

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

~~ОДЗ: $\begin{cases} y-2x \geq 0 \\ xy-2x-y+2 = (y-2x)^2 \end{cases}$~~

$$(1) \quad \begin{aligned} y-2x &= \sqrt{xy-2x-y+2} \\ \sqrt{y-2x+2} &= \sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ (y-2)-2(x-1) &= \sqrt{(y-2)(x-1)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} 2x^2+y^2-4x-4y+3 &= 0 \\ y^2-4y+4-4+2(x^2-2x+1-1)+3 &= 0 \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-2+3-4 &= 0 \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (y-2)-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-3=0 \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} y-2 = a \\ x-1 = b \end{cases}$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}, \quad \text{ОДЗ: } a-2b \geq 0$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = ab & (3) \\ a^2+2b^2-3=0 & (4) \end{cases}$$

(3) $a^2-5ab+4b^2=0 \quad | : b^2 \neq 0$ если $b=0$, то $a^2=0$, значит $a=0$
 $(\frac{a}{b})^2 - 5(\frac{a}{b}) + 4 = 0$ решение $(0;0)$ не явл. реш. (4) $(-3=0)$,
 значит $(0;0)$ не явл. решением системы.
 а, $b \neq 0$

Замена: $\frac{a}{b} = t$

$$\begin{aligned} t^2-5t+4 &= 0 \\ \begin{cases} t=1 \\ t=4 \end{cases} \end{aligned}$$

Обр. замена: $\begin{cases} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=4b \end{cases}$

$$\begin{cases} a=b \\ a=4b \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^2+2b^2-3=0 \\ a=4b \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 3b^2=3 \\ a=4b \\ 16b^2+2b^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=1 \\ b=-1 \\ a=4b \\ b^2=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Проверим по ОДЗ:

- $(1;1)$: $1-2 \geq 0$ неверно
- $(-1;-1)$: $-1+2 \geq 0$ верно
- $(\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{6}}{6})$: $\frac{2\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$
 $\frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$ верно
- $(-\frac{2\sqrt{6}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{6})$: $-\frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$
 $-\frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$ неверно

Итого: $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ a=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ b=\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ b=1 \\ b=-1 \\ a=4b \\ b=\frac{1}{\sqrt{6}} \\ b=-\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ a=-1 \\ b=-1 \\ a=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ b=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ a=-\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ b=-\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Обр. замена:
$$\begin{cases} y-2 = -1 \\ x-1 = -1 \end{cases} \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2 = \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x-1 = \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases} \begin{cases} y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}$$

Отв: $(0; 1), (1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3})$.

N:1 a, b, c, x - члены геом. прогрессии ^(bn) ~~...~~ ($a \neq 0$) Найти: c

$b_1 = a$
 $b_2 = b = aq$
 $b_3 = c = aq^2$
 $b_4 = x$

Пусть q - число, обозначающее во сколько раз последующий член прогрессии больше/меньше предыдущего.

$ax^2 + 2bx + c = 0$
 $ax^2 + 2(aq)x + aq^2 = 0$
 $ax^2 + 2aq \cdot x + aq^2 = 0$
 $a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a=0$ или $x^2 + 2qx + q^2 = 0$; $x^2 + 2 \cdot x \cdot q + q^2 = 0$
 не удов. уи $(x+q)^2 = 0$
 $x+q=0$
 $x = -q$

$\frac{x}{c} = q$
 $-\frac{q}{c} = q$
 $c = -\frac{q}{q} = -1$
 Отв: -1

N:6 $2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

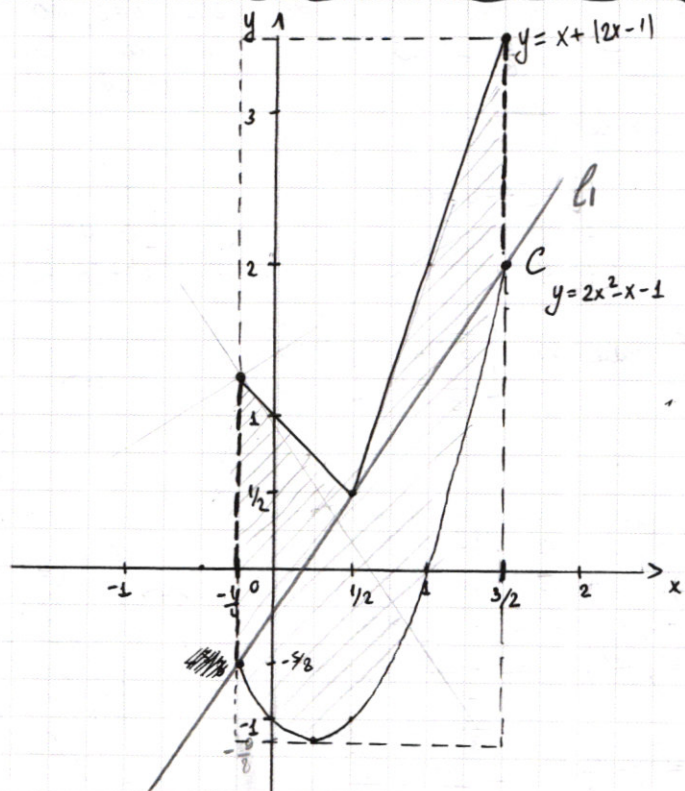
• $y = 2x^2 - x - 1$ - кв. ф-ция, гр-параб.
 $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1/4$
 $y_0 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -1\frac{1}{8}$

• $y = x + |2x - 1|$
 $y = \begin{cases} 3x - 1, & x \geq 1/2 \\ -x + 1, & x < 1/2 \end{cases}$

Прямая $y = ax + b$ должна лежать в закрашенной обл при $x \in [-1/4; 3/2]$

l_1 : проходит ^{через} $(-1/4; -5/8)$ и $(1/2; 1/2)$
 $-\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b$
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b$
 $\rightarrow -\frac{5}{8} + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a$
 $\frac{3}{4}a = \frac{9}{8}$
 $a = 1,5; b = -1/4$

$l_1: y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$



(т. С принадлежит пр. l_1)

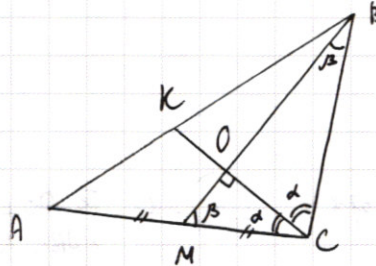
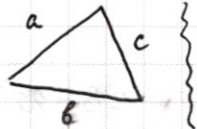
~~...~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~при остальных значениях a и b не при всех x ∈ [-1/4; 3/2] прямая y = ax + b будет лежать в закр. обл.~~

Отв: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$

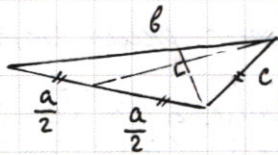
N=2
P=1200
(a, b, c ∈ N)



Рассмотрим $\triangle ABC$
BM - мед, CK - бис.
BM \perp CK
BM \cap CK = O

$\triangle COM$ и $\triangle BOS$ - п/у ($CO \perp BM$), $\angle OCM = \angle BCO = \alpha$ (CK - бис), тогда
 $\angle OMC = \angle OBC = 90 - \alpha = \beta$
Значит $\triangle MCB$ - п/б (по призм) CO - бис, медиан, проведен к основ.

Схема:



$\frac{a}{2} = c \rightarrow a = 2c$

Условие удовл. треугольнику со сторонами 2c, b, c.

$P = 2c + b + c = 1200$
 $P = 3c + b = 1200$

$\left\{ \begin{array}{l} b - \text{наиб. сторона} \\ b < 3c \\ b + 3c = 1200 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} b - \text{наиб.} \\ b < 1200 - b \\ 3c = 1200 - b \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} b - \text{наиб.} \\ b < 600 \\ 3c = 1200 - b \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} b - \text{наиб.} \\ b < 600 \\ c > 200 \end{array} \right. (1)$

(1) наиб. b при $b < 600$ - $b = 599$, тогда $3c = 1200 - 599 = 601$
 $\bullet b = 598$: $3c = 1200 - 598 = 602$
 $602 \div 3$ - не подх.

$\left\{ \begin{array}{l} 2c - \text{наиб.} \\ c < 300 \\ b > 300 \end{array} \right. (2)$

$\bullet b = 597$: $3c = 1200 - 597 = 603$ ✓
 $603 \div 3 = 201$ подх.

$\bullet b = 594$: $3c = 606$
 $c = 202$ подх. ✓

Аналогично до

$(600 - 3n; 200 + n), n \in \mathbb{N}$
 удовл. 99 вар. (до $n = 100$ не вкл.)

(2) наиб. $a = 2c$ при $c < 300$: $a = 599$; $2c = 599 \div 2$ не подх.

$\bullet 2c = 598 \rightarrow c = 299$; $b = 303$
 $\bullet 2c = 596 \rightarrow c = 298$; $b = 306$

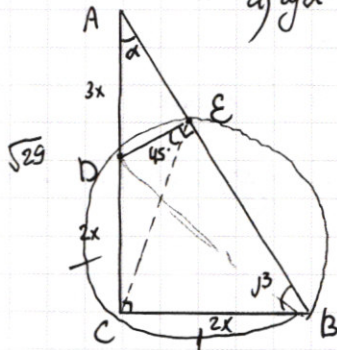
$(600 - 2n; 300 + 3n), n \in \mathbb{N}$

$39 + 29 = 198$

Отв: 198 треуго.

удовл. 99 вар (до $n = 100$ не вкл.)

N=4



a) $\operatorname{tg} \alpha = ?$ (a) 1) $\text{тк } DE \perp AB, \text{ то } \angle DEB = 90^\circ$
 $\triangle ABC$ - пч , поэтому $\angle C = 90^\circ$

В четырехуг. $DEBC$ $\angle DEB + \angle C = 180^\circ$,
тогда $DEBC$ можно вписать в окр.

2) ~~$AD \cdot AC = AE \cdot AB = 3x \cdot 5x = 15x^2$~~ Пусть x - 1 часть,
~~(Пусть x - 1 часть, тогда $AD = 3x, AC = 5x$)~~ тогда $AD = 3x,$
 $AC = 5x \rightarrow DC = 2x$

3) BD - диаметр опис. около $DEBC$ окр.

• $\angle CED = 45^\circ$
• $\angle CED$ - впис., опир. на $\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = 90^\circ$,
значит $\overset{\frown}{CB} = 90^\circ$ ($\overset{\frown}{BD} = 180^\circ$)

• CD и CB - хорды, опир. на равн. дуги,
значит $CD = CB = 2x$

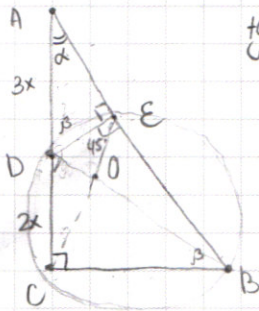
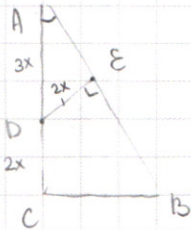
4) В пч $\triangle ABC$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} =$
 $= \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0,4$

(a) Отв: 0,4

(б) $AC = \sqrt{29}$
Найти: S_{CED}

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$N=4$



$\text{tg } \alpha = ?$

опре. скр \rightarrow BD - диаметр

$$AD \cdot DC = AE \cdot AB = 2x^2 + 5x^2$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{5x}$$

$$BC = ? \quad AC = \sqrt{29}$$

$$AD \cdot AC = AE \cdot AB$$

$\frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$

\rightarrow OAB

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad 2x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

$$(1) \quad \begin{cases} y^2-4xy+4x^2 = xy-2x-y+2 \\ y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \end{cases}$$

$$y^2-4y+4-4 + 2(x^2-2x+1-1)+3=0$$

$$(y-2)^2-4+2(x-1)^2-2+3=0$$

$$(y-2)^2+2(x-1)^2-3=0$$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-3=0 \end{cases}$$

$2(300-2)$

$$(1) \quad \begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ y-2x = \sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ y-2x = \sqrt{(y-2)(x-1)} \end{cases}$$

$$y-2x+2-2 = (y-2)-2(x-1)$$

$$\begin{cases} (y-2)-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ (y-2)^2+2(x-1)^2-3=0 \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} y-2 = a \\ x-1 = b \end{cases}$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = ab \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2 = 0 & (*) \\ a^2+2b^2-3=0 \end{cases}$$

$a^2-5ab+4b^2=0 \quad | : b^2 \neq 0$ (противор. уса (2), если $b=0$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0$$

$$\frac{a}{b} = t \rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = 1 & \frac{a}{b} = 4 \\ a = b & a = 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 4b \end{cases} \text{ - реш. (1)}$$

реш (1) или реш (2)

$$\begin{cases} 3b^2 = 3 \\ b = \pm 1 \\ 18b^2 = 3 \\ b^2 = \frac{1}{6} \\ b = \pm \sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

$$2b^2-5ab+3=0$$

N=1

a, b, c, x - члены геом. прогр.
 b_1, b_2, b_3, b_4
 $(a, b > c > 0)$

$x = q^3 a$
 $x = q^2 b$

$q^3 a + q = 0$
 $q(q^2 a + 1) = 0$
 $q = 0$ $\frac{c}{a} = -\frac{1}{q^2}$

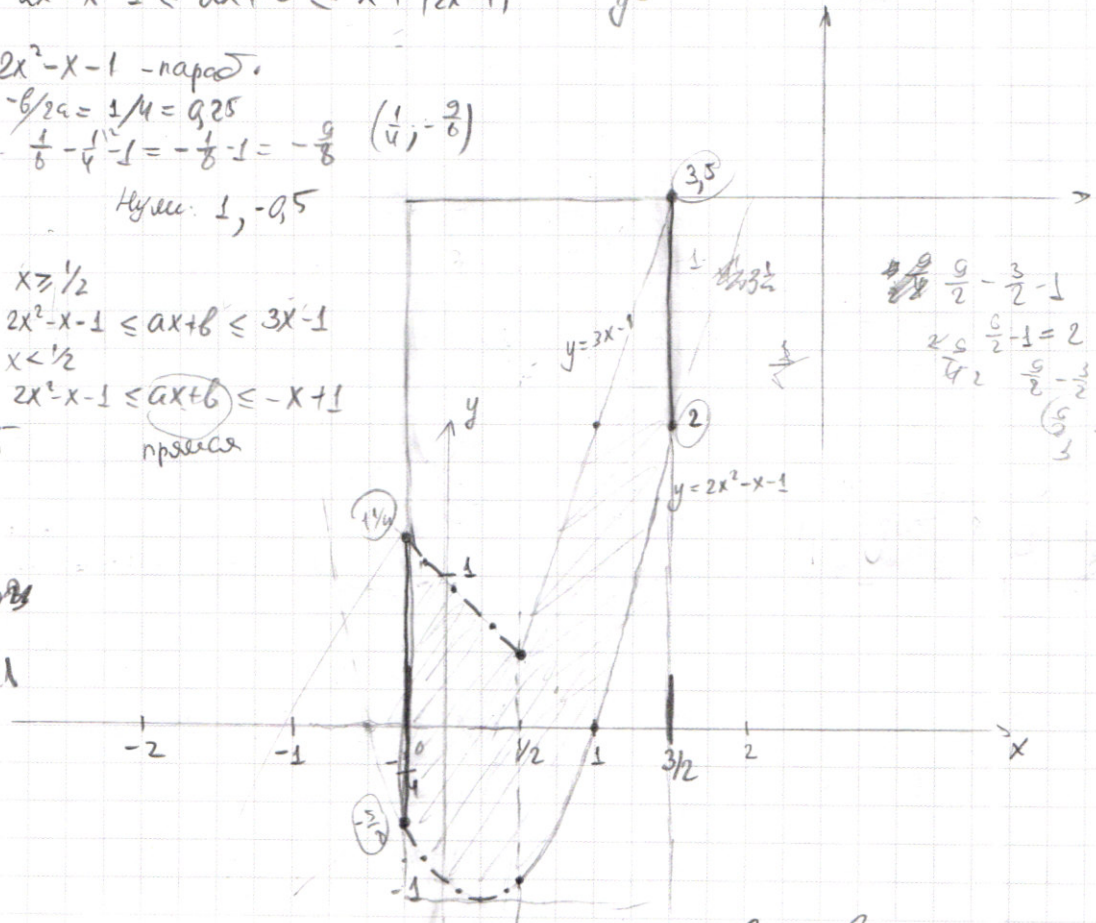
$ax^2 + 2bx + c = 0$
 $ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$
 $a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$
 $a \neq 0 \Rightarrow x^2 + 2qx + q^2 = 0$ $x^2 + 2 \cdot x \cdot q + q^2 = 0$
 $(x+q)^2 = 0$
 $x+q = 0$
 $x = -q$

N=6 $2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$ $y =$

$y = 2x^2 - x - 1$ - параб.
 $x_b = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4} = 0,25$
 $y_c = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{8} - 1 = -\frac{9}{8}$ $(\frac{1}{4}, -\frac{9}{8})$
 Нули: 1, -0,5

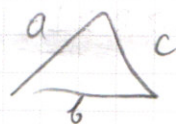
$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ 2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq 3x - 1 \\ x < 1/2 \\ 2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq -x + 1 \end{cases}$
 правая

$\frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = 5,5$



~~1000~~
~~1000~~
 600

N=2 $P = 1200$



$a, b, c \in \mathbb{N}$
 b - max
 $b < 3c$
 $b + 3c = 1200 \Rightarrow b = 1200 - 3c$
 $2c$ - max
 $2c < b + c$
 $b + 3c = 1200$
 $c < b$

$1200 < 6c \Rightarrow c > 200$
 $1200 - 3c < 3c \Rightarrow 1200 < 6c \Rightarrow c > 200$
 $600 < 3c \Rightarrow c > 200$
 $3c = 1200 - b$
 $3c > 600$
 $c > 200$
 $201 \ 603$



$\begin{cases} a < b + c \\ a + b + c = 1200 \end{cases}$

$a = 2c$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)