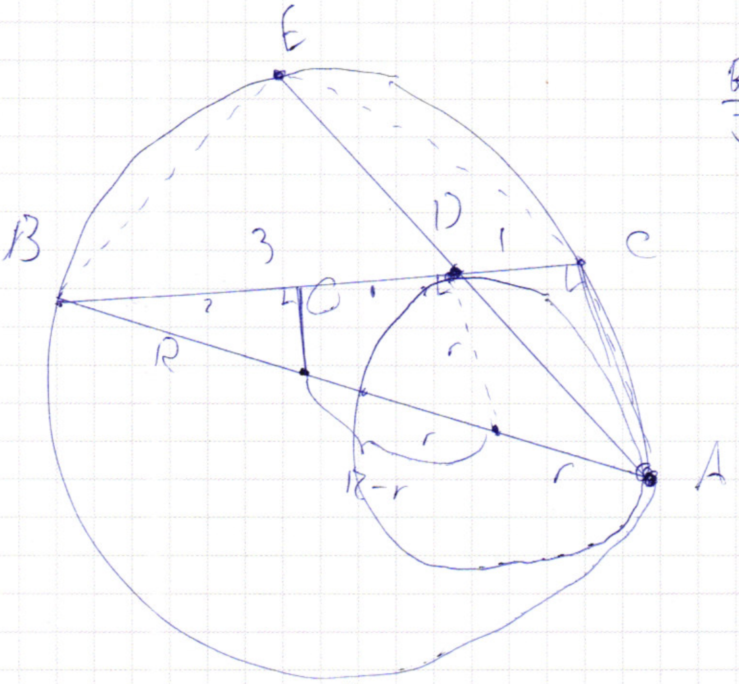
$\frac{\sqrt{29}}{3} = \frac{29}{9}$

$\frac{29}{9} = \frac{9}{6}$

$6 = \frac{99}{29}$

$2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$



$\frac{2}{1} = \frac{R}{R-r}$

$2R - 2r = R$

$R = 2r$

$2R = 4r$

$9 + r^2 = (2R - r)^2$

$3\sqrt{2}$

$9 + r^2 = (3r)^2$

$9 + r^2 = 9r^2$

$8r^2 = 9$

$r^2 = \frac{9}{8}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$1 = a + 2b$

$a = \frac{1-a}{2}$

$b =$

$1 - 2b = a$