МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

1) Рассмотрим $ax^2+2bx+c=0$.

$D=(2b)^2-4\cdot a\cdot c=4b^2-4ac$.

2) Зададим $a=\frac{b}{q}$, $b=b$, $c=bq$, $d=bq^2$ как первые 4 члена геом. прогрессии со знаменат. q.

Тогда $D=4b^2-4ac=4b^2-4\cdot\frac{b}{q}\cdot bq=4b^2-4b^2=0$

Т.е. $x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$. Тогда ~~$x=d$, т.е. $-\frac{b}{a}=bq^2$~~,

~~$b\neq0 \Rightarrow$~~ $x=-\frac{b}{a}=\frac{-b}{b/q}=-q$ (подставили a),

3) $x=d$ по усл; $-\cancel{q}=bq^{\cancel{2}}$, $q\neq0 \Rightarrow bq=-1$,

$c=bq=-1$ – третий член прогрессии.

Ответ: -1.

Задача 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, & (1)\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0, & (2)\end{cases}$$

(1) $y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}$,

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 2x,\\ (y-2x)^2=(x-1)(y-2); (3)\end{cases}$

(3) $y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$,

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$,

$y^2+(1-5x)y+(4x^2+2x-2)=0$. Решим как кв. ур. отн-но y.

$D=(1-5x)^2-4(4x^2+2x-2)=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-18x+9=9(x-1)^2$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда $y = \frac{5x-1 \pm 3|x-1|}{2}$, $\left[\begin{array}{l} y = \frac{5x-1+3x-3}{2}, x \geq 1 \\ y = \frac{5x-1+3-3x}{2}, x < 1 \\ y = \frac{5x-1-3x+3}{2}, x \geq 1 \\ y = \frac{5x-1-3+3x}{2}, x < 1 \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4x-2, \ x \geq 1 \\ y = x+1, \ x < 1 \\ y = x+1, \ x \geq 1, \\ y = 4x-2, \ x < 1 \end{array}\right.$, т.е. $\left[\begin{array}{l} y = 4x-2, \\ y = x+1 \end{array}\right.$ при усл. $y \geq 2x$

подставим в (2)

(2) $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + x^2 + 3 - 8 = 0$

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + x^2 - 5 = 0$

1. $y = 4x - 2$.

$(x-2)^2 + (4x-2-2)^2 + x^2 - 5 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + 16x^2 - 32x + 16 + x^2 - 5 = 0$

$18x^2 - 36x - 1 = 0$

$D = 36^2 + 4 \cdot 18 = 36^2 + 36 \cdot 2 = 36(36+2) = 36 \cdot 38 = 6^2 \cdot 2 \cdot 19$

$x_{1,2} = \frac{36 \pm 6\sqrt{38}}{36}$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = 1 + \frac{\sqrt{38}}{6} \\ x_2 = 1 - \frac{\sqrt{38}}{6} \end{array}\right.$ тогда $y_1 = 4\left(1 + \frac{\sqrt{38}}{6}\right) - 2 =$

$= 4 + \frac{2\sqrt{38}}{3} - 2 = 2 + \frac{2\sqrt{38}}{3}$.

$y_2 = 4\left(1 - \frac{\sqrt{38}}{6}\right) - 2 = 2 - \frac{2\sqrt{38}}{3}$.

Проверка на $y \geq 2x$:

Для y_1, x_1: $2 + \frac{2\sqrt{38}}{3} \geq 2 + \frac{\sqrt{38}}{3}$ – верно

Для y_2, x_2: $2 - \frac{2\sqrt{38}}{3} \geq 2 - \frac{\sqrt{38}}{3}$ – неверно, ~~y_2, x_2~~ (x_2, y_2) – не кор.

2. $y = x + 1$

$(x-2)^2 + (x+1-2)^2 + x^2 - 5 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 5 = 0$

$3x^2 - 6x = 0 \quad | : 3$

$x^2 - 2x = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

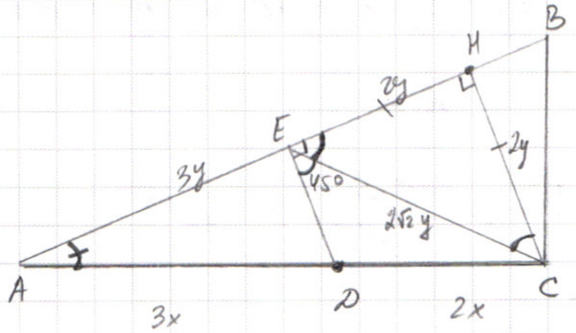
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \end{array}\right.$ Тогда $x_3=0$, $y_3=1$
$x_4=2$, $y_4=3$.

Проверка: y_3, x_3; $1 \geq 0$ – верно
y_4, x_4: $3 \geq 4$ – неверно, $(x_4; y_4)$ – не корень.

Ответ: $\left(1+\frac{\sqrt{38}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{38}}{3}\right)$, $(0;1)$.

Задача 4.



Дано:
$\triangle ABC$, $D \in AC$, $AD:AC=3:5 \Rightarrow$
$\Rightarrow AD:DC=3:2$.
$DE \perp AB$, $\angle CED=45°$
Найти:
1) $tg\angle BAC$,
2) при $AC=\sqrt{29}$ $S(CED)$

Решение: А)
1) $AD:AC=3:5 \Rightarrow AD:DC=3:2$, пусть $AD=3x$, $DC=2x$, проведём $CH \perp AB$; $\angle CHE=90°$
2) $\angle HEC=\angle DEH-\angle CED=45° \Rightarrow \triangle EHC$ – равнобедр., (по призн.) и прямоугольный, $\angle HEC=\angle HCE=45°$, тогда $HE=HC$.
3) Рассмотрим $\triangle AED$ и $\triangle AHC$. $\triangle AED \sim \triangle AHC$ по 2 углам ($\angle BAC$ – общий, $\angle AED=\angle AHC=90°$), тогда $\angle EDA=$ $=\angle HCA \Rightarrow ED \parallel HC$ при равных соотв. углах $\angle EDA=$ $=\angle HCA$. Тогда $\frac{AD}{AE}=\frac{DC}{EH}$, т.е. $AE:EH=3:2$ (по расширен. теореме Фалеса) $\Rightarrow$ пусть $AE=3y$, $EH=2y$.
Тогда $HC=HE=2y$.
4) По теореме Пифагора для $\triangle AHC$: $(5y)^2+(2y)^2=(5x)^2$
$25y^2+4y^2=25x^2$

$y^2 = \frac{25}{29}x^2$, $y = \frac{5}{\sqrt{29}}x$.

5) $AE = 3y = \frac{15}{\sqrt{29}}x$

По теореме Пифагора в $\triangle AED$:

$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{9x^2 - 9\cdot\frac{25}{29}x^2} = \sqrt{9x^2\left(1-\frac{25}{29}\right)} = 3x\sqrt{\frac{4}{29}} =$
$= \frac{6x}{\sqrt{29}}$.

Тогда $tg\angle BAC = \frac{ED}{AE} = \frac{6\cancel{x}\cdot\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{\sqrt{29}}\cdot 15\cancel{x}} = \frac{6}{15} = \frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot 5} = \frac{2}{5}$.

б) При $AC = \sqrt{29}$, т.е. $5x = \sqrt{29}$, $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

$S(CED) = \frac{1}{2}\cdot ED\cdot EC\cdot \sin\angle DEC$.

$ED = \frac{6x}{\sqrt{29}} = \frac{6\cdot\cancel{\sqrt{29}}}{5\cdot\cancel{\sqrt{29}}} = \frac{6}{5}$

$EC = \sqrt{EH^2 + HC^2} = \sqrt{4y^2+4y^2} = 2\sqrt{2}\cdot y$ из $\triangle EHC$ по т. Пифаг.,

$EC = 2\sqrt{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}\cdot x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{29}}x = \frac{10\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{29}}}{\cancel{\sqrt{29}}\cdot 5} = 2\sqrt{2}$.

$S(CED) = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cancel{2}\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ = \frac{6\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6\cdot\cancel{2}}{5\cdot\cancel{2}} = \frac{6}{5}$ ед.^{2}.

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$; $S_{CED} = \frac{6}{5}$ ед^2.

Задача 6.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1| \iff$

$\iff \begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax+b, & (1) \\ ax+b \le x+|2x-1| & (2) \end{cases}$

(1) $ax+b \ge 2x^2 - x - 1$. ~~Пусть~~ ~~$y = ax+b$~~

В системе координат $(x;y)$ график $y = 2x^2 - x - 1$ - парабола,

$x_в = \frac{+1}{4}$, $y_в = y\left(\frac{1}{4}\right) = 2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = \frac{-9}{8}$.

$2x^2 - x - 1 = (2x+1)(x-1)$, Точки параболы $(1;0)$
$\left(-\frac{1}{2};0\right)$

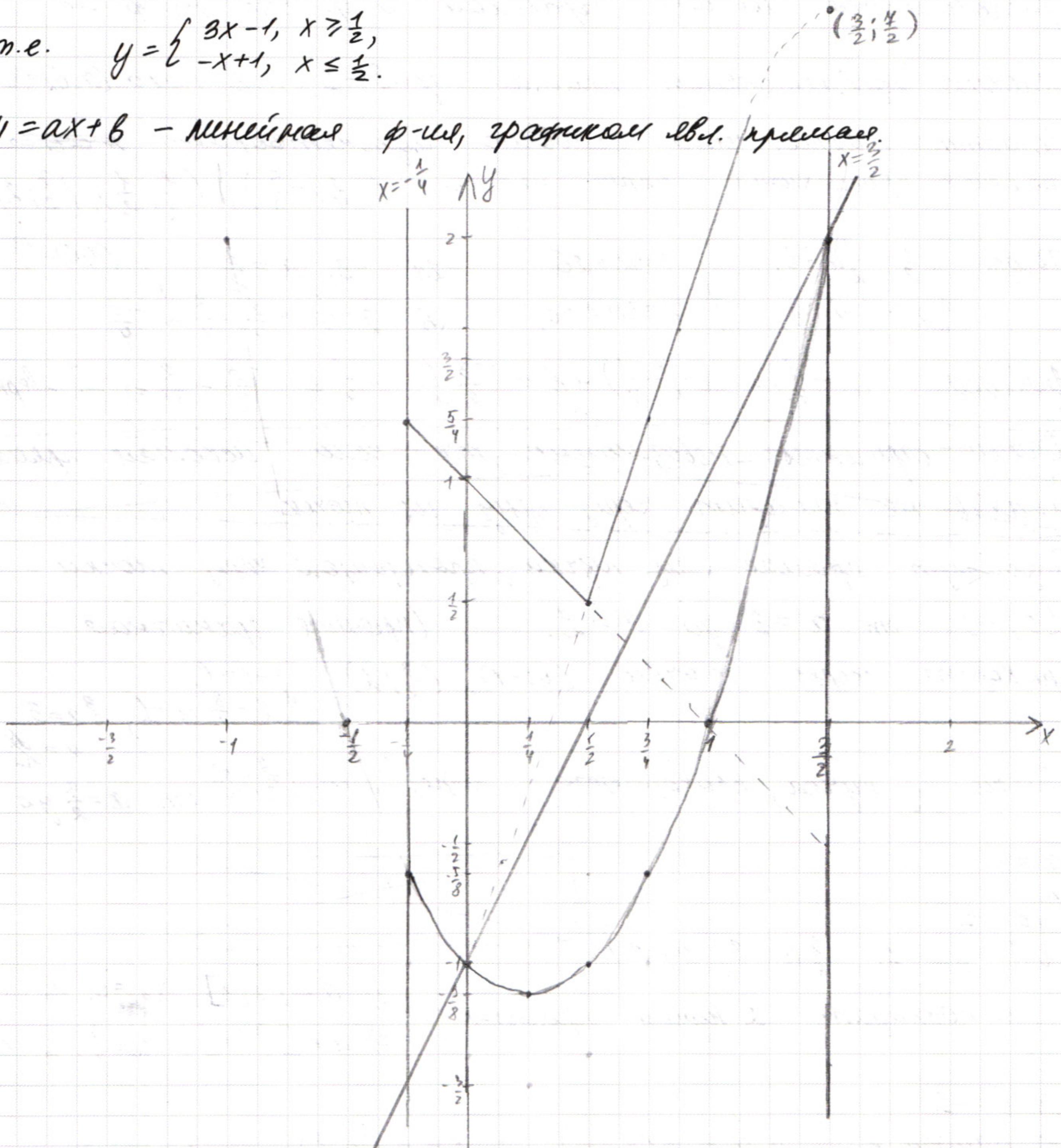
(2) $ax+b \le x + |2x-1|$, $y = x + |2x-1|$, $y = \begin{cases} x+2x-1, & 2x \ge 1 \\ x-2x+1, & 2x \le 1 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е. $y = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2}, \\ -x+1, & x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

$y = ax+b$ – линейная ф-ия, графиком явл. прямая.



Для параболы: $y(-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{8}$, $y(0) = -1$, $y(\frac{1}{4}) = -\frac{9}{8}$, $y(\frac{1}{2}) = -1$, $y(\frac{3}{4}) = -\frac{5}{8}$, $y(1) = 0$.
$y(\frac{3}{2}) = y(-1) = 2$.

Для кусочно-заданной лин. ф-ии: $y(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$, $y(0) = 1$, $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $y(\frac{3}{2}) = \frac{7}{2}$.

Тогда в пределах участка $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ имеем 3 области (над графиком кус.-зад. ф-ии, между ней и параболой, под параболой).

Тогда по усл. на этом отрезке прямая $y = ax + b$ должна располагаться между параболой и гр. кус.-зад. ф-ии.

1) Условию удовлетворяет прямая $y = 3x - 1$, т.е. пара $(a; b) = (3; -1)$

2) Заметим также, что условию удовлетворяет прямая, проходящая через точки $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Тогда $\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b, \\ 2 = \frac{3}{2}a + b, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = a + 2b, \\ 4 = 3a + 2b, \end{cases}$ $-2a = -3$, $a = \frac{3}{2}$

$b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = \frac{-1}{4}$ $\quad (a; b) = \left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

Проверка: $y\left(-\frac{1}{4}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + b = \frac{-3 \cdot 1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{4} = \frac{-3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{-5}{8}$ – верно.

~~Другие варианты невозможны, т.к. если искомая прямая $y = ax + b$ не проходит через одну из точек~~

Подойдут прямые из пучка, проходящего через точку $(0; -1)$ от $a = 3$ до $a = 2$. (прямая граничная проходит через точки $(0; -1)$, $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$, $\begin{cases} -1 = b, \\ 2 = \frac{3}{2} \cdot a - 1, \end{cases}$ $\frac{3}{2}a = 3$, $a = 2$

Также из пучка, проходящего через т. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ от $a = \frac{3}{2}$ до $a = 2$

$\left(\begin{cases} b = -1 \\ 2 = \frac{3}{2}a - 1, \end{cases} \frac{3}{2}a = 3, a = 2\right)$

Т.е. подходят 2 пучка прямых:

1) $a \in [2; 3]$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1$

2) $a \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = 2$,

1) $b = -1$

2) Найдем b; $y - y_0 = a(x - x_0)$, $y - 2 = a\left(x - \frac{3}{2}\right)$, $y - 2 = ax - \frac{3}{2}a$,

$y = ax + 2 - \frac{3}{2}a$, т.е. $b = 2 - \frac{3}{2}a$.

Ответ: При $a \in [2; 3]$ $b = -1$

При $a \in \left[\frac{3}{2}; 2\right)$ $b = 2 - \frac{3}{2}a$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

Заполним таблицу; $f(2)=\left[\frac{2}{2}\right]=[1]=1$, $f(3)=1$, $f(5)=2$, $f(7)=3$, $f(11)=5$, $f(13)=6$, $f(17)=8$, $f(19)=9$, $f(23)=11$

$f(2)+f(3)=f(6)=2$ $\qquad$ $f(3)+f(3)=f(9)=2$

$f(2)+f(2)=f(4)=2$ $\qquad$ $f(3)+f(4)=f(12)=3$

$f(2)+f(5)=f(10)=3$ $\qquad$ ...

$f(2)+f(4)=f(8)=3$

...

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$f(n)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6	11	4	4	7	3	5	14	4

Последовательность значений $f(p)$ не убывает, т.к. для каждого следующего простого числа p_{n+1} верно, что $\left[\frac{p_{n+1}}{2}\right] \geq \left[\frac{p_n}{2}\right]$ (т.к. простые числа начиная с 3 отличаются не менее чем на 2 ед.).

Заметим также что в последовательности значений $f(n)$ для $n \in \mathbb{N}$ все значения для чисел меньших n не превосходят значение $f(n)$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ значение $f(n)$ определено;

Т.к. $f(ab)=f(a)+f(b)$, то для всех чисел $a \geq 2$, $b \geq 2$ $f(ab)$ равно сумме двух положительных значений.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+\left(\frac{1}{y}\right)$, $\quad f\left(\frac{2}{a}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{a}\right)$, при $a=1$:

$f(2)=f(2)+f(1)$, т.е. $f(1)=0$.

Тогда $f\left(\frac{2}{a}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{a}\right)$, при $a=2$:

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$, $\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f(2)=-f(2)<0$.

Далее по алгоритму $f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f(m)=-f(n)+f(m)=f(m)-f(n)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Т.е. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ при $f(x)-f(y)<0$, т.е. $f(x)<f(y)$.

~~Тогда для $x=1$: $y\in[2;21]$~~ (рассматриваем $x, y \in \mathbb{N}$)

~~$x=2$: $y\in[4;21]$~~

~~$x=3$: $y\in[4;21]$~~

~~$x=4, x=5, x=6$: $y\in$~~

Тогда согласно таблице считаем ответ:

Для $x=1$: $f(1)=0$, $y\in[2;21]$; $x,y\in\mathbb{N}$ – 20 пар

$x=2$: $f(2)=1$, $y\in[4;21]$ – 18 пар

$x=3$: $f(3)=1$, $y\in[4;21]$ – 18 пар

$x=4$: $f(4)=2$, $y\in\{7;8\}\cup[10;21]$ – 14 пар

$x=5$: $f(5)=2$ – 14 пар

$x=9$ – 14 пар

$x=6$ – 14 пар

~~$x=7$, $x=8$, $x=\ldots$~~ $f(7)=f(8)=$

$x=\{7;8;10;12;15;18\}$ $y=\{11;13;14;16;17;19;20;21\}$

$f(7)=3$;

$6\cdot 8=48$ пар

$x=\{11\}$ $y=\{13;17;19\}$ 3 пары

$f(11)=5$

$x=\{13\}$ $y=\{17;19\}$ 2 пары

$x=\{14;16;20;21\}$

$f(14)=4$ $y=\{11;13;17;19\}$

16 пар

$x=\{17\}$ $y=\{19\}$ 1 пара

Итого $1\cdot 20+2\cdot 18+4\cdot 14+6\cdot 8+4\cdot 4+3+2+1=$

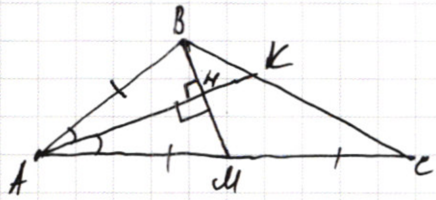
$=\underline{20}+\underline{36}+\underline{56}+48+16+6=56\cdot 2+60=112+60=172.$

Ответ: 172.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

Рассмотрим треугольник, в котором биссектриса ⊥ медиане.



BM - медиана, AK - бисс., тогда △ ABM - по признаку равнобедренный, т.е. AB = AM (высота AH является биссектрисой)

Тогда требуется найти кол-во △-ов, у которых 1 сторона больше другой в 2 раза (соблюдая нерав-во треуг. для периметра 1200)

$AB = a,$
$AC = 2a,$
$BC = 1200 - 3a$

нерав-во треуг.

$\begin{cases} 3a > 1200 - 3a, \\ a + 1200 - 3a > 2a, \\ 2a + 1200 - 3a > a, \end{cases}$ $\begin{cases} 6a > 1200, \\ 4a < 1200, \\ 2a < 1200, \end{cases}$

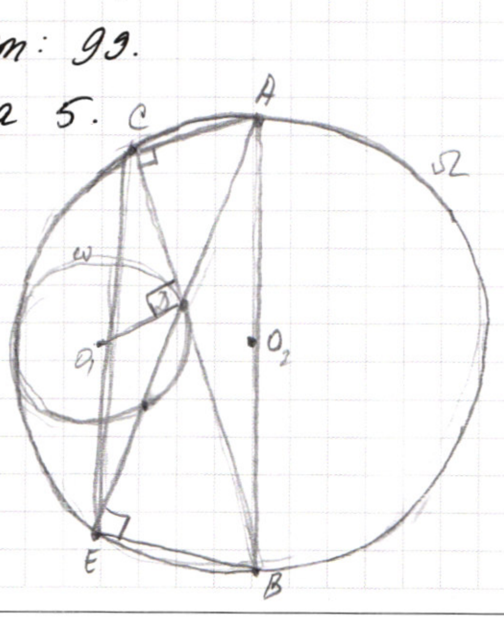
$\begin{cases} a > 200, \\ a < 300, \\ a < 600 \end{cases}$ т.е. $a \in (200; 300)$, т.е. таких △-ов ~~[illegible]~~ 99)

~~Т.к. стороны 3 и можем менять для них значения то количество $n = 3 \cdot 101 = 303$, но~~

Т.к. треугольник однозначно определяется 3-мя своими сторонами, то таких треугольников ~~[illegible]~~ 99.

Ответ: 99.

Задача 5.



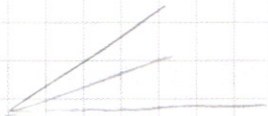
$\angle BCA = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр AB

$O_1D \perp BC$ как радиус проведенный в точку касания

$\angle AEB = 90^\circ$ как опир. на диам.

$\triangle ACB = \triangle AEB$ по гипотенузе и острому углу.

BECA - равнобедренная трапеция.



7. $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$ для простого p

$(x;y)$: $1\le x\le 21$

$1\le y\le 21$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

X	зн.		
1) 1	0	20	
2, 3) 2	1	~~[illegible]~~	18
4, 5, 6, 9) 4	2		14
7, 8, 10, 12, 15, 18) 6	3		8
14, 16, 20, 21) 4	4		4
11) 1	5		3
13) 1	6		2
17) 1	8	1	
~~$f(29)=14$~~ 19) 1	9	10	0

$f(2)=1,\quad f(3)=1,\quad f(5)=2,\quad f(7)=3,\quad f(11)=\cancel{6}\,5,\quad f(13)=6,$

$f(17)=8,\quad f(19)=9,\quad f(23)=11,$

$f(2)+f(3)=f(6)=2$

$f(2)+f(5)=f(10)=3$

$f(2)+f(7)=f(14)=4$

$f(2)+f(11)=f(22)=6$

$f(2)+f(13)=f(26)=7$

$f(3)+f(5)=f(15)=3$

$f(3)+f(7)=f(21)=4$

$f(2)+f(2)=f(4)=2$

$$\begin{array}{r}14\\ \times\ 4\\ \hline 56\end{array}\qquad \begin{array}{r}48\\ \times\ 22\end{array}$$

17, 19,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
f(n)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6	11	4	4	7	3	5	14

$x\in[1;21]$

$y\in[1;21]$

$f\left(\frac{2}{a}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{2}{2}\right)$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)-f(2)=-f(2)\quad f($

$f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{2}{a}\right)-f(2)\Rightarrow$

$f(2)=f(2)+f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=f(2)-f(2)=0$

$f($

$f(0)=$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f(2)=f\left(\frac{2}{3}\right)-f(3)+f(2)=0$

$$\begin{array}{r}56\\ \times\ 2\end{array}\qquad 56\cdot 2=112$$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-f(3)$

$f\left(\frac{a}{b}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)+f($

$f(x)\quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ при

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ при $f(x)<f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

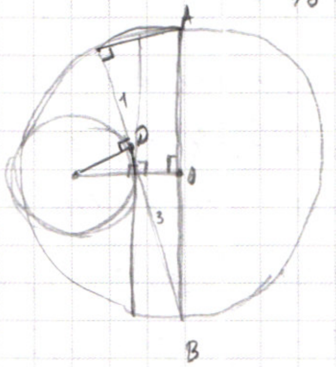
(заполняется секретарём)

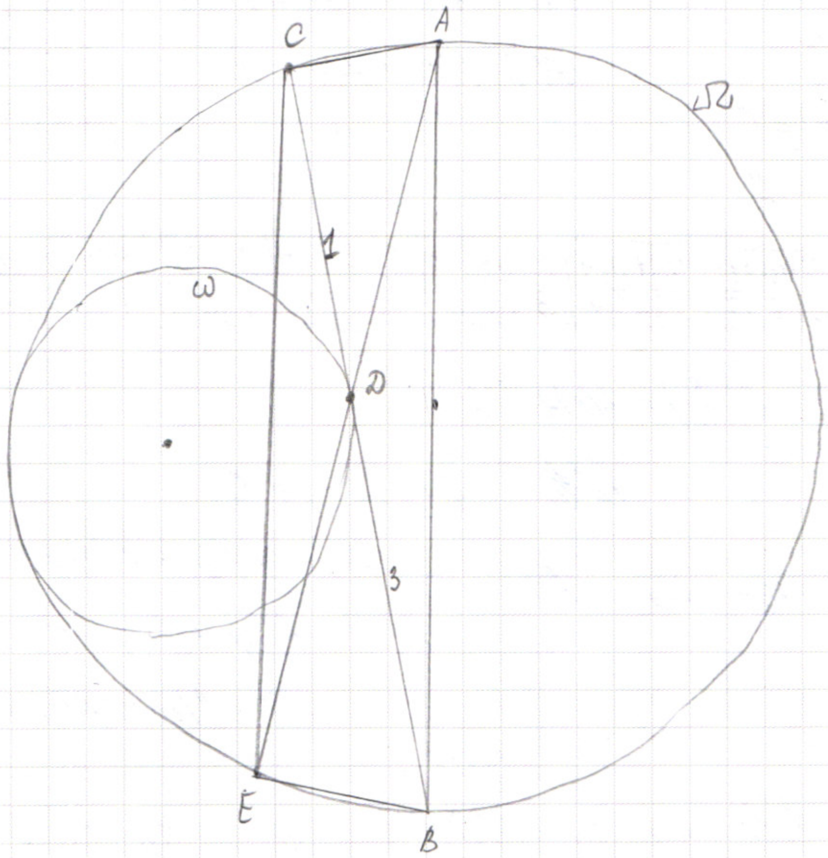
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{5x-1+3(x-1)}{2}, \ x\geq 1 \\ y=\frac{5x-1+3(1-x)}{2}, \ x<1 \\ y=\frac{5x-1-3(x-1)}{2}, \ x\geq 1 \\ y=\frac{5x-1-3(1-x)}{2}, \ x<1 \end{array}\right.$$

$\frac{8x-4}{2}=4x-2$

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=-\frac{1}{18} \end{cases}$$





$2x^2-x-1\leq ax+b\leq x+|2x-1|$ $\qquad x \quad \left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

$$\begin{cases} ax+b\geq 2x^2-x-1 \\ ax+b\leq x+|2x-1| \end{cases}$$

1) $y_1=2x^2-x-1$, $x_B=\frac{1}{4}$, $(2x+1)(x-1)$ точки $(1;0)$ $(-\frac{1}{2};0)$

2) $y=x+|2x-1|$, $y=\begin{cases} x+2x-1, & x\geq\frac{1}{2} \\ x-2x+1, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$

$$y=\begin{cases} 3x-1, & x\geq\frac{1}{2} \\ -x+1, & x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

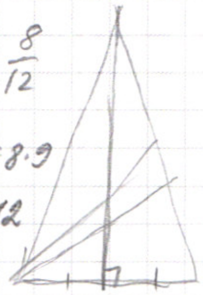
№2. Δ, $P=1200$, Z, бисс. $\perp$ мед.

$299-201+1=$

$\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$

$12\cdot 6=8\cdot 9$

$72=72$



$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}+b$

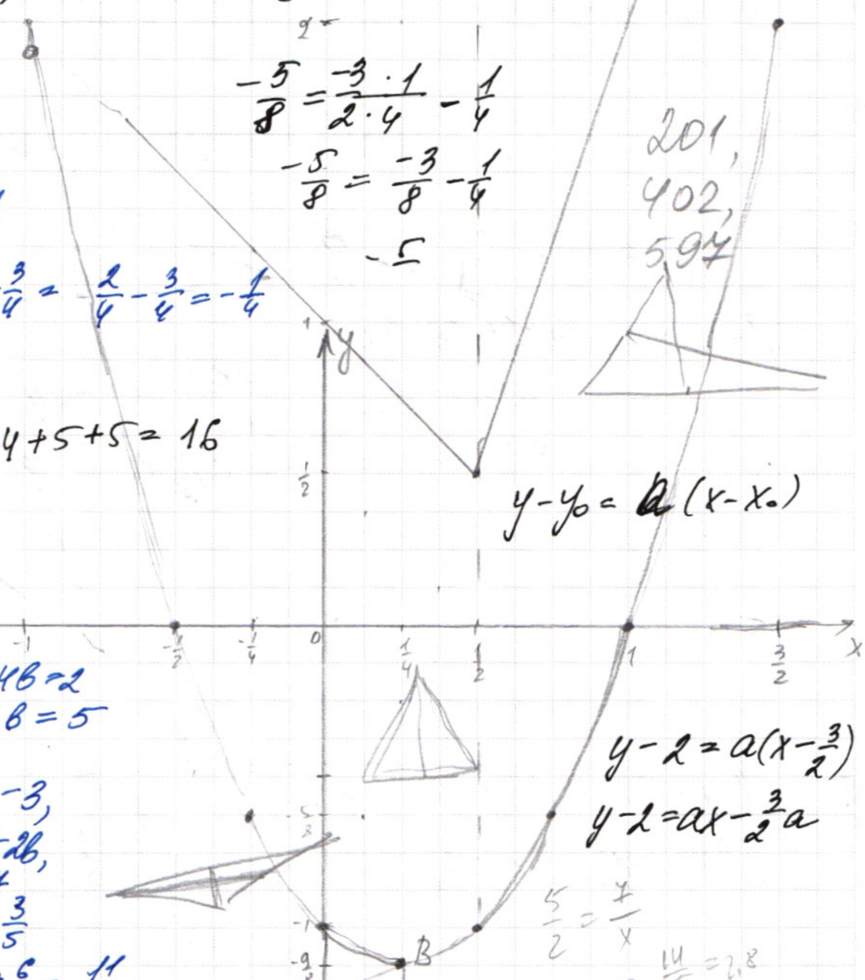
$b=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8}=\frac{-3\cdot 1}{2\cdot 4}-\frac{1}{4}$

$-\frac{5}{8}=\frac{-3}{8}-\frac{1}{4}$

-5

201, 402, 597



$2+4+5+5=16$

$y-y_0=a(x-x_0)$

$\cancel{y=\frac{1}{2}}$ $\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b \\ -\frac{5}{8}=-\frac{1}{4}a+b \mid \cdot 8\end{cases}$

$\begin{cases}a+2b=1, \\ -5=-2a+b\end{cases}$ $\begin{cases}2a+4b=2 \\ 2a-b=5\end{cases}$

$\begin{cases}5b=-3, \\ a=1-2b,\end{cases}$ $b=-\frac{3}{5}$

$\begin{cases}a=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}\end{cases}$

$y-2=a(x-\frac{3}{2})$

$y-2=ax-\frac{3}{2}a$

$y=ax+2-\frac{3}{2}a$

$y=\frac{11}{5}x-\frac{3}{5}$

$y(\frac{3}{2})=\frac{11}{5}\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{5}=\frac{33}{10}-\frac{6}{10}=2.7$

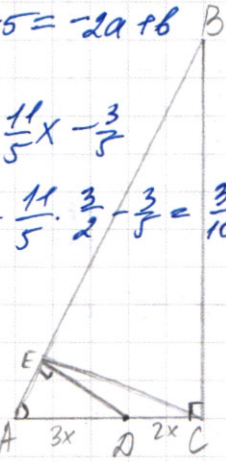
$\frac{5}{2}=\frac{7}{x}$

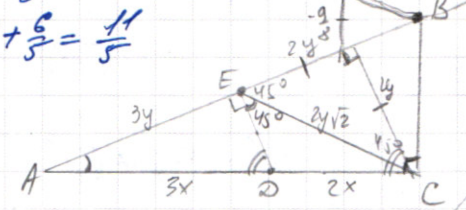
$x=\frac{14}{5}=2.8$

$\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$

$\frac{3}{2}$ 2

0 -1





$EC=2y\sqrt{2}=\frac{2\cdot 5}{\sqrt{29}}x\sqrt{2}=\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{29}}x$

$\cancel{10y^2+4y^2=}$

$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2};2$

$(5y)^2+(2y)^2=(5x)^2$

$25y^2+4y^2=25x^2$

$29y^2=25x^2$

$y^2=\frac{25x^2}{29}$

$y=\frac{5}{\sqrt{29}}x$

$\cancel{ED=}$

$AE=\frac{15}{\sqrt{29}}x$

$a=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$ED=\sqrt{9x^2-9\cdot\frac{25}{29}\cdot x^2}=$

$=\sqrt{9x^2(1-\frac{25}{28})}=3x\sqrt{\frac{4}{28}}=\frac{6x}{\sqrt{29}}$

$\boxed{y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}}$ $x=\frac{3}{4}$

$tg\angle BAC=\frac{ED}{AE}=\frac{6x\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot 15x}=\frac{6}{15}$

$y=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=$

$y=2\cdot\frac{9}{16}-\frac{3}{4}+1=\frac{9}{8}-\frac{6}{8}-1$

$x=\frac{3}{2}$; $2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1=$

$=\frac{-15}{16}-\frac{1}{4}=$

$\begin{cases}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b, \\ 2=\frac{3}{2}a+b,\end{cases}$ $\begin{cases}1=a+2b, \\ 4=3a+2b,\end{cases}$ $\{$

$\cancel{2b}+a-\cancel{2b}-3a=1-4$

$-2a=-3$, $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a=\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a, b, c;$ $a = \frac{b}{q}$ ~~b=~~ $b = b$ $c = bq$, $d = bq^2$

bq^2 – корень $ax^2 + 2bx + c = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{a} = \frac{-2b\cdot q}{b} = -2q$ ~~d = bq²~~

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{bq}{a} = \frac{bq\cdot q}{b} = q^2$ bq – ?

$D = 4b^2 - 4ac = 4b^2 - 4\cdot\frac{b}{q}\cdot bq = 0 \Rightarrow$ $x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$.

$x = -\frac{b}{a} = \frac{-b\cdot q}{b} = -q;$ $bq^2 = -q,$ $bq = -1,$ $c = -1$

3. $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0, \end{cases}$ $y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)}$

1) $\boxed{y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}}$

2) $x^2 - 4x + y^2 - 4y + x^2 + 3 = 0$ (+4, +4, −8)

$(x-2)^2 + (y-2)^2 + x^2 - 5 = 0$

$2x(x-2) + y(y-4) + 3 = 0$

$\begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2), \\ y - 2x \geq 0, \end{cases}$ ① $\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2, \\ y \geq 2x, \end{cases}$

② $\{$ $2x^2 - 4x + (y^2 - 4y + 3) = 0$

$D = 16 - 4\cdot 2\cdot(y^2 - 4y + 3) = 8(2 - (y^2 - 4y + 3)) =$

$= 8(-y^2 + 4y - 1) = -8(y^2 - 4y + 1)$

① $y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$\begin{cases} y^2 + (1-5x)y + (4x^2 + 2x - 2) = 0 \\ D = (5x-1)^2 - 4(4x^2 + 2x - 2) = \\ = 25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8 = \\ = 9x^2 - 18x + 9 = 9(x^2 - 2x + 1) \end{cases}$

$(y-2x)^2 = y^2 - 4xy + 4x^2$

$(y-2)^2 + (x-2)^2 + x^2 = 5$ ~~(x;y) = (2;2)~~

$y_{1,2} = \frac{(5x-1) \pm \sqrt{9(x-1)^2}}{2} = \frac{5x - 1 \pm 3|x-1|}{2};$ $\left[\begin{array}{l} y = \frac{5x-1+3x-3}{2}, x > 1 \\ y = \frac{5x-1+3(1-x)}{2}, x < 1 \\ y = 5x - 1 - 3x - \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)