МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

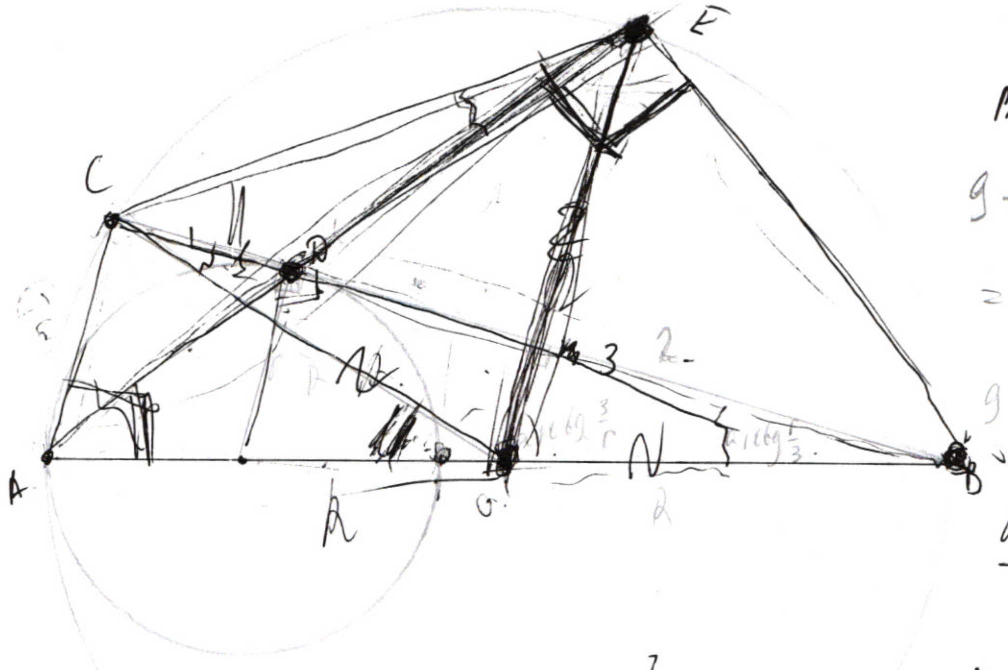
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.



BD^2

$9 = 2(R-r) \cdot 2R =$

$= 4R(R-r)$

$9 = (2R-r)^2 - r^2 =$

$\sin\alpha \sin\beta =$

$\frac{abc}{4R} =$

$(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)^2 =$

$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta - 1 - \frac{4}{7} =$

$\sin 2\alpha \cos 2\alpha$

$\frac{1}{8}R^2\left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(180 - \alpha - \beta)\right) =$

$= \left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta)\right)($

$16 \times 16 =$

$= 160 + 60 + 36 =$

$= 220 + 36 = 256$

$256 - 16 \cdot 7 = 16 \cdot 9$

R $\quad \frac{9}{7}$ $\quad 2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4}$

$(3R - 4r)(3R + 4r)$

$(7R - 2r)(R - 2r) =$

$\frac{16 \pm 12}{14} = \frac{8 \pm 6}{14}$ $\quad 1$ $\quad \frac{1}{7}$

$= \quad \frac{3}{2} \quad 4 \quad 2$

$9 = 4 \cdot \frac{9}{2} - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2\cdot 2} =$

$9 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(+\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} - 1 =$

$= 18 - 9$

$-\frac{5}{8} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} -$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{5}{8}$

$\frac{36}{32} = \frac{9}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$36 = 9 \cdot \frac{9}{2} - 4 \cdot \frac{9}{8} =$

$\frac{3}{4}$

$= 9\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right) = 9 \cdot \frac{8}{2} = 36.$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 =$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$= \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $\quad y = \frac{3}{2}a - \frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть q - знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $b = aq$, $c = aq^2$, четвертый член равен aq^3.

Тогда данное в условии ур-е принимает вид

~~$ax^2 + 2aqx$~~ $ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ x^2 + 2qx + q^2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ (x+q)^2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} a = 0 & (1) \\ x = -q. & (2) \end{array}\right.$$

(1) Если $a = 0$, то $c = aq^2 = 0$. $\boxed{c = 0}$

(2) ~~[illegible]~~

В этом случае $a \neq 0$.

x - единственный корень ур-я, т.е. это четвертый член прогрессии, т.е.

$$\begin{cases} x = aq^3 \\ x = -q \end{cases} \Rightarrow aq^3 = -q \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} q = 0 & (3) \\ aq^2 = -1. & (4). \end{array}\right.$$

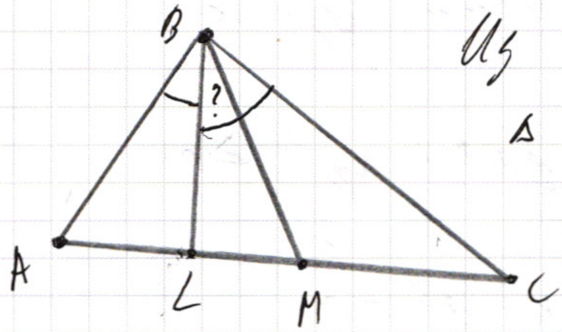
(3) В этом случае $q=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = aq^2 = 0$. $\boxed{c=0}$

(4) $aq^2 = -1 \Rightarrow \boxed{c=-1.}$ Ответ: 0 или -1.

Задача 2.

Медиана и биссектриса о которых идет речь не могут ~~так~~ исходить из одной вершины:



Из угла B произвольного $\triangle ABC$ проведем бис-су BL и медиану BM.

Не ограничивая об-ти, будем считать, что $M \in [LC]$. Тогда ~~$\angle$~~ $\angle LBM \le \angle LBC$, который ~~~~ равен половине $\angle ABC$, а $\angle ABC < 180°$ (как угол $\triangle$-ка), т.е. $\angle LBM \le \angle LBC = \frac{\angle ABC}{2} < \frac{180°}{2} = 90° \Rightarrow \angle LBM < 90°$, т.е. медиана и бис-са из одной вершины не могут быть перпенд-ны.

Итак, пусть исходящая бис-са $\angle B$ BL и медиана к стороне BC — AM $\triangle$-ка ABC.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

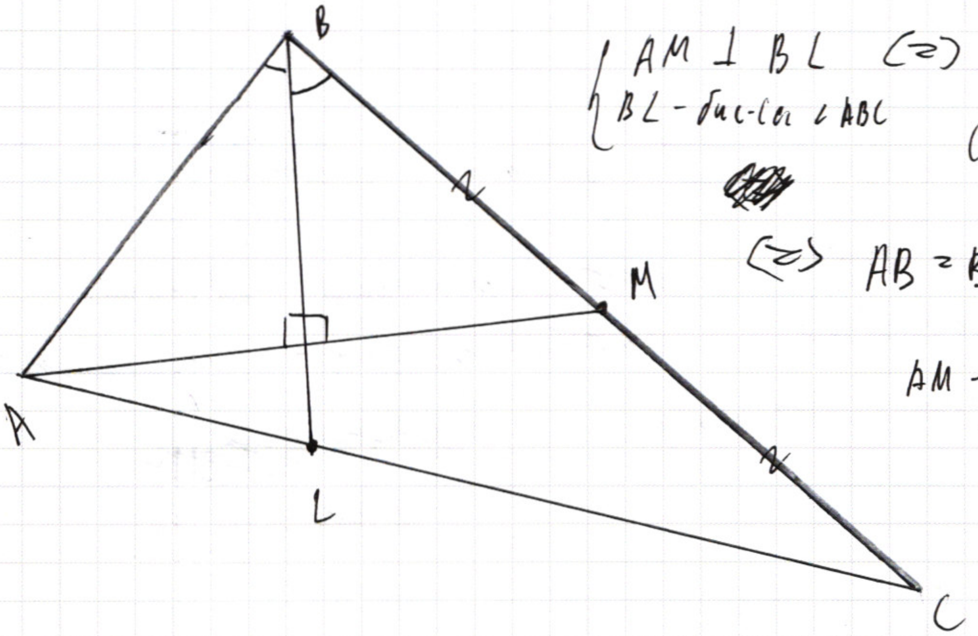
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Покажем, что $AM \perp BL \Leftrightarrow 2AB = BC$.



$\begin{cases} AM \perp BL \\ BL \text{ - бис-са } \angle ABC \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABM$ - равнобедр. с верш. B (бис-са совпадает с высотой).

$\Leftrightarrow AB = BM \Leftrightarrow 2AB = BC$

AM - медиана $\triangle ABC \Rightarrow BM = MC$.
$2BC = 2BM$

То есть нам нужно найти количество $\triangle$ с периметром 1200 и целочисленными сторонами у которых одна сторона в два раза длиннее другой (это равносильно перпендикулярности медианы и биссектрисы).

То есть нужно найти все такие $x \in \mathbb{N}$, что $\triangle$ со сторонами x, $2x$, $(1200-3x)$ существует.

Это равносильно тому, что каждую ~~удовлетворит~~ ~~стороны~~ ~~верно~~ для этих трех величин выполнено неравенство $\triangle$-ка

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

То есть $\begin{cases} x < 2x + (1200 - 3x) \\ 2x < x + (1200 - 3x) \\ (1200 - 3x) < x + 2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 1200 \\ 4x < 1200 \\ 6x > 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 600 \\ x < 300 \\ x > 200 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (200; 300).$

Натуральных чисел в данном промежутке $(300 - 200 - 1) = 99$. А каждому такому числу однозначно соответствует искомый Δ-к (a Δ-ку - число).

~~Ответ: 100.~~

Ответ: 99.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

Введем замену.

Пусть $a = x-1$, а $b = y-2$.

Тогда $b-2a = y-2-2x+2 = y-2,$

$ab = (x-1)(y-2) = xy-2x-y+2,$

$2a^2+b^2-3 =$
$= 2(x-1)^2+(y-2)^2-3 = 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3 =$

$= 2x^2+y^2-4x-4y+3.$

В силу вышесказанного системе, данная в условии равносильна системе

$$\begin{cases} b-2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ b^2+4a^2-4ab = ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4a^2-5ab+b^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ b\geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4a-b)(a-b)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \\ b \geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ 4a=b \end{array}\right. \\ 2a^2+b^2=3 \\ b\geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ 3a^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ 18a^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ b \geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a, \\ a^2=\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right. \\ b\geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b=1 \\ a=b=-1 \\ \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt6} \\ b=\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt6} \\ b=-\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right. \\ b \geq 2a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=-1 \\ \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt6} \\ b=\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right.$$

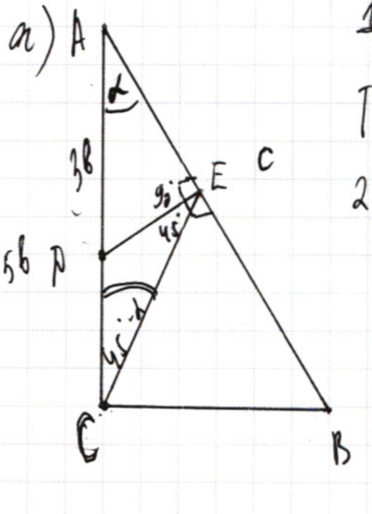
Поскольку $x = a+1$, а $y = b+2$,

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt6}+1 \\ y=\frac{4}{\sqrt6}+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt6}+1; \frac{4}{\sqrt6}+2\right)$.

Задача 4.

а)



1. Пусть $AC = 5b$, а $AB = c$.

Тогда $AD = 3b$.

2. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\cos\alpha = \frac{5b}{c}$.

3. $DE \perp AB \Rightarrow \angle AED = 90^\circ$.

4. $\begin{cases} \angle AED = 90^\circ = \angle ACB \\ \angle DAE = \alpha = \angle BAC \end{cases} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{3b} = \frac{5b}{c} \Rightarrow AE = \frac{15b^2}{c}$.

5. $\angle AEC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

По сумме углов $\triangle AEC$: $\angle ACE = 45^\circ - \alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. По теореме синусов в $\triangle AEC$:

$\frac{AC}{\sin\angle AEC} = \frac{AE}{\sin\angle ACE}$, т.е.

$\frac{5b}{\sin 135^\circ} = \frac{\frac{15b^2}{c}}{\sin(45^\circ-\alpha)}$

$\sin(45^\circ-\alpha) = \frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

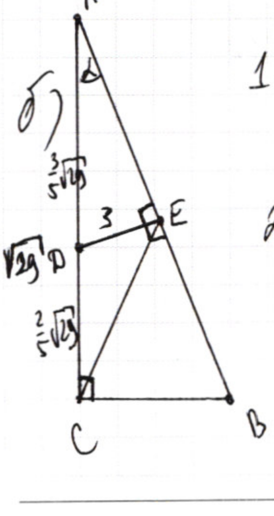
$\frac{5b}{\frac{1}{\sqrt2}} = \frac{\frac{15b^2}{c}}{\frac{1}{\sqrt2}(\cos\alpha-\sin\alpha)}$

$1 = \frac{3b}{c(\cos\alpha-\sin\alpha)}$

$\begin{cases}\cos\alpha-\sin\alpha = \frac{3b}{c} \\ \cos\alpha = \frac{5b}{c}\end{cases} \Rightarrow \cos\alpha-\sin\alpha = \frac{3}{5}\cos\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{5}\cos\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = \frac{2}{5}}$

Ответ: $\frac{2}{5}$.



1. $AC = \sqrt{29} \Rightarrow \begin{cases}AD = \frac{3}{5}\sqrt{29} \\ DC = \frac{2}{5}\sqrt{29}\end{cases}$

2. $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$

$\sin^2_\alpha + \cos^2_\alpha = 1 \Rightarrow tg^2_\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ ($\cos^2\alpha \neq 0$, т.к. $\alpha < 90$) $\Rightarrow \frac{1}{\cos^2\angle BAC} = \frac{4}{25}+1 = \frac{29}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos^2\angle BAC = \frac{25}{29} \\ \angle BAC < 90^\circ \text{ (как угол в прямоуг. } \triangle\text{-ке)}\end{cases} \Rightarrow \cos\angle BAC = \frac{5}{\sqrt{29}}$.

~~$2.\ DE = AD \cdot \cos\angle BAC = \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}$~~

3\. $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC \Rightarrow$ ~~$tg\angle ABC$~~

$ctg\angle ABC = tg\angle BAC = \frac{2}{5}.$

4\. По сумме углов четырехугольника CDEB:

$\angle CDE = 180^\circ - \angle ABC \Rightarrow ctg\angle CDE = ctg\angle ABC = \frac{2}{5}.$

$ctg^2\angle CDE + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle CDE}$ ($\sin^2\angle CDE \neq 0$, т.к. $\angle CDE \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^2\angle CDE} = \frac{29}{25} \\ \angle CDE < 180^\circ \end{cases} \Rightarrow \sin\angle CDE = \frac{5}{\sqrt{29}}.$$

~~6. Площадь $\triangle CED$ равна $\frac{CD \cdot DE \cdot \sin\angle CDE}{2} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot 3 \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3.$ Ответ: 3.~~

5\. $\sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC} = \sqrt{1-\frac{25}{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\angle BAC < 180^\circ$

6\. $DE = AD \cdot \sin\alpha = \frac{3}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}.$

7\. Площадь $\triangle CED$ равна $\frac{CD \cdot ED \cdot \sin\angle CDE}{2} =$

$= \frac{\frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}}{2} = \frac{6}{5}.$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 2x$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + y - 2 = 0$

$\frac{5^2}{\sqrt{29}} + \frac{2^2}{\sqrt{29}}$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$(x-1)\ (y-2)$

$b - 2a = y - 2 - 2x + 2 = y - 2x$

$4a = b$

$16a^2 = b^2$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

$\frac{2}{3}$

$-\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ $= -\frac{1}{4}$

$12a^2 = 3$

$8y = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} + 2$

$6a^2 = 1$

$a^2 = \frac{1}{6}$

$(4a - b)(a - b)$

$2 = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + 1$

$a = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$y - 2x = \frac{2}{\sqrt{6}}$

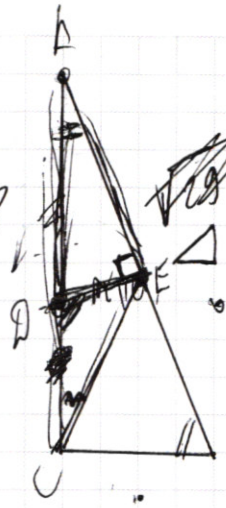
$1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$

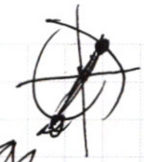
$-\frac{2}{\sqrt{6}}$

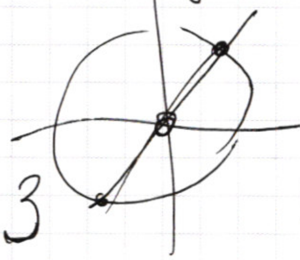
$\frac{29}{25} = \frac{1}{\cos^2}$

$-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ $-\frac{9}{\sqrt{6}} + \frac{2}{3}$ $-\frac{3}{\sqrt{6}} - \frac{6}{\sqrt{6}} + \frac{4}{6}$ $2 - \frac{4}{\sqrt{6}}$

$\frac{4}{25} + 1 = \frac{1}{\cos^2}$ $\boxed{\cos = \frac{5}{\sqrt{29}}}$







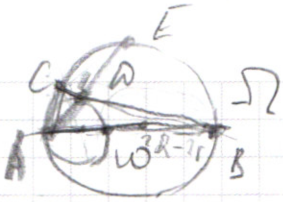
☑ черновик ☐ чистовик

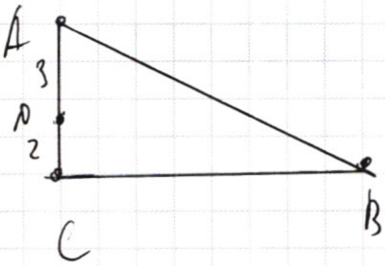
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4}{\sqrt{6}}+2-\frac{2}{\sqrt{6}}-2=\frac{2}{\sqrt{6}}$





$(2x-1)(x+1)$

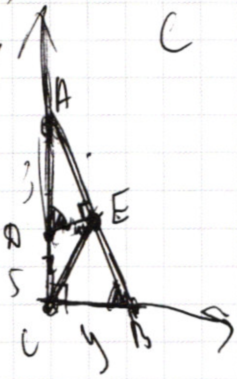
$(2x+1)(x-1)$

$xy=\frac{4}{6}+\frac{6}{\sqrt{6}}+2$

$-2x=-\frac{2}{\sqrt{6}}-2$

$-y=-\frac{4}{\sqrt{6}}-2$

$+2$



$x=-\frac{1}{2}$

$x=1$

$\sin(45-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \quad 3\cdot\frac{1}{2}-1$

$2\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$

$\cancel{2}\left(\frac{1}{6}+1+\frac{2}{\sqrt{6}}\right)+\left(\frac{16}{6}+4+\frac{16}{\sqrt{6}}\right)-\frac{4}{\sqrt{6}}-4$

$-\frac{16}{\sqrt{6}}-8+3$

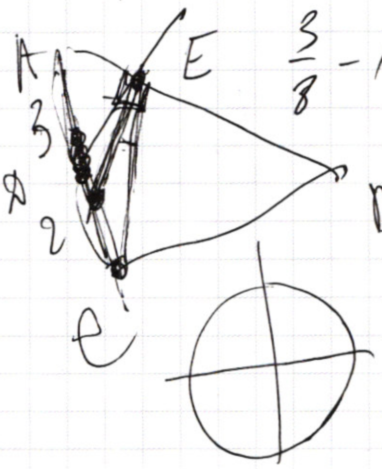
$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1 \quad \frac{3}{4}$

$=\frac{1}{3}+2+\frac{16}{3}+4-12$

$2\cdot\ +\frac{1}{4}-1$

$3+3$

$\frac{3}{8}-1$



$2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=$

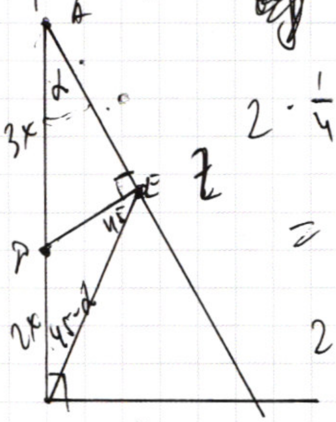
$2\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}-1=$

$=\frac{9}{8}-\frac{6}{8}-\frac{8}{8}=$

$=-\frac{5}{8}$

$-\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{4}$



$\frac{8x}{7}=\frac{AE}{3x}$

$AE=\frac{28x^2}{7}$

$\frac{8x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{28x^2}{7\sin\alpha}$

$2\sqrt{2}=\frac{7x}{7\sin\alpha}$

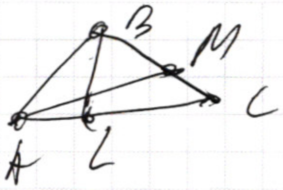
$\sin\alpha=\frac{7}{2\sqrt{2}}\cos\alpha$

$\sin\alpha=\frac{7x}{2\sqrt{2}\,7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

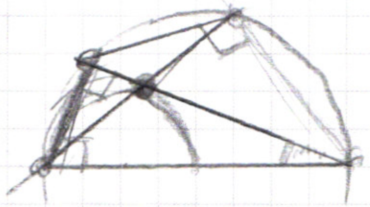
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$ - норм

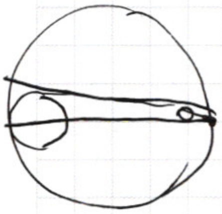


$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$

$a = 0$?



$x^2 + 2qx + q^2 = 0$



$(x+q)^2 = 0$

$x = -q$

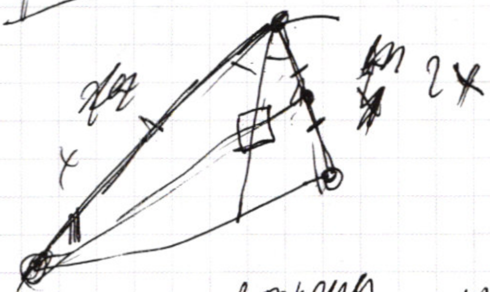
$aq^3 = -q$ $\quad \boxed{q = 0}$

~~$a = -q^2$~~ $\quad q = 0$

~~a отриц~~

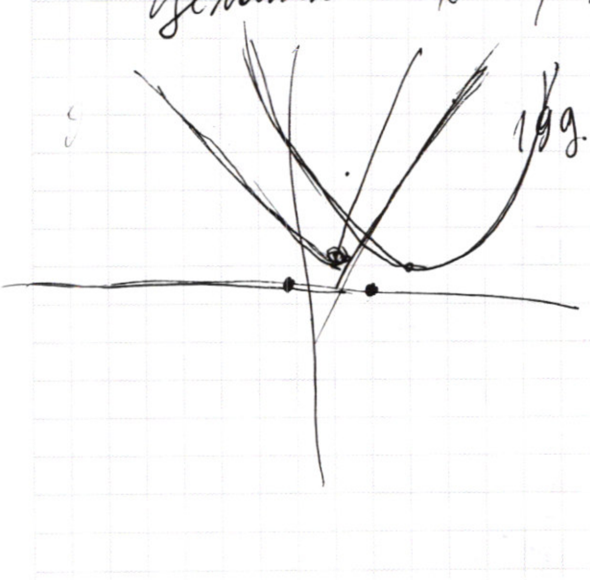
$aq^2 = -1$

$\boxed{b = -1}$



сторона меньше, чем 600 $\quad a = -\frac{1}{q^2}$

Целочисл x, такие, что $3x > 600$



$x > \frac{1}{2}$

$3x - 1$

$x \geq \frac{1}{2}$

$-x+1$

$x > 200,$

$3x < 1200$

$x < 400$

$x + (1200 - 3x) > 2x$

$1200 > 4x$

$300 > x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c \quad (d)$

$a,\ a+d,\ a+2d$

$\frac{4}{6} + \frac{6}{\sqrt{6}} + 2 - \frac{2}{\sqrt{6}} - 1 - \frac{4}{\sqrt{6}} \cancel{-2+2}$

$\frac{4}{\sqrt{6}} + 1 = \frac{10}{6}$

$ax^2 + 2(a+d)x + (a+2d) = 0$

$a+d - ?$

$D = 4(a^2+2da+d^2) - 4a^2 - 8ad =$

$= 4(-a^2 - 2ad + d^2)$

$$x = \frac{-2(a+d) \pm 2\sqrt{-a^2-2ad+d^2}}{2a}$$

$2a(a+3d) = -2(a+d) \pm 2\sqrt{-a^2-2ad+d^2}$

$a^2 + 3ad + a + d = \pm\sqrt{-a^2+2ad+d^2}$

$a^4 + 9a^2d^2 + a^2 + d^2 = -a^2 - 2ad + d^2$

$\frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}}$ ✓

$\frac{4}{\sqrt{6}} + 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{6}} + 1$

$\frac{2}{6} + \frac{16}{6} = \frac{18}{6}$

$\frac{2}{\sqrt{6}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

8. Пусть M – середина $[BC]$ $\Rightarrow BM = \frac{1}{2}BC = 2$

$O_1B = O_1C$ как радиусы $\Rightarrow \triangle O_1BC$ – равнобед. с вершиной в O_1 $\Rightarrow$ мед. и высота $\triangle O_1BC$ из O_1 совпадают $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} O_1M \perp BM \\ BM = 2 \\ BO_1 = R \end{array}\right| \Rightarrow \cos\angle OBA = \frac{2}{R}.$$

9.
$$\left.\begin{array}{l} tg^2\angle OBA + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\angle OBA} \\ tg\angle OBA = \dfrac{r}{3} \\ \cos\angle OBA = \dfrac{2}{R} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{r^2}{9} + 1 = \frac{R^2}{4} \Rightarrow 9R^2 - 4r^2 - 36 = 0.$$

10. Из 5 и 9:

$$\begin{cases} 9 = 4R^2 - 4Rr \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = 16R^2 - 16Rr \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 7R^2 - 16Rr + 4r^2 \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

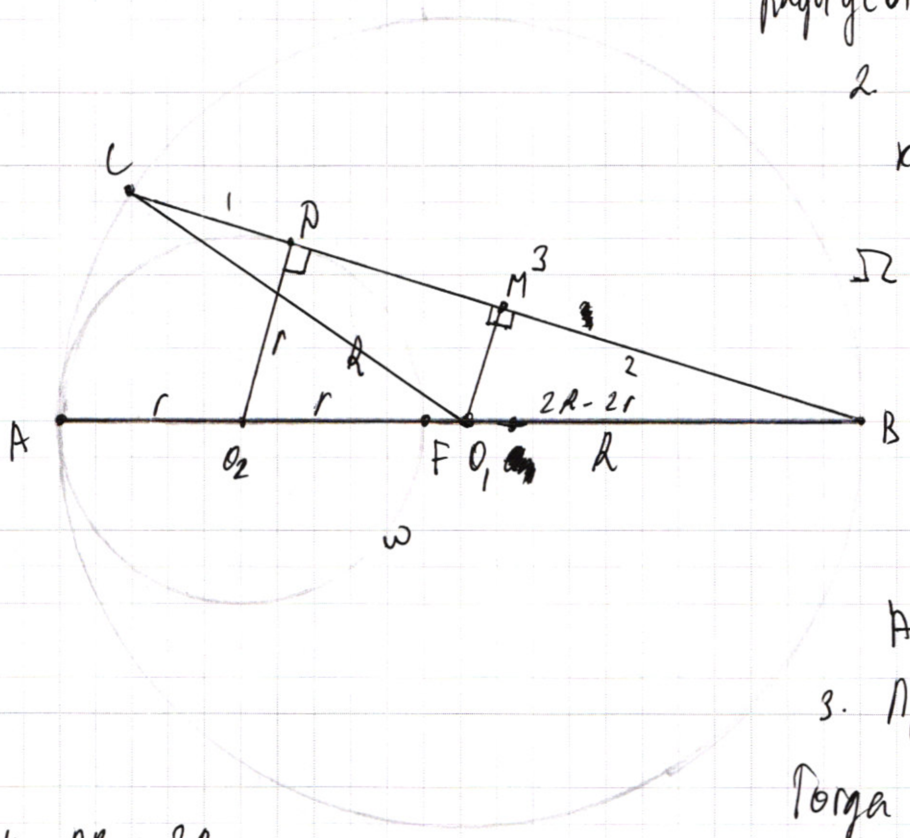
$$\begin{cases} (7R - 2r)(R - 2r) = 0 \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} R = 2r \\ R = \frac{2}{7}r \end{array}\right. \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \overset{R > r}{\Leftrightarrow} \begin{cases} R = 2r \\ 36 = 9R^2 - 4r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 2r \\ 36 = 36r^2 - 4r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36 = 32r^2 \\ R = 2r \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = \frac{9}{8} \\ R = 2r \end{cases} \overset{r > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ R = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}. \qquad \boxed{\begin{array}{l} R = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{array}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1. Пусть R и r – радиусы Ω и ω.

2. Ω и ω касаются в A ⇒ ⇒ A лежит на общем диаметре ⇒ AB - общий диаметр ⇒ ⇒ центр ω на AB.

3. Пусть $AB \cap \omega = F \neq A$. Тогда AF - диаметр ω.

4. $AB = 2R$
$AF = 2r$.

5. По теореме о касательной и секущей:
$BD^2 = BF \cdot BA \Rightarrow 9 = 2(R-r) \cdot 2R = 4R(R-r)$.

6. Пусть O_1 и O_2 – центры Ω и ω.

7. $O_2D \perp BD$ как касат. и радиус
$O_2D = r$
$BD = 3$
$\Rightarrow tg \angle DBA = \frac{r}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

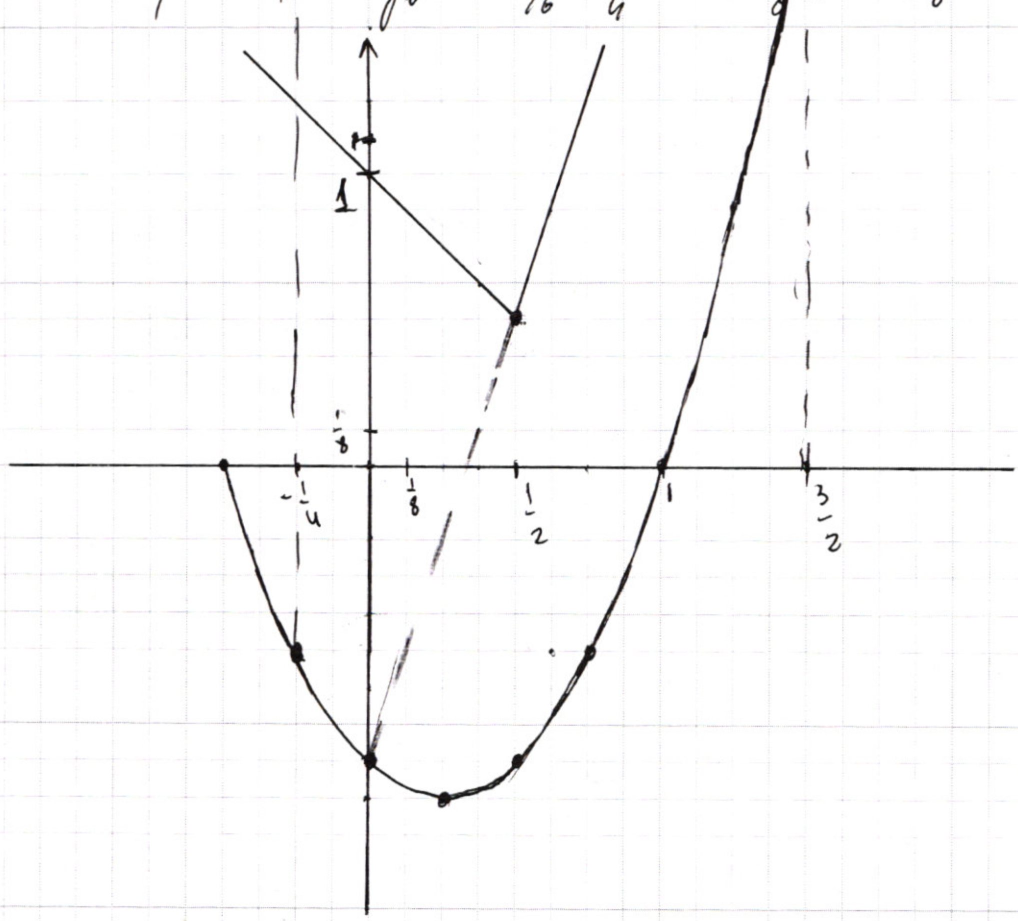
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6.

Решим графически.

$y=2x^2-x-1$ – парабола с вершиной в точке $\left(\frac{1}{4}; -1\frac{1}{8}\right)$.

$x_в = -\frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$ $\quad y_в = 2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1 = -\frac{1}{8}-1 = -1\frac{1}{8}$



Изобразим параболу на интересующем нас интервале.

$y = x + |2x-1|$

I $x \geq \frac{1}{2}$

$y = x + 2x - 1 = 3x - 1$

II $x < \frac{1}{2}$

$y = -x + 1$

Такие изобразим на чертеже.

Заметим, что точки $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ лежат на одной прямой?

Прямая $y = ax + b$ по неравенству в заданном интервале должна лежать не ниже параболы, то есть не ниже прямой через точки $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ (это точки параболы), но она должна лежать и не выше „галки" из двух прямых, но прямая через точки $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ проходит через точку „галки" $x + |2x-1|$ $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, а если $ax + b$ будет выше неё, то неравенство не будет соблюдаться, так что

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Единственная возможная прямая — прямая через 3 описанные точки.

$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

несложно убедиться подстановкой, что точки на ней лежат.

А это прямая $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$, т.е.

$a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)