МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 11

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Больший корень уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 6$, $AN = 12$, а $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{4}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = 3\sqrt{3}$, $BM = \sqrt{6}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$-\frac{10x + 10}{5x + 6} \leqslant ax + b \leqslant 5x + 2 + |10x + 6|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-1; -\frac{2}{5}\right]$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1. $k = b - a$, т.е. $b = a + k$; $c = a + 2k$.

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4b^2 - 4(b-k)(b+k) = 4(b^2 - (b^2 - k^2)) = 4k^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4k^2}}{2a}$$

из того, что $c < 0 < a$ и $c = a + 2k$ следует, что $k < 0 \Rightarrow \sqrt{4k^2} = -2k$

$-2k > 0 \Rightarrow 2b + \sqrt{4k^2} > 2b - \sqrt{4k^2}$, поэтому наиб. корень этого ур-ния $= \dfrac{2b - 2k}{2a} = \dfrac{b-k}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$, что яв-тся 4-м членом прогрессии.

Ответ: 1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1 $\cancel{a}\ b = a+k$ $c = a+2k$

$k<0$

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac$

$$x_2 = \frac{2b+2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{2(a+k)+\sqrt{(a+k)^2-a(a+2k)}}{2a} =$$

$$= \frac{2a+2k+\sqrt{a^2+2ak+k^2-a^2-2ak}}{2a} = \frac{2a+2k+\sqrt{k^2}}{2a} = \frac{2a+k}{2a} =$$

$$= \cancel{1} + \frac{k}{2a} = a+3k.$$

$$\frac{2a+k}{2a} = a+3k$$

$$2a+k = 2a^2+6ak.$$

$$2a+k = a(2a+6k)$$

$$2a(a+3k) = 2a+k.$$

$$2a-2a^2 = 6ak-k$$

$$2a(a-1) = k(6a-1)$$

$$k = \frac{2a(a-1)}{6a-1} = \frac{2a^2-2a}{6a-1}.$$

$$a+3k = a + \frac{6a^2-6a}{6a-1} = a\left(1+\frac{6a-6}{6a-1}\right) =$$

$$= a\left(\frac{12a-7}{6a-1}\right)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 $\begin{cases} x-\sqrt[3]{y^2-x^2}=17 \\ y-\sqrt[3]{y^2-x^2}=-10 \end{cases} \Rightarrow \left(x-\sqrt[3]{y^2-x^2}\right)-\left(y-\sqrt[3]{y^2-x^2}\right)=17-(-10)=27 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y=27 \Rightarrow y-x=-3^3$

$\begin{cases} x-\sqrt[3]{(y-x)(x+y)}=17 \\ y-\sqrt{(y-x)(x+y)}=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-\sqrt[3]{(-27)(x+y)}=17 \\ y-\sqrt[3]{(-3^3)(x+y)}=-10 \end{cases} \Rightarrow$

$x+y+6\sqrt[3]{x+y}=7. \Rightarrow x+y>0 \Rightarrow \sqrt[3]{x+y}>0$

$t=\sqrt[3]{x+y}$

$t^3+6t=7$

$t(t^2+6)=7$

~~функция~~ $t(t^2+6)=7$ на участке $t\in[0;+\infty)$

монотонно возрастает $\Rightarrow$ сущ-вует только 1 корень $\Rightarrow$

$t=1;\ \sqrt[3]{x+y}=1 \Rightarrow x+y=1$

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=27 \end{cases} \Rightarrow 2x=28 \Rightarrow$ $x=14 \Rightarrow y=-13$

Ответ: $(14;-13)$

~~Комментарий: факт того, что $\sqrt[3]{x+y}=1$ можно вывести по-другому: Зная, что $x-y=3^3$ подставляем это в условие~~

~~$x-\sqrt[3]{3^3(x+y)}$~~

№2 $\begin{cases} x-\sqrt[3]{y^2-x^2}=17 \\ y-\sqrt[3]{y^2-x^2}=-10 \end{cases}$ $\Rightarrow \left(x-\sqrt[3]{y^2-x^2}\right)-\left(y-\sqrt[3]{y^2-x^2}\right)=17-(-10)=27$

$\Rightarrow \quad x-y=27$

$x=y+27$

$y-\sqrt[3]{y^2-(y+27)^2}=-10$

$y-\sqrt[3]{y^2-y^2-54y-729}=-10$

$y-\sqrt[3]{-27(2y+27)}=-10$

$-(10+y)=-\sqrt[3]{-27(2y+27)}$

$10+y=-3\sqrt[3]{2y+3^3}$

$\cancel{100+20y+y^2=9(2y}$

$1000+y^3+300y+30y^2=-27(2y+27)$

$y^3+30y^2+300y+1000=-729-54y$

$y^3+30y^2+354y+1729=0$

$\cancel{y^3+3(10y^2+118y+}$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ +\ 999 \\ +\ 99 \\ \hline 10097 \end{array}$$

$x+y-6\sqrt[3]{x+y}=7$

$\sqrt[3]{(x+y)}=t$

$t^3-6t=7.$

$t(t^2+6)=7.$

$t\uparrow\uparrow t^2-6\Rightarrow t>0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3. Остаток от деления числа n на 10^k равен числу, образованному из k последних цифр n

Из этого, например, следует, что максимальная степень 10, остаток от деления на которую есть смысл рассматривать - это 5-я (т.е. 10^5), т.к. $n \equiv_{10^6} n$; $n > 12345$

Поймём, что остаток от деления на 10^5 обязательно должен быть рассмотрен:

Рассмотрим число 999999 и его остатки от деления на 10^4, 10^3 и 10^2 (макс. степени 10 до пятой), это будут соотв-но числа 9999; 999; 99. Их сумма $= 10000 + 1000 + 100 - 3 = 11100 - 3 = 11097 < 12345$. Очевидно, что указанные остатки от деления - максимально возможные $\Rightarrow$ без ост. от дел. на 10^5 сумма ост. будет всегда < 12345. Значит, 12345 в любом случае должно получаться из суммы ост. от дел. на 10^3, 10^4 и 10^5

Очевидно, что ~~восходящие~~ тогда нужно найти все числа $\overline{abcde}$ такие, что $\overline{abcde} + \overline{bcde} + \overline{cde} = 12345$, т.е. при этом $a, b, c, d, e \in [0; 9]$

$$10^4 a + 2 \cdot 10^3 b + 3 \cdot 10^2 c + 3 \cdot 10 d + 3e = 12345$$

Очевидно, что $e = 5$, т.к. нет другого однозн. числа такого, что оно помнож. на 3 оканч. на 5

$$10^4 a + 2 \cdot 10^3 b + 3 \cdot 10^2 c + 3 \cdot 10 d = 12330$$

$$10^3 a + 2 \cdot 10^2 b + 3 \cdot 10 c + 3d = 1233$$

Отсюда следует, что $d = 1$, т.к. ни одно другое однозн. числа, помн. на 3 не оканч. на 3.

$$1000a + 200b + 30c + 3 = 1233 \Rightarrow$$

$$100a + 20b + 3c = 123.$$

Аналогично $c = 1 \Rightarrow 100a + 20b + 3 = 123 \Rightarrow$

$10a + 2b = 12 \Rightarrow$ либо $a = b = 1$, либо $a = 0$; $b = 6$. прод. на след. стр.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Т.е. всего 2 варианта „укомплектовки" 2-й и 3-й цифры в начальном шестизначном числе

Первая еще цифра ~~никак~~ не влияет на конеч. сумму, а значит кол-во цифр на этом месте, удовл. условию = 9 (все ненулевые)

Значит, общее кол-во шестизнач. чисел, удовл. условию =

$2 \cdot 9 = 18$

Ответ: 18.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Пусть m - кол-во чисел $\vdots 3$, $\not\vdots 2$ (далее - числа $\in$ мн-ву M), а n - кол-во чисел $\vdots 2$, $\not\vdots 3$ (далее - числа $\in$ мн-ву N) $\Rightarrow$ общее кол-во чисел $= m+n$

Тогда: ~~кол-во~~ тройки, удовл. условию - это, по сути дела наборы либо из 2 элем-тов из мн-ва M и 1 эл-та из мн-ва N, либо из 1 эл-та ~~из~~ мн-ва M и 2 эл-тов из мн-ва N.

Тогда общ. кол-во таких троек =

$= C_1^m \cdot C_2^n + C_2^m \cdot C_1^n = 25.$

$$\frac{m \cdot n(n-1)}{2} + \frac{n \cdot m(m-1)}{2} = 25$$

$$\frac{mn(m+n-2)}{2} = 25$$

$mn(m+n-2) = 50$ - ур-ние в натуральных числах.

$50 = 2 \cdot 5^2$, значит каждый из множителей равен одному из след. чисел: $\{1; 2; 5; 10; 25; 50\}$

Очевидно, что если какое-то значение для m не подходит, то оно не подходит и для n.

$n=1$: $m(m-1) = 50$ $\varnothing$ в натуральных

$n=2$: $2m(m) = 50 \Rightarrow m=5$; ~~Ответ~~ $n=2$, $m=5 \Rightarrow$ Ответ: $n+m=7$.

$n=5$: см. выше.

$n=10$: $10m(m+8) = 50$ $\quad m(m+8) = 5$ $\varnothing$ в натур. ч.

$n=25$: $25m(m+23) = 50$ $\quad m(m+23) = 2$ $\varnothing$ в натур. ч.

$n=50$ $\quad 50m(m+48) = 50$ $\quad m(m+48) = 1$ $\varnothing$ в натур. ч.

Следовательно, единственное реш даст нам $m+n=7 \Rightarrow$
Ответ: 7.

N6 m – кол-во чисел $\vdots 2$ $\not\vdots 3$, n – кол-во чисел $\vdots 3$ $\not\vdots 2$

$$25 = C_3^{(n+m)} - C_3^{n} - C_3^{m} = \frac{(n+m)(n+m-1)(m+n-2) - (n)(n-1)(n-2)}{6}$$

$$m \cdot C_2^{n} + n \cdot C_2^{m} = \frac{m \cdot n(n-1)}{2} + \frac{nm(m-1)}{2} =$$

$$= \cancel{\frac{mn(m-1)}{2}} \; \frac{mn}{2}(n-1+m-1) =$$

$$= \frac{mn(n+m-2)}{2} = 25$$

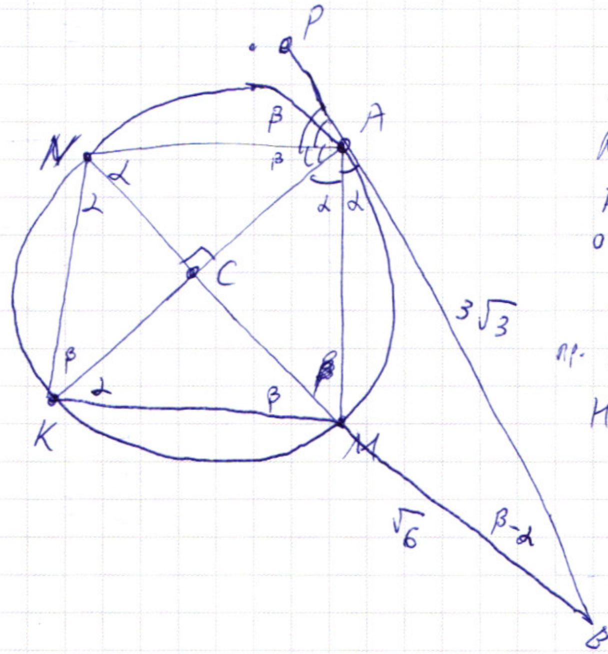
$$mn(n+m-2) = 50 = 2 \cdot 5^2$$

$$n(n-1) \neq 50$$

$$n+m-2 = 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5



Дано: AM - бис-са $\angle CAB$,
AN - бис-са вн. $\angle CAB$
$M, N \in BC$.
AB касается окр-ти опис. вокруг $\triangle ANM$.
$AB = 3\sqrt{3}$, $MB = \sqrt{6}$,
пр. $AC \cap$ окр-ть $AMN = K$.
Найти: $\angle ACB$, R, S_{ANKM}.

Решение: Отметим на продолжении BA за т. A точку P (для удобства) - см. рис.

Пусть $\angle PAC = 2\beta$; $\angle CAB = 2\alpha$, тогда $2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ$

Заметим, что $\angle NAM = \angle NAC + \angle CAM = \alpha+\beta = 90^\circ \Rightarrow NM$ - диаметр.

Также заметим, что AM отсекает дугу $\overset{\frown}{AM} = \alpha$ в силу того, что A - т. ~~пересечения~~ касания BA (с окр. AMN). $\Rightarrow$

$\angle ANM = \alpha$ (впис. угол опир-ся на дугу $= \alpha$)

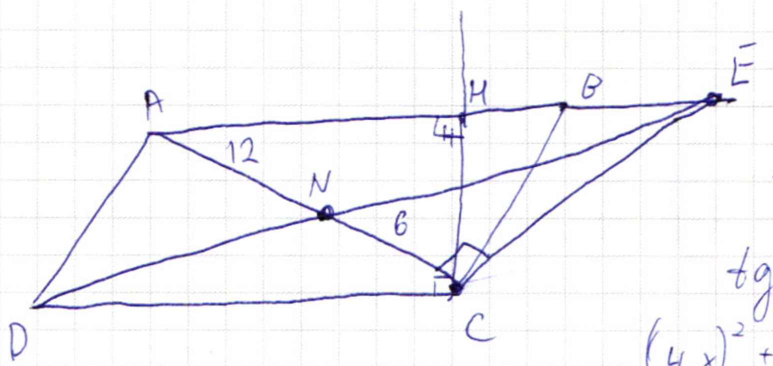
$\angle AMN = 180^\circ - \angle NAM - \angle MNA = 2(\alpha+\beta) - (\alpha+\beta) - \alpha = \beta$.

Рассмотрим $\triangle ANC$. $\angle ACN = 180 - \angle NAC - \angle CNA =$
$90 + (\alpha+\beta) - \cancel{\beta} - \alpha = 90^\circ$; $\angle ACN = \angle ACB = 90^\circ$

$AK \perp NM$, NM - диаметр $\Rightarrow AC = AK$

$\angle KNM = \angle KAM = \alpha$, $\angle NMK = \angle NAK = \beta$ — пары углов, опир. на одну дугу.

См. след. стр.



$tg(\frac{1}{2}ADC) = \frac{4}{5} \Rightarrow$

$tg(ADC) =$

$(4x)^2 + (5x)^2 = 1$

$16x^2 + 25x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{41}}$

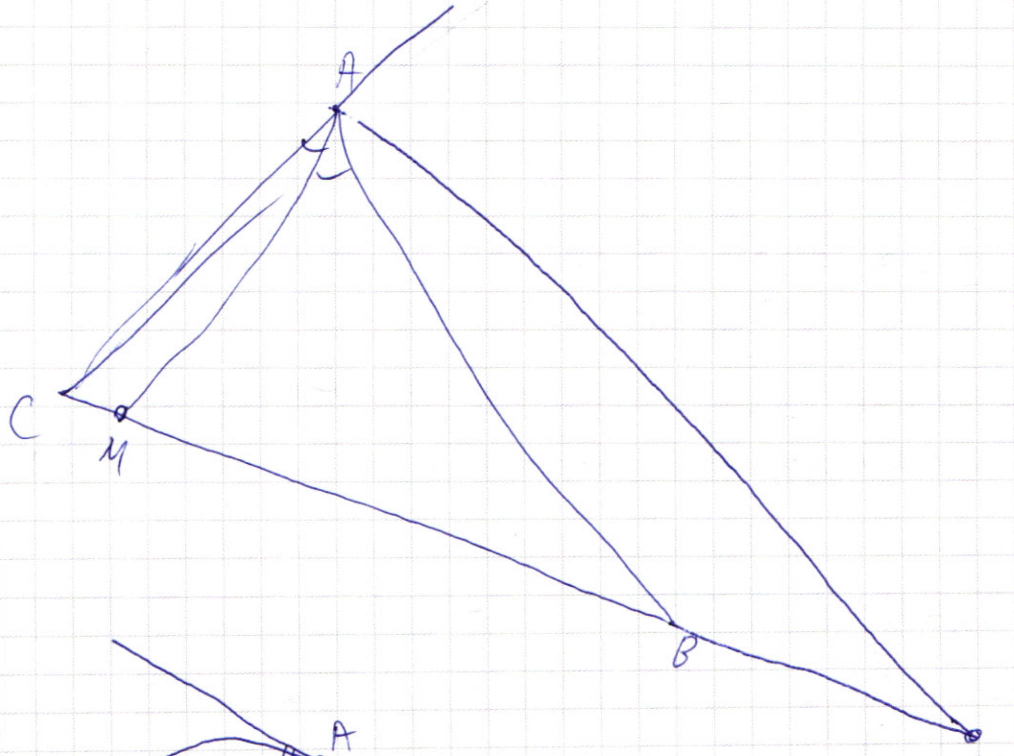
$\frac{18}{AH}$

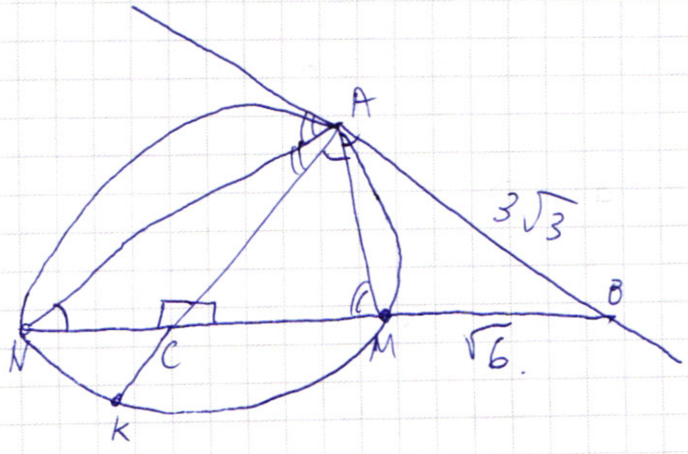
$\sin(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{16}{41}}$

$\cos(\frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{25}{41}}$

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\,\frac{20}{41} = \frac{40}{41}$

$\cos\alpha = \cancel{\sqrt{[illegible]}} = \frac{9}{41}$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $\triangle NKM = \triangle AMN$ по 2-м равн. углам и 1 общ. стороне $(MN) \Rightarrow$

$S_{KNAM} = 2S_{\triangle AMN} = \frac{2R \cdot AC}{2} \cdot 2 = 2R \cdot AC$

По св-вам т. вне окр-ти: $AB^2 = MB \cdot NB$

$27 = \sqrt{6}\,(MN + \sqrt{6})$

$6 + MN\sqrt{6} = 27$

$MN\sqrt{6} = 21$

$MN = \frac{21\sqrt{6}}{6} = \frac{7\sqrt{6}}{2}$

$MN = 2R \Rightarrow R = \frac{7\sqrt{6}}{4}$

$\sin\beta = \frac{AC}{AM}$; $\sin\alpha = \frac{BC}{AM}$ $\sin(\beta-\alpha) = \frac{3\sqrt{3}}{AC}$
$\shortparallel$ $\cos\alpha$; $\shortparallel$ $\cos\beta$

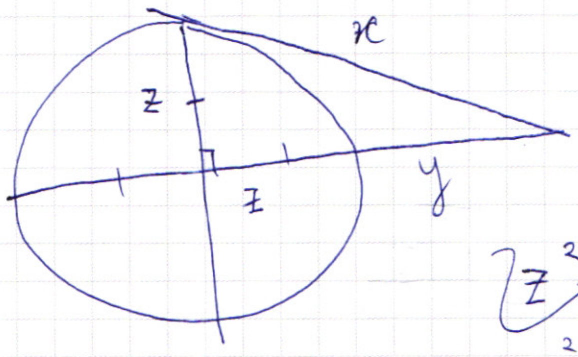
$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{AC}{AM}\cdot\frac{BC}{AM} - \frac{BC}{AM}\cdot\frac{AC}{AM}$$

$(d+\sqrt{6})\sqrt{6} = 27$ $\qquad d\sqrt{6} = 27.$

$d\sqrt{6} + 6 = 27$

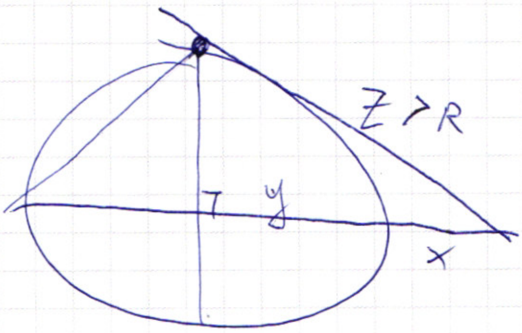
$d\sqrt{6} = 21$ $\qquad d = \frac{21\sqrt{6}}{6} = \frac{7\sqrt{6}}{2}.$

$r = \frac{7\sqrt{6}}{4}$



$\cancel{z^2+z^2} + 2zy + z^2 = x^2$

$x^2 = y^2 +$



$\frac{AM}{\sin\alpha} = NM.$

$\sin\alpha = \frac{MA}{NM}$

$\sqrt{6} + \frac{7}{4}\sqrt{6} = \frac{11}{4}\sqrt{6} = a$

$b = \frac{7}{4}\sqrt{6}$

$6\cdot\frac{49+121}{16} = \frac{170\cdot 6}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)