МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=d$

$b^2=ac$

$b=ad$

$c=ad^2$

$x=ad^3$

$ax^2-2bx+c=0$

$\frac{D}{4}=b^2-ac=0$

$x=\frac{b}{a}=d$

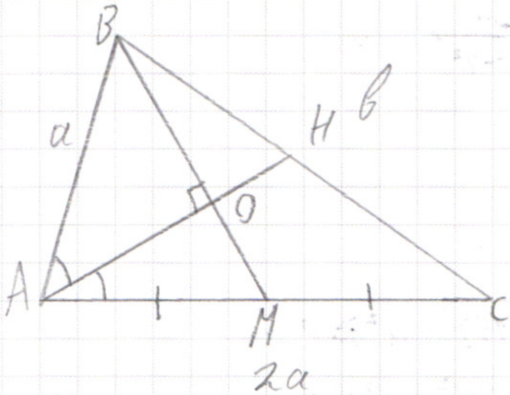
$ad^3=d$

$ad^2=1$

$c=1$

Ответ: 1

N2.



В $\triangle ABM$ AO- биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle ABM$-р/б

$AB=AM$

Пусть $AB=a$, тогда $AM=a$, $MC=AM=a$ (BM-медиана)

$AC=2a$

$BC=b$

$3a+b=900$

Нерав-во $\triangle ABC$

$a+2a>b$

$3a>b$

$6a>900$

$a>150$

$a+b>2a$

$b>a$

$4a<900$

$a<225$

$2a+b>a$

$a+b>0$

$a_{min}=151$

$2a=302$

$b=447$

$a_{max}=224$

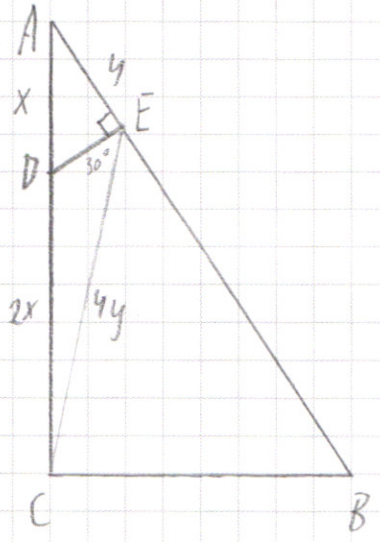
$2a=448$

$b=228$

$224-151+1=74$

Ответ: 74

№4(а)



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $D \in AC$; $AD : AC = 1:3$; $E \in AB$; $DE \perp AB$; $\angle CED = 30^\circ$

Найти: $tg \angle BAC$

Решение

$AD : AC = 1:3$, $AC = AD + DC \Rightarrow AD : DC = 1:2$

Теорема синусов для $\triangle ADE$:

$$\frac{AD}{\sin 90^\circ} = \frac{AE}{\sin \angle ADE}$$

$$x = \frac{AE}{\sin \angle ADE}$$

$\sin \angle ADE = \sin \angle CDE$ (т.к. $\angle CDE = 180^\circ - \angle ADE$, т.к. углы смеж.)

Теор. синусов для $\triangle CDE$:

$$\frac{DC}{\sin 30^\circ} = \frac{EC}{\sin \angle CDE}, \quad 4x = \frac{EC}{\sin \angle CDE}$$

$$\frac{EC}{AE} = 4$$

Пусть $AE = y$, $EC = 4y$

В $\triangle ADE$ по т. Пифагора $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{x^2 - y^2}$

Теор. косинусов для $\triangle CDE$:

$$DC^2 = DE^2 + EC^2 - 2 \cdot DE \cdot EC \cdot \cos 30^\circ$$

$$4x^2 = x^2 - y^2 + 16y^2 - 4\sqrt{3}\, y \sqrt{x^2 - y^2}$$

$$4\sqrt{3}\, y\sqrt{x^2 - y^2} = 15y^2 - 3x^2$$

$15y^2 - 3x^2 \geq 0$

$5y^2 - x^2 > 0$

$$48x^2y^2 - 48y^4 = 225y^4 - 90x^2y^2 + 9x^4$$

$$273y^4 - 138x^2y^2 + 9x^4 = 0 \quad |:3$$

$$91y^4 - 46x^2y^2 + 3x^4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 529x^4 - 273x^4 = 256x^4$$

$$y_1^2 = \frac{23x^2 + 16x^2}{91} = \frac{39x^2}{91} = \frac{3x^2}{7} \qquad \frac{3 \cdot 5x^2}{7} - x^2 = \frac{8x^2}{7} > 0$$

$$y_2^2 = \frac{23x^2 - 16x^2}{91} = \frac{7x^2}{91} = \frac{x^2}{13} \qquad \frac{5x^2}{13} - x^2 = \frac{-8x^2}{13} < 0$$, не подходит

$$AE = y = \sqrt{\frac{3}{7}}\, x$$

$$DE = \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{\frac{4}{7}}\, x = \frac{2}{\sqrt{7}}\, x$$

$$tg \angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$ $\qquad x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Изобразим на коор. пл-ти ф-ии $f(x)=8x-6|2x-1|$ и $g(x)=-8x^2+6x+7$

$f(x)=8x-6|2x-1|$

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=0,5$

$\begin{cases} f(x)=20x-6, & x<0,5 \\ f(x)=-4x+6, & x \geq 0,5 \end{cases}$

x	-0,5	0,5
y	-16	4

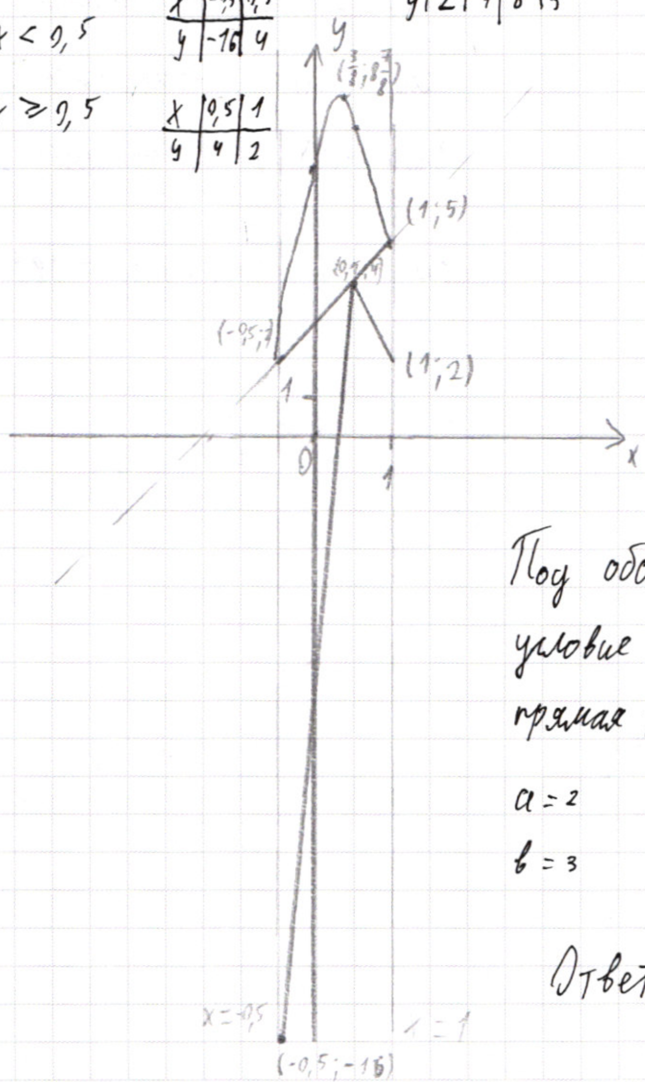
x	0,5	1
y	4	2

$g(x)=-8x^2+6x+7$

$x_в=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$

$y_в=g(x_в)=-\frac{3}{8}+\frac{9}{4}+7=8\frac{7}{8}$

x	-0,5	0	0,5	1
y	2	7	8	5



Под обозначенное в начале условие подходит только одна прямая: $y=2x+3$

$2=-0,5\cdot 2+3$
$4=0,5\cdot 2+3$
$5=1\cdot 2+3$

$a=2$

$b=3$

Ответ: $(2; 3)$

№7

$f(2) = [1] = 1$

$f(3) = [1{,}5] = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = [2{,}5] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(7) = [3{,}5] = 3$

$f(8) = f(2) + f(4) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(11) = [5{,}5] = 5$

$f(12) = f(3) + f(4) = 3$

$f(13) = [6{,}5] = 6$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(17) = [8{,}5] = 8$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(19) = [9{,}5] = 9$

$f(20) = f(2) + f(10) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(22) = f(2) + f(11) = \cancel{\ldots}\ 6$

$f(a) + f(b) = f(ab)$

$f(a) = f(ab) - f(b) = f\left(\frac{ab}{b}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(y) > f(x)$

Если $f(x) = 1$, вариантов: $2 \cdot 19 = 38$

Если $f(x) = 2$, вариантов: $4 \cdot 15 = 60$

Если $f(x) = 3$, вариантов: $6 \cdot 9 = 54$

Если $f(x) = 4$, вариантов: $4 \cdot 5 = 20$

Если $f(x) = 5$, вариантов: $1 \cdot 4 = 4$

Если $f(x) = 6$, вариантов: $2 \cdot 2 = 4$

Если $f(x) = 8$, вариантов: $1 \cdot 1 = 1$

$38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 181$

Ответ: 181.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4(б).

$AC = \sqrt{7}$

$3x = \sqrt{7}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Рассмотрим $\triangle ADE$:

$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = \frac{1}{2} AD \cdot h$ h - высота из E

$h = \frac{AE \cdot DE}{AD} = \frac{\sqrt{\frac{3}{7}}\,x \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}\,x}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{7}\,x = \frac{2}{\sqrt{21}}$

$DC = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot h = \frac{2\sqrt{\cancel{7}} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \underset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{21}}}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

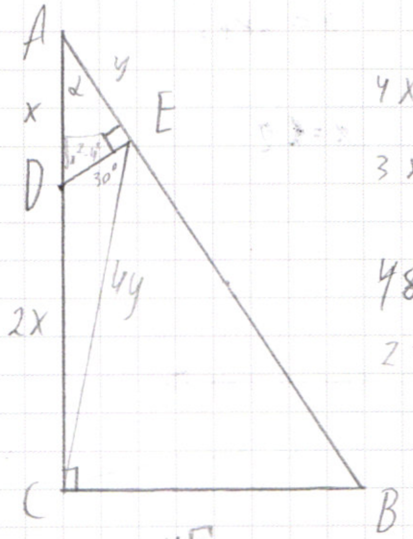
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$4x^2 = x^2 - y^2 + 16y^2 - 8y\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}$

$3x^2 = 15y^2 - 4\sqrt{3}\,y\sqrt{x^2-y^2}$

$15y^2 - 3x^2 \geq 0$

$5y^2 - x^2 \geq 0$

$48y^2x^2 - 48y^4 = 225y^4 - 90x^2y^2 + 9x^4$

$273y^4 - 138x^2y^2 + 9x^4 = 0$

$91y^4 - 46x^2y^2 + 3x^4 = 0$

$\frac{D}{4} = 52y^2 \ldots$

$\frac{D}{4} = 529x^4 - 273x^4 = 256x^2$

$\frac{2\sqrt{7}}{3}$ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 2

$p = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{3} + 3}{3}$

$y^2 = \frac{17x^2 + 2\sqrt{13}x}{14}$

$y_1^2 = \frac{23x^2 + 16x^2}{91} = \frac{39}{91}x^2 = \frac{3}{7}x^2$

$y = \sqrt{\frac{3}{7}}x$

$\cos\alpha = \frac{y}{x}$

$\sin\alpha = -\cos(90 + \alpha)$

$DE = \sqrt{\frac{52}{91}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{39}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$y_2^2 = \frac{23x^2 - 16x^2}{91} = \frac{x^2}{13}$

$16y^2 = 4x^2 + x^2 - y^2 - 4x(x$

$DE = \sqrt{\frac{12}{13}}x$ $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{12}}{1} = 2\sqrt{3}$

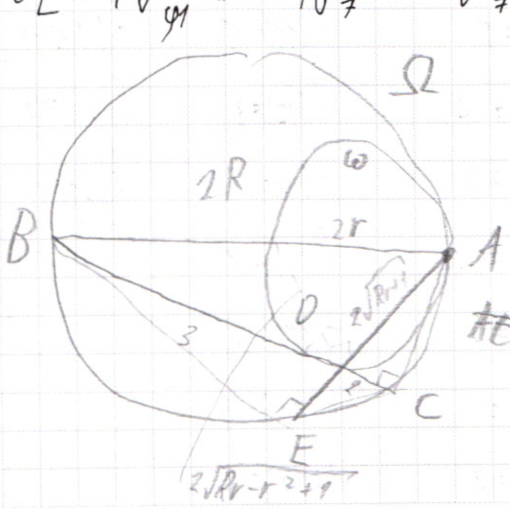
$DE = \sqrt{\frac{52}{91}}x = \sqrt{\frac{4}{7}}x \approx \frac{2}{2,6}$

$2,6^2 = 6,76$

$\sqrt{7} = 2,6$

$CE = 4\sqrt{\frac{39}{91}}x = 4\sqrt{\frac{3}{7}}x = \sqrt{\frac{48}{7}}x \approx \frac{6,9}{2,6}x$

$\sqrt{13} = 3,6$



$DE = \sqrt{\frac{12}{13}}x = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}x$

$+ \approx 7,5$

$CE = 4\sqrt{\frac{1}{13}}x = \frac{4}{\sqrt{13}}x$

$2R(2R - 2r) = 9$

$\cancel{4R^2 - 4Rr}$

$\frac{3}{BE} = \frac{AD}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

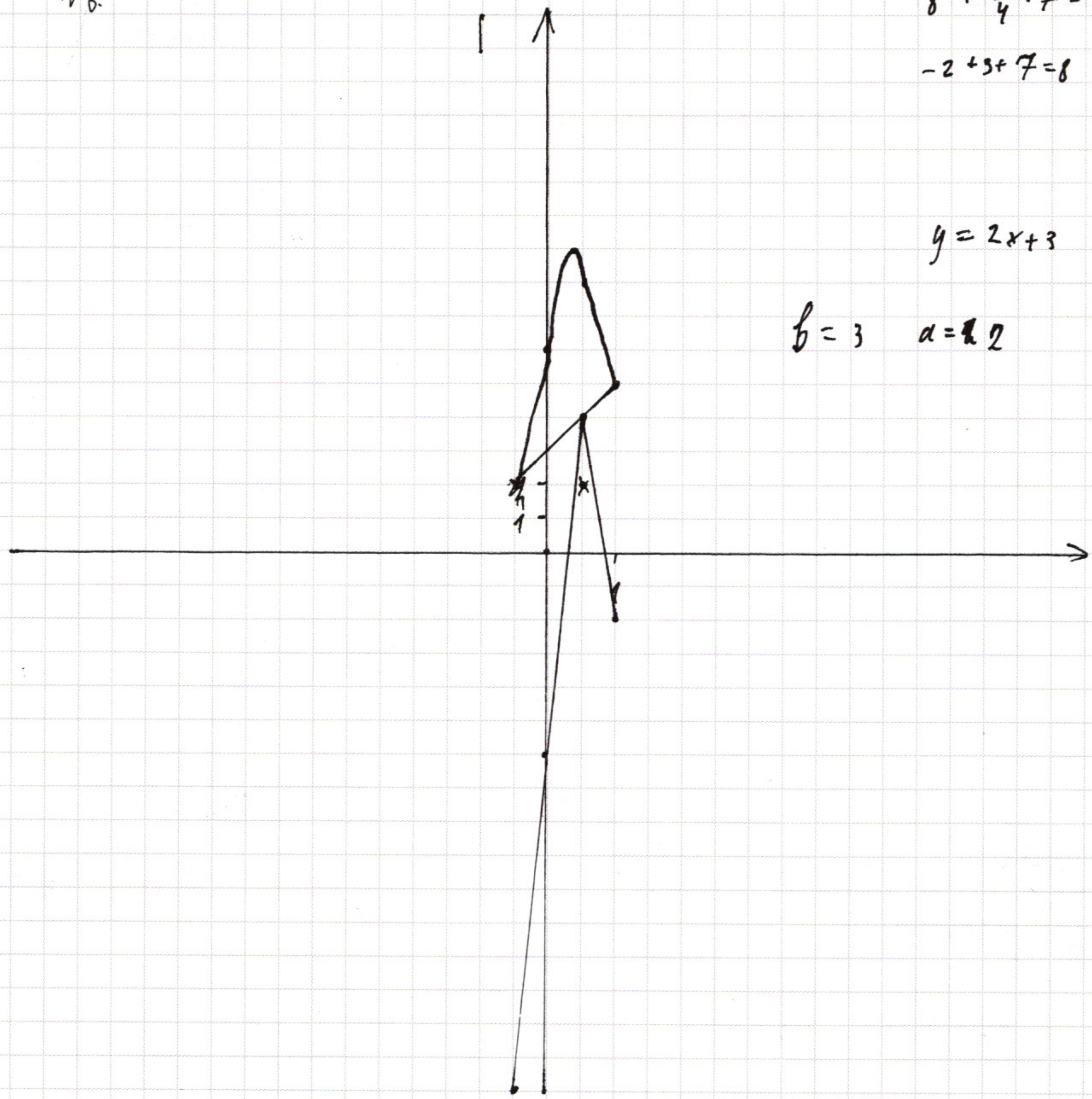
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6.

$-\frac{3}{8}+\frac{9}{4}+7=8\frac{7}{8}$

$-2+3+7=8$



$y=2x+3$

$b=3 \quad a=2$

7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a)=f(ab)-f(b)=$

$=f(\frac{ab}{b})$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(\frac{8}{2})=f(8)-f(2)=3-1=2=f(4)$

$f(\frac{22}{11})=f(2)$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=2$

$f(7)=3$

$f(8)=3$

$f(9)=2$

$f(10)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=3$

$f(13)=6$

$f(14)=4$

$f(15)=3$

$f(16)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=3$

$f(19)=9$

$f(20)=4$

$f(21)=4$

$f(22)=6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a = x_1$ $\quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = d$

$b = x_2 = x_1 d$

$c = x_3 = x_1 d^2$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = 0$

$x = \frac{b}{a} = d$

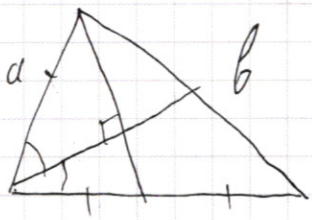
$x_1 d^3 = d$

$x_1 = \frac{1}{d^2}$

$c = x_1 \cdot d^2 = 1$

Ответ: 1.

№2



$2a$

$3a + b = 900$

$3a > b$

$2b < 900$

$b < 450$

$3a > 450$

$a > 150$

$a + b > 2a$

$b > a$ $\quad b > 150$

$4a < 900$

$a < 225$

$b > 225$

$a = 151$

$2a = 302$

$b = 447$

$a = 224$

$b = 228$

~~$b = 150$~~ $\quad 2a = 448$

$224 - 151 + 1 = 74$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3 5

N3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+29=0 \end{cases}$$

$x-6=a$

$y-1=b$

$x-6y\geqslant 0$

$x=6$

$y=1$

$\cancel{(x-6)^2+2(y+1)^2}$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

$a^2+2b^2-18=0$

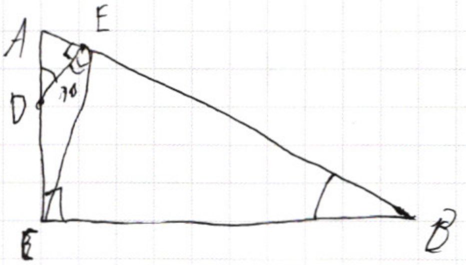
$(a-4)(a+4)+2(b-1)(b+1)=0$

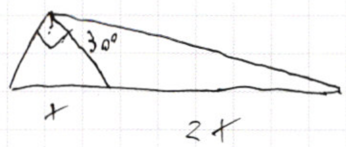
$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$(x-2)(x-10)+2y(y-2)=0$

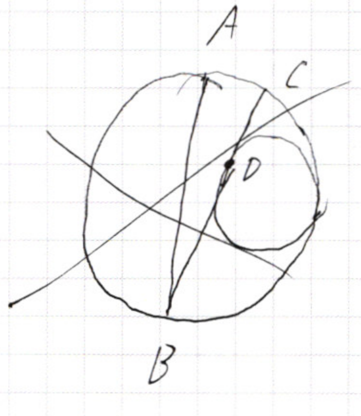
$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$$

N4.



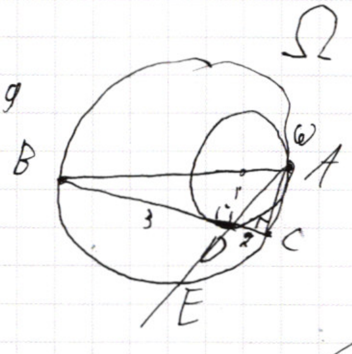


$tg=\frac{DE}{AE}$

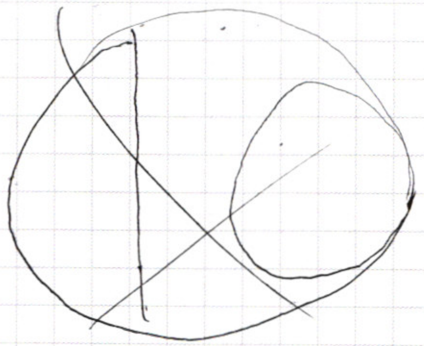


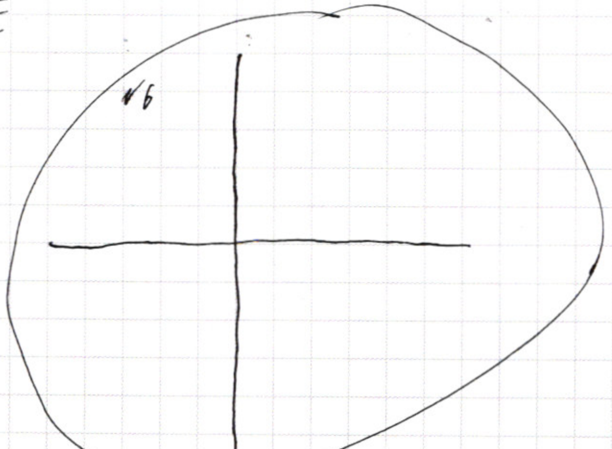
$2R(2R-2r)=9$

$\cancel{r+9=}$



N5.





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)