МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

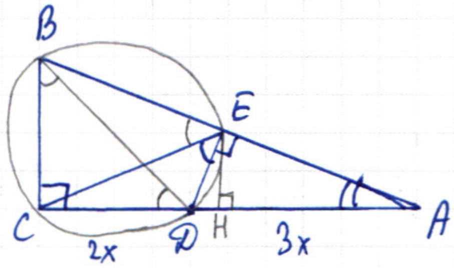
№ 4

а) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$AC = CD + AD$

Пусть $AD = 3x$, $AC = 5x$

$5x = CD + 3x \Rightarrow CD = 2x$



$\angle BED = 180° - \angle AED$
(как смежные)

$\angle BED = 180° - 90° = 90°$

В четырёхугольнике CBED сумма противоположных углов равна 180° ($\angle BCD + \angle BED = 90° + 90° = 180°$).

Значит вокруг CBED можно описать окружность.

$\angle CBD$ и $\angle CED$ опираются на одну хорду и это вписанные углы $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCD$ - равнобедренный, т.к. $\angle CDB = 90° - 45° = 45° \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CD = 2x$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

Ответ: $tg \angle BAC = \frac{2}{5}$

б) $AC = \sqrt{29}$. $AD = \frac{3}{5} \cdot AC = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29}$

$\frac{S_{CED}}{S_{DEA}} = \frac{CD}{DA} = \frac{2}{3}$, т.к. $\triangle CED$ и $\triangle DEA$ имеют общую высоту $EH \perp AD$, $EH \perp CD$.

Для удобства пусть $\angle BAC = A$

$1 + tg^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 + \frac{4}{25} = \frac{29}{25}$

$\cos A = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$

$\sin A = \frac{2}{\sqrt{29}}$

Из $\triangle DEA$:

$\cos A = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \cos A \cdot AD = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} = 3$

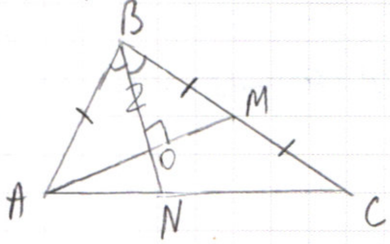
$\sin A = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = \sin A \cdot AD = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{6}{5}$

$S_{\triangle DEA} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

$S_{CED} = \frac{2}{3} \cdot S_{DEA} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5} = 1,2$

Ответ: $S_{CED} = 1,2$

№2



Пусть есть $\triangle ABC$, BN - биссектр.,

AM - медиана, $BN \perp AM$

$\triangle BOM = \triangle BOA$ по стороне и двум прилежащим к ней углам

(BO - общая, $\angle ABO = \angle MBO$, т.к. BO - бисс, $\angle MOB = \angle AOB = 90°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM = BA \Rightarrow AB = \frac{1}{2} \cdot BC$

Пусть $AB = a$, $AC = b$, тогда $BC = 2a$

По условию $a, b \in \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, $a + 2a + b = 1200$

(продолжение на стр. №3)

$3a + b = 1200$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение задачи №2)

неравенства треугольника:

$$\begin{cases} a+b>2a \iff b>a \\ a+2a>b \iff 3a>b \\ 2a+b>a \text{ - верно всегда, т.к. } a \text{ и } b \text{ - натуральные} \end{cases} \iff a<b<3a$$

Крайние невозможные точки $b=a$ и $b=3a$

$3a+a=1200$ $\qquad$ $3a+3a=1200$

$4a=1200$ $\qquad$ $6a=1200$

$a=300$ $\qquad$ $a=200$

$200<a<300$

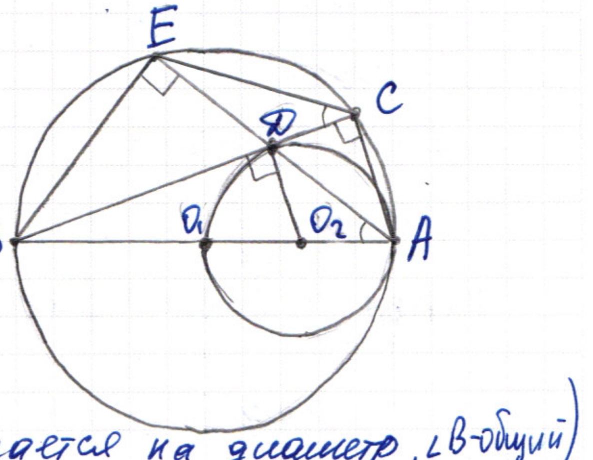
$201 \le a \le 299$

Количество необходимых треугольников совпадает с количеством вариантов значения a.

кол-во $a = 299-201+1=99$

Ответ: 99

№5



O_1 - центр окр. Ω

O_2 - центр окр. ω

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по двум углам ($\angle BDO_2 = 90^\circ$, т.к. O_2D - радиус к касательной, $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр, $\angle B$ - общий).

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{BD}{BC} = \frac{DO_2}{CA} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{3}{4}$ (т.к. $BD = 3$, $BC = BD + CD = 4$)

$BO_2 = BA - r = 2R - r$, где R - радиус окр. Ω

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{3}{4}$ r - радиус окр. ω

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}$; $6R = 8R - 4r$

$4r = 2R$

$R = 2r$, $r = \frac{R}{2}$ => т. O_1 лежит на окр. ω.

$\frac{DO_2}{CA} = \frac{3}{4}$

$DO_2 = r = \frac{1}{2}R$; CA из прямоугольного $\triangle BCA$

$CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - 16} = \sqrt{4(R^2 - 4)} = 2\sqrt{R^2 - 4}$

$\frac{\frac{1}{2}R}{2\sqrt{R^2 - 4}} = \frac{3}{4}$

$6\sqrt{R^2 - 4} = 2R$

$R^2 = 9(R^2 - 4)$

$R^2 = 9R^2 - 36$

$8R^2 = 36$

$R^2 = \frac{9}{2}$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$CA = 2\sqrt{\frac{9 \cdot 2}{4} - 4} = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Из прямоугольного $\triangle ACD$

$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{\triangle BDA} = S_{\triangle BCA} - S_{\triangle ACD} = \overset{2}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

(продолжение на стр. 5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №5)

$\triangle BED \sim \triangle ACD$ по двум углам ($\angle BED = \angle ACD = 90^\circ$ как опирающиеся на диаметр, $\angle CDA = \angle EDB$ как вертикальные) $\Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{AD} = \sqrt{3}$

$\frac{BD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ $\qquad ED = \sqrt{3}\cdot CD = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle BED}}{S_{\triangle ACD}} = (\sqrt{3})^2 = 3$

$S_{\triangle BED} = 3\cdot S_{\triangle ACD} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\triangle CED \sim \triangle ABD$ по двум углам ($\angle DCE = \angle \cancel{B}DAB$ т.к. опираются на одну дугу BE, $\angle EDC = \angle ADB$ как вертикальные) $\Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD} = \frac{EC}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{ED}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{BACE} = S_{\triangle BCA} + S_{\triangle BED} + S_{\triangle CED}$

$S_{BACE} = 2\sqrt{2}^{\,\backslash 2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: радиусы: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

№1

$b_1 = a$ $\quad b_2 = b$ $\quad b_3 = c$ $\quad b_4 = x$ $\quad b_3 - ?$

$b = a\cdot q$ $\quad c = q^2 a$ $\quad x = a\cdot q^3$

$ax^2+2bx+c=0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = a^2q^2 - a\cdot q^2 a = a^2 q^2 - a^2 q^2 = 0$

$x = \frac{-b}{a} = \frac{-a\cdot q}{a} = -q$

$\begin{cases} x=-q \\ x = a\cdot q^3\end{cases}$ $\quad -q = a\cdot q^3 \;|:q$

$a\cdot q^2 = -1$

$b_3 = -1$

Ответ: -1

№6

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$ $\quad x\in\left[-\frac14;\frac32\right]$

Построим графики функций $f(x)=2x^2-x-1$ и $f(x)=x+|2x-1|$

1) $f(x)=2x^2-x-1$ - парабола

$x_в = \frac14$

x	$-\frac14$	1	$\frac32$
y	$-\frac58$	0	2

$y_в = 2\cdot\frac1{16}-\frac14-1 = -1\frac18$

$\left(\frac14; -1\frac18\right)$ - вершина

2) $f(x)=x+|2x-1|$

x	$-\frac14$	$\frac12$	$\frac32$
y	$1\frac14$	$\frac12$	$3\frac12$

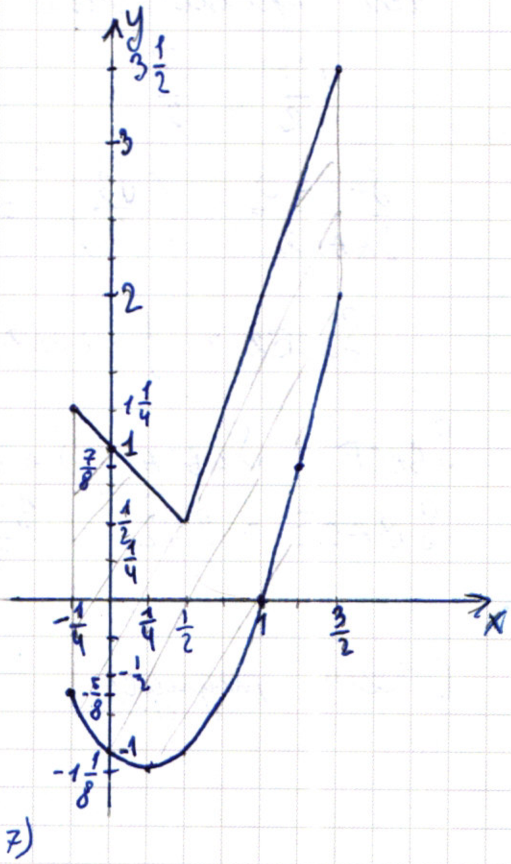


График функции $f(x)=ax+b$ - прямая

при $x=-\frac14$ $f(x)\ge -\frac58$, при $x=\frac12$ $f(x)\le\frac12$,

при $x=\frac32$ $f(x)\ge 2$

(продолжение на стр. 7)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №6)

Такая прямая единственна, т.к. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ - лежат на одной прямой.

Возьмём т. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и т. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = a \cdot \frac{1}{2} + b \quad | \cdot 2 \\ 2 = a \cdot \frac{3}{2} + b) \quad | \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = a + 2b \\ 4 = 3a + 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ 4 = 3 - 6b + 2b \end{cases}$$

$1 = -4b$

$b = -\frac{1}{4}$

$a = 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$

Ответ: $a = 1\frac{1}{2}$; $b = -\frac{1}{4}$

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \quad (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

2) $(4x^2 - 4x + 1) - 2x^2 - 2 + (y^2 - 4y + 4) = 0$

$(2x-1)^2 - 2(x^2+1) + (y-2)^2 = 0$

1) $y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$(4x^2 + 4x + 1) + y^2 - 5xy + y - 3 - 2x = 0$

$(2x+1)^2 + y^2 - 5xy + y - 3 - 2x = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{DO_2}{CA} = \frac{3}{4}$; $DO_2 = r = \frac{1}{2}R$; $CA = \sqrt{(2R)^2 - 4^2} = \sqrt{4R^2 - 16} = 2\sqrt{(R^2-4)}$

$\frac{\frac{1}{2}R}{2\sqrt{R^2-4}} = \frac{3}{4}$

$2R = 6\sqrt{R^2-4}$

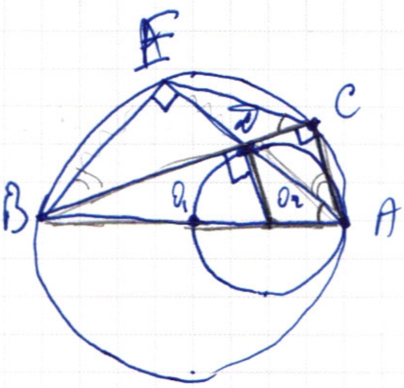
$R = 3\sqrt{R^2-4}$

$R^2 = 9R^2 - 36$

$8R^2 = 36$

$R^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$



$\frac{DO_2}{CA} = \frac{3}{4}$

$CA = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}$.

$\cancel{3^2 + \frac{9 \cdot 2}{16} = 9 + \frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 9}{8}}$

$\cancel{DO_2^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$\cancel{\frac{9 \cdot 2}{4} = \frac{9}{2} - 4}$ $\cancel{\frac{6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{81 \cdot 2}{16}}$

$\sqrt{2}$

из $\triangle ACD$ - прям.

$AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$\triangle BED \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{AD} = \sqrt{3}$

$\frac{BD}{AD} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{2}]$

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$2x^2+y^2-4(x+y)+3$

$(2x^2-4x+1)+(y^2-4y+$

$\cancel{(2x-1)^2+(y-2)^2=2(x^4+1)}$

$y^2 \cancel{-4xy+4x^2}$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$(y^2-4x^2)+8x^2-5xy+(2x+y)-2=0$

$(y-2x)(2x+y)+8x^2-5xy = \ldots$

$(2x+y)(y-2x+1)+8x^2-5xy-2=0$

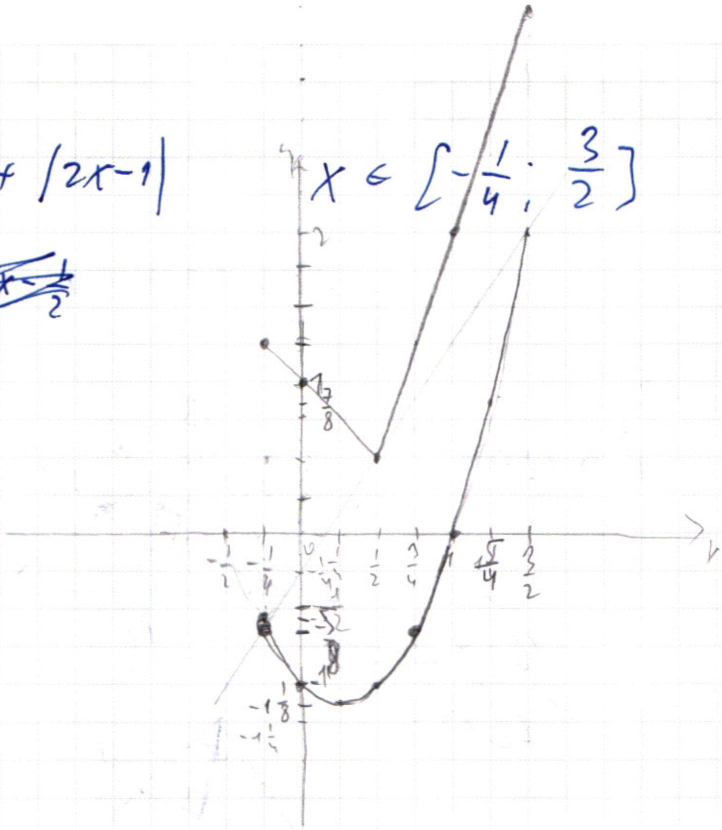
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№6

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



$2x^2-x-1=0$ $\quad$ $\cancel{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

$D=1+4\cdot 2=9$

$x_1 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

$2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$

$2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1 =$

$\frac{3}{8}-\frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$ $\quad \frac{3}{8}-1=$

$\frac{1}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1 = -1\frac{1}{8}$

$\frac{2\cdot 9}{4\,2}-\frac{3}{2}-1 = 2$

$2\cdot\frac{25}{16}-\frac{5}{4}-1 = \frac{25-10}{8}-1 = \frac{15}{8}-1 = \frac{7}{8}$ $\quad \frac{3}{4}+\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$y=x+|2x-1|$

$y=-\frac{1}{4}+\left|-\frac{1}{2}-1\right| = -\frac{1}{4}+1\frac{1}{2} = 1\frac{1}{4}$ $\quad \frac{3}{2}+2 = 3\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\begin{cases} \frac{1}{2} = a\cdot\frac{1}{2}+b & |\cdot 2 \\ 2 = a\cdot\frac{3}{2}+b \end{cases}$ $\quad$ $1=a+2b$, $\quad 4=3a+2b$

$a=1-2b$

$4=3(1-2b)+2b$

$4=3-6b+2b$

$1=-4b \quad b=-\frac{1}{4}$ $\quad a=1+2\cdot\frac{1}{4} = 1\frac{1}{2}$

$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = -\frac{3}{8}-\frac{1}{4} =$

$= -\frac{5}{8}$ $\quad ; \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4} = \cancel{\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}}$ 2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

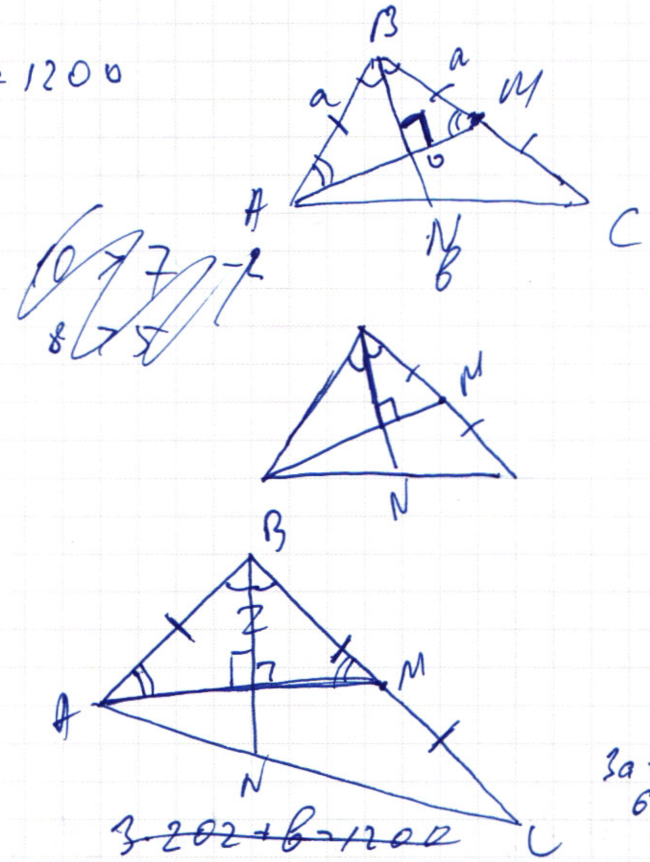
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$P = 1200$



$AB + BC + AC = 1200$

$a + 2a + AC = 1200$

$3a + \cancel{AC}\, b = 1200$

$\begin{cases} a + b > 2a \\ 3a > b \end{cases}$ $b > a$ $\quad a < b < 3a$

$\cancel{2a+b>a}$

$3a + b = 1200$

~~bmin = a~~

~~bmax = 3a~~

$3a + 2a = 1200$
$6a = 1200$
$a = 200$

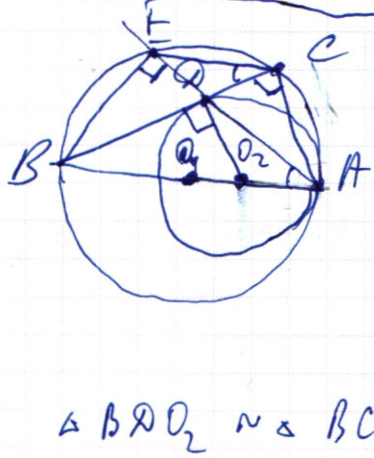
$3a + a = 1200$
$4a = 1200$
$a = 300$

~~3·202+b=1200~~

~~606+b=1200~~

$200 < a < 300$

$201 \le a \le 299$



$R - ?$

$r - ?$

S_{BACE} $\quad CD = 1 \quad BD = 3$

$BC = 4$

$\triangle CED \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD} = \frac{EC}{BA}$

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{DO_2}{CA} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{3}{4}$

$BO_2 = BA - r = 2R - r$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 8R - 4r = 6R$

~~$8R = 10r$~~

~~$4R = 5r \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$~~

$4r = 2R$

$R = 2r \qquad r = \frac{1}{2}R$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, $b_4 = x$ $c - ?$

$b_2 = a\cdot q$ $c = q^2 a$ $x = a\cdot q^3 = -q$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac$

$a^2 q^2 - a\cdot q^2 a = a^2q^2 - a^2q^2$

$x = \frac{-b}{a} = \frac{-a\cdot q}{a} = -q$

~~$a\cdot a\cdot q^3 + 2\cdot a q + a q^2 = 0$~~

~~$a\cdot(a\cdot q^3)^2 + 2\cdot a\cdot q\cdot a\cdot q^3 + q^2\cdot a = 0$~~

~~$a^3\cdot q^6 + 2a^2\cdot q^4 + a\cdot q^2 = 0$~~

$a\cdot q^3 = -q \quad |:q$

$\boxed{a\cdot q^2 = -1}$

~~$x^2 + 2x + 1 = 0$~~

~~$x_1 = \frac{-1}{1} = -1$~~

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 4) - 1 = 0$

$2x^2 - 4x + (y-2)^2 - 1 = 0$

$2x(x-2) + (y-2)^2 - 1 = 0$

$(4x^2 - 4x + 1) - 2x^2 \cancel{-2x} - 2 + (y-2)^2 = 0$

$(2x-1)^2 - 2(x^2+1) + (y-2)^2 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$(4x^2 + 4x + 1) + y^2 - 5xy + y - 3 - 2x = 0$

$(2x+1)^2 + y^2 - 5xy + y - 3 - 2x = 0$

Пусть $a\cdot q^2 = t$

$t^3 + 2t^2 + t = 0$

$t = -1$ - корень

$(t+1)(t^2+t) = 0$

$t = -1$ $t^2 + t = 0$

$t(t+1) = 0$

$t = 0$ $t = -1$

$$\begin{array}{r|l} t^3 + 2t^2 + t & t+1 \\ -\;t^3 + t^2 & t^2 + t \\ \hline t^2 + t & \\ -\;t^2 + t & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} a\cdot q^2 = -1 \\ a\cdot q^2 = 0 \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{DO_2}{CA} = \frac{3}{4}$ $\quad DO_2 = r = \frac{4}{5}R$

$\angle BAC$ – ?

$CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2-16} = \sqrt{4(R^2-4)} =$

$= 2\sqrt{R^2-4}$

$\angle CED = 45^\circ$

$AD : AC = 3 : 5$

$\frac{\frac{4}{5}R}{2\sqrt{R^2-4}} = \frac{3}{4}$

$4 \cdot \frac{4}{5}R = 6\sqrt{R^2-4}$

$\frac{8}{5}R = 3\sqrt{R^2-4}$

$\frac{64}{25} \cdot R^2 = 9R^2 - 36$

$\cancel{6\frac{11}{25}R^2 = 36}$

$R^2 = \frac{36 \cdot 25}{6 \cdot 25 + 11}$

$\frac{161}{25}R^2 = 36$

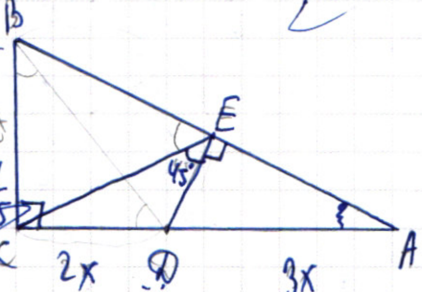
$R^2 = \frac{36 \cdot 25}{161}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$\cancel{\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{DE}{AE}}$

$\frac{64}{25} = 2\frac{14}{25}$

$\cancel{9 - 2\frac{14}{25} = 6\frac{11}{25}}$



б) $AC = \sqrt{29}$

$S_{\triangle CED}$ – ?

$6\frac{25}{25} - \frac{14}{25} \quad 6 : \quad \frac{225}{25} \quad \frac{225}{25} - \frac{64}{25}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$AD = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$1 + \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

$\frac{AD}{CD} = \frac{3}{2}$

$CD = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{2}{5}\sqrt{29}$

$\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 1 + \frac{4}{25} = \frac{29}{25}$

$\cos^2 A = \frac{25}{29}$ $\quad 225 - 64 = 161$

$\cos A = \frac{5}{\sqrt{29}}$ $\quad \cos A = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \cos A \cdot AD = \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{29} = 3$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{25}{29} = \frac{29}{29} - \frac{25}{29} = \frac{4}{29}$

$\sin A = \frac{2}{\sqrt{29}}$ $\quad \sin A = \frac{DE}{AD} \Rightarrow DE = AD \cdot \sin A$

$DE = \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

$S_{\triangle DEA} = \frac{1}{2} DE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)