МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. x^2 $\quad x^2-6xy+6xy \quad 6xy-x^2=-x(x-6y)$

$x(x-6y)+6xy+2y^2-12x-4y+20=0 \quad 1=\frac{1}{c}$

$x(x-6y)$ $\quad x^2-12x$

$\sqrt{2}y\cdot p=2 \quad p=$

$(\sqrt{2}y)^2-4y+1^2$

$b^2=ac \quad 0=0 \quad -y^2+2y+8$

$(\sqrt{2}y)^2-4y+1$

$\sqrt{x-6y} \quad x^2-12xy+36y^2$

$\sqrt{2} \quad \sqrt{2}$

$(x-$ $\quad a;\ b;\ c;\ \frac{b}{a} \quad \frac{b}{a}=\frac{b}{ac} \quad -y^2+2y-1+9$

$(x-6y)(x-6y)=x^2-6xy-6xy+36y^2$

$1=\frac{1}{c} \quad -y^2+2y$

$\left(\frac{b}{a}\right)^3= \quad ab=\frac{b}{a} \quad a=\frac{c}{a} \quad a^2+\sqrt{2}ab+2b^2=18$

$\sqrt{2}y \quad (x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2=4^2 \quad \cancel{a=\sqrt{xy-a+6}} \quad a^2=c \quad (\sqrt{2}b)$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6+6-6y \quad a^2+2\sqrt{2}ab+2b^2=18+2\sqrt{2}ab$

$x-6+6(1-y$

$(a+\sqrt{2}b)^2=18$

$x\geq 6y$

$(x-6y)^2$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad x+6-6(y-1)$

$x-6y$

x^2

$\cancel{x-6y=a}$

$x(x-6)+2y(y-1)-6x-2y+20=0 \quad x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$\cancel{x^2-6x}$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0$

$-13y+19y$

$\cancel{x^2+2y^2-6x}-6x-\cancel{2y}-2y+20=0 \quad (x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

$$\begin{cases} x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0 \\ x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0 \end{cases}$$

$(x-y)(x-y-4)$

$x^2-xy-4x-xy+y^2+4y \quad x(x-13y)+x-13y+19y$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$

$-13xy-13x-34y^2-10y+26=0$

$x^2(x+1)+6y(6y+1)$

$36y^2+6y-6$

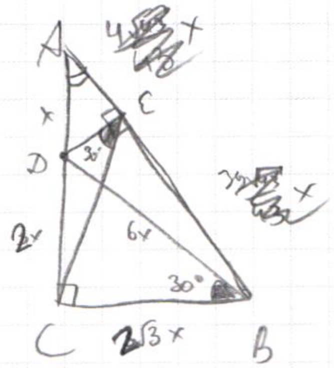
$x^2+2y^2-12x-4y=x^2-8x$

☑ черновик ☐ чистовик

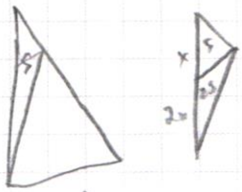
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

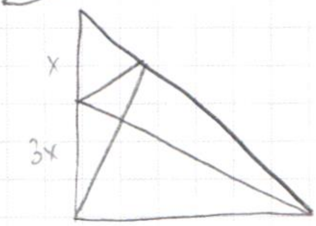
(Нумеровать только чистовики)



$\sqrt{(4x)^2+(3\sqrt{3}x)^2}=\sqrt{16x^2+27x^2}=\sqrt{43x^2}=\sqrt{43}x$



$\begin{array}{l}27\\16\\\hline 43\end{array}$



$y=\sqrt{x^2+4x^2-2x^2\cos\gamma}$

$\operatorname{tg} A=\frac{BC}{AC}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

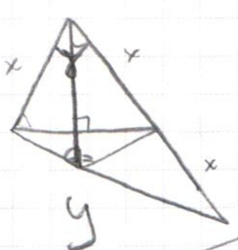
$\sqrt{5x^2-2x^2\cos\gamma}=\sqrt{x^2(5-2\cos\gamma)}$

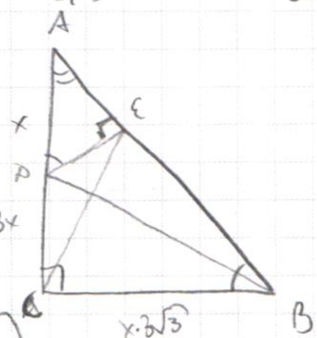
$\frac{4\sqrt{43}}{43}$ $\frac{43\sqrt{43}}{43}$

$\frac{43\sqrt{43}}{43}-\frac{4\sqrt{43}}{43}=\frac{39\sqrt{43}}{43}$

300

$x\sqrt{5-2\cos\gamma}$





$\triangle BCA \sim \triangle DEA$

$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

$\Updownarrow$

$\frac{2\sqrt{3}x}{DE}=\boxed{\frac{\sqrt{21}x}{x}=\frac{3x}{AE}}$

$y=\sqrt{5x^2-4x^2\cos\gamma}$

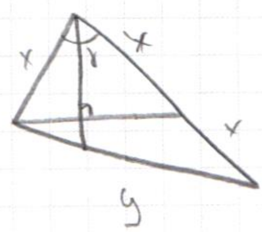
$\frac{3\sqrt{3}x}{DE\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)x}=\frac{\sqrt{43}x}{x}=\frac{4x}{AE}$

$x^2=\frac{9}{5}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\frac{AC}{AE}=\sqrt{43}$

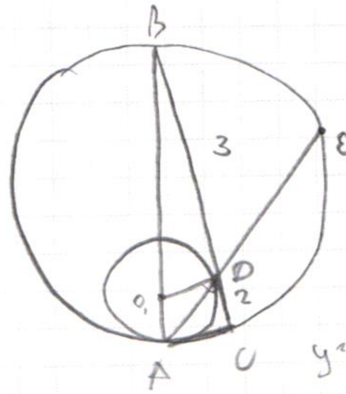
$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sqrt{43}$



$\frac{3}{\sqrt{21}}=\frac{3\sqrt{21}}{21}=\frac{\sqrt{21}}{7}$

$\frac{4x}{\left(\frac{4\sqrt{43}}{43}\right)}x$



$\frac{10\cdot 3\sqrt{5}}{15}$

$3=\sqrt{6}\,DE$

$\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$

$y=\sqrt{x^2+4x^2-4x^2\cos\gamma}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

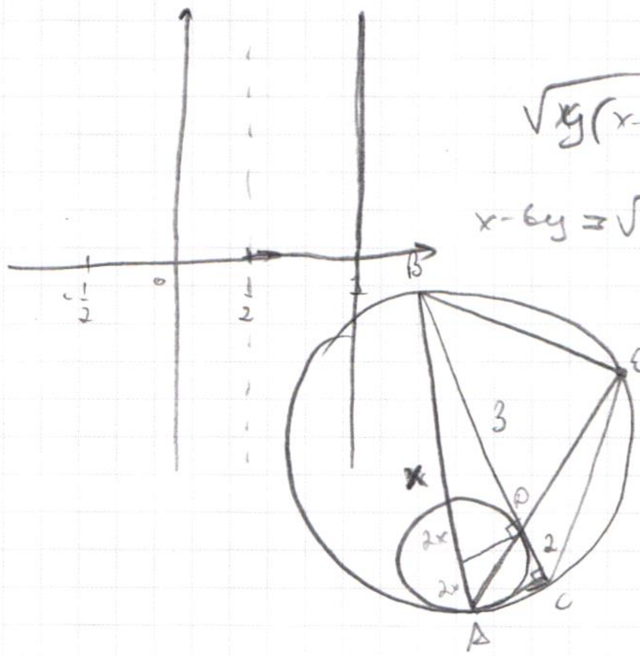
$|2x-1|=0$

$x=\frac{1}{2}$

$\sqrt{y(x-6)-(x-6)}$

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x\geq\frac{1}{2}$:

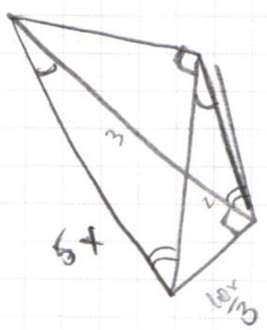


$8x-12x+6=-4x+6$

$8x-6(2x-1)=8x-12x+6$

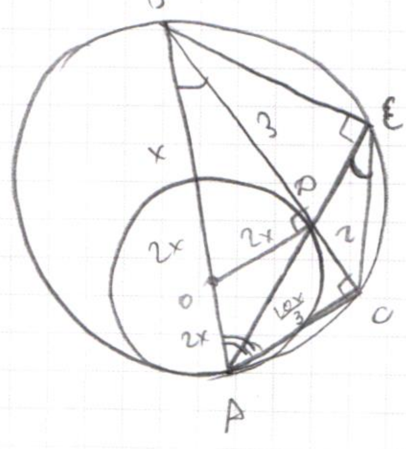
$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

$\frac{\frac{10x}{3}}{5x}=$



$\sin\alpha=\frac{2}{3}$

$\alpha=\arcsin\frac{2}{3}$



$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$\begin{cases} x^2+ \\ x-6y\geq 0 \end{cases}$

$7\sqrt{5}/3$

$\sqrt{y-1}=a$

$\sqrt{x-6}=b$

$3^2=x\cdot 5x$

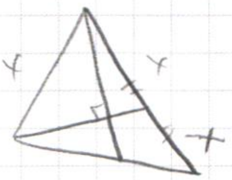
$9=5x^2$

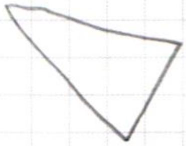
$x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$x-6y=ab$

$a^2+2b^2=18$

$a^2=18-2b^2$





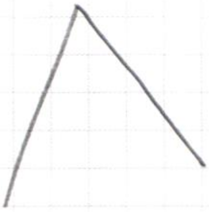
$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)$

$-8x^2+6x+7$

$x_b=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$



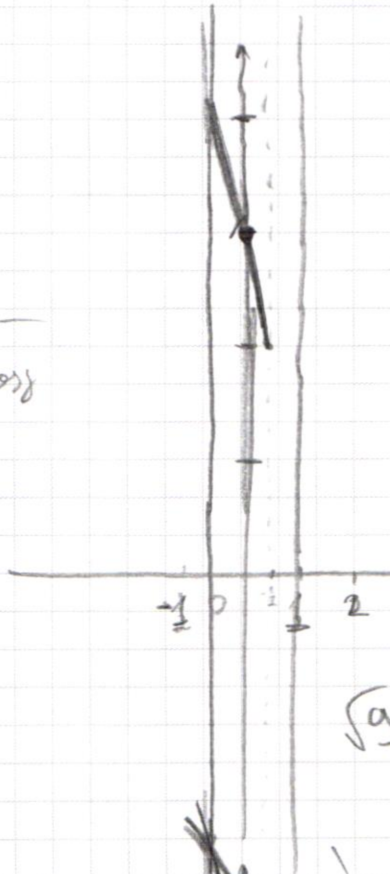
$ax+b \geq$

$x^2-12xy+36y^2=(x-6)(y-1)$

~~$x^2-12xy+36y^2=xy-x-6y+6$~~

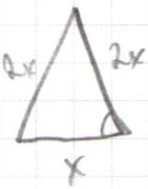
~~ax - пучок прямых~~

$x^2-13xy+36y^2+x+6y-6=0$



$\sqrt{5x^2-4x^2\cos\gamma}$

$x\sqrt{5-4\cos\gamma}$



$\cos\gamma=1 \Leftrightarrow \gamma=0°$

$\cos\gamma=\frac{5}{4}$

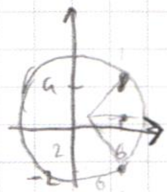
$\cos\gamma=\frac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{l}\cos\gamma=1\\ \cos\gamma=\frac{1}{4}\\ \cos\gamma=\frac{5}{4}\end{array}\right.$

$\sqrt{9}$

$-8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{2}+7$ 20

$=-2+3+7$



$\sqrt{1}$

$\sqrt{4}$ $\in \mathbb{Z}$

$\sqrt{0}$

5+4

$\cos\gamma=-1$

$\gamma=180$

$-4\cdot\frac{1}{2}+6=-2+6=4$

$|x-6|=3\sqrt{2}$

$x=3\sqrt{2}+6$

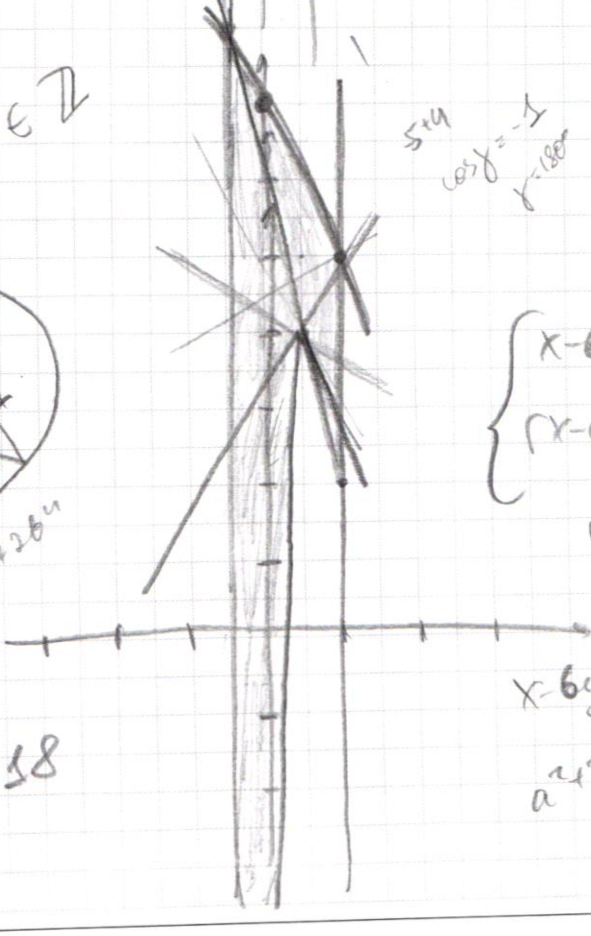
$2(y-1)^2=18$

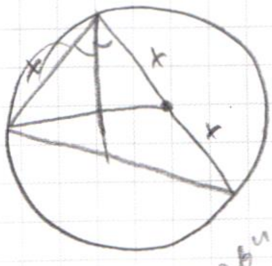
$(y-1)^2=9$

$|y-1|=3$

$\left[\begin{array}{l}y=4\\ y=-2\end{array}\right.$

$-4x+6$





$\begin{cases}x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}\\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18\end{cases}$

$8x-6(1-2x)$

$y=1$

$8x-6+12x=20x-6$

$a^4+2b^2-2b^2+2b^4$

$=$

$x-6y=\sqrt{ab}$

$|x-6|=3\sqrt{2}$ $y=1$

$(x-6)^2=18$

$a^4+2b^4=18$

$a^2+2b^2=18$ $\cos\gamma=\frac{1}{4}$

$y=\sqrt{x^2+4x^2-4x^2\cdot\frac{1}{4}}=y=\sqrt{5x^2-x^2}$

$y=\sqrt{4x^2}$ $y=2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

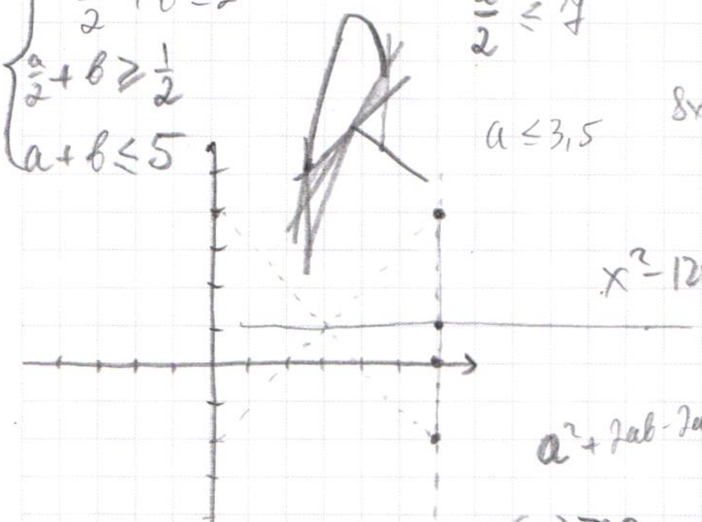
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} -\frac{a}{2}+b \le 2 \\ \frac{a}{2}+b \ge \frac{1}{2} \\ a+b \le 5 \end{cases}$

$\frac{a}{2} \le 7$

$a \le 3{,}5$



$8x-6|2x+1| = \begin{cases} -4x+6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

$x_6 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$-8x^2+6x+7$

$f(0)=7$

$f(1)=5$

$f(-\frac{1}{2}) = -2+3+7 = 2$

$x^2-12xy+36y^2=ab$

$a^2+2ab-2ab+b^2+b^2=18$

$-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 = -\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7 = \frac{9}{8}+7$

$x=\frac{1}{2}$

$f(-\frac{1}{2}) \ge 2$

$f(0) \ge 4$

$f(1) \ge 5$

$x \ge \frac{1}{2}$

$(a-b)^2+b($

$(0-6)^2$

$-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7$

$\frac{9+56}{8}$

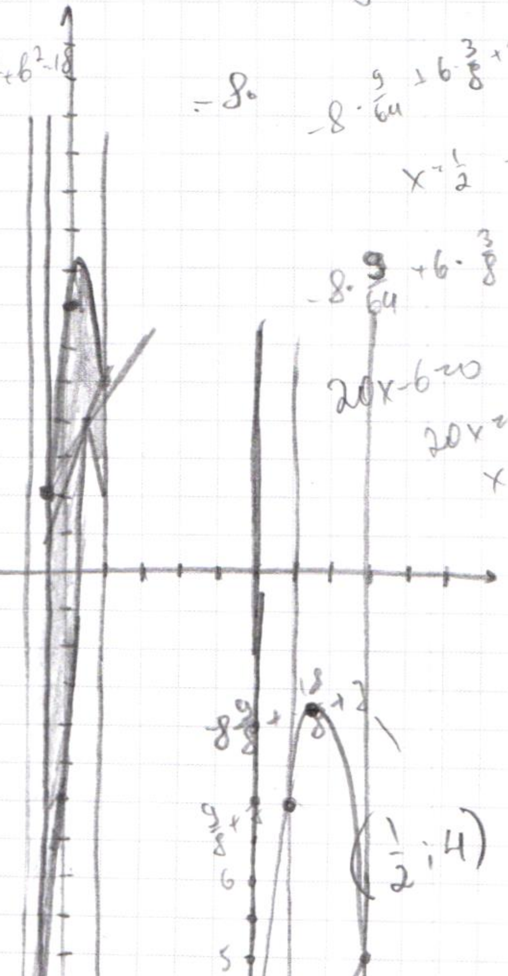
$20x-6=0$

$20x=6$

$x=\frac{6}{20}$

$x=0{,}3$

$\begin{cases} ax+b \ge 4 \\ ax+b \end{cases}$



$x-6y=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=18$

$-\frac{a}{2}+b \le 2$

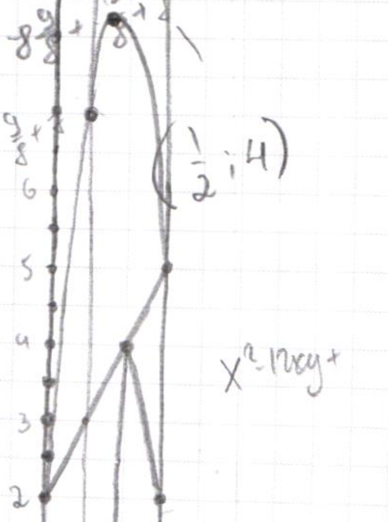
$2=-\frac{k}{2}+3$

$-\frac{k}{2}=-1$

$k=2$

При $x \ge \frac{1}{2}$

$\begin{cases} -4x+6 \ge ax+b \\ ax+b \le -8x^2+6x+7 \end{cases}$



$(\frac{1}{2};4)$

$x^2-12xy+$

$x^2-12xy+36y^2=ab$

$a^2+2b^2=18$

$(-\frac{1}{2};2);(\frac{1}{2};4)$

$8x^2+(a-6)x+b-7 \le 0 = (a-\sqrt{2}b)(a+\sqrt{2}b)+2b^2(b^2-1)$

$a^4+2b^4 = a^4+2b^2-2b^2+2b^4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \cancel{x^2} - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ \cancel{x^2} + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

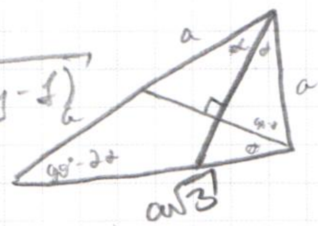
$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2} - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ \cancel{x^2} + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$2x^2 + y^2 = 4$ a

$-13xy + 34y^2 + 13x + 10y - 26 = 0$

$\sqrt{(x-6)(y-1)}$



$x \geq 6y$

$6y \leq x$

$y \leq \frac{x}{6}$

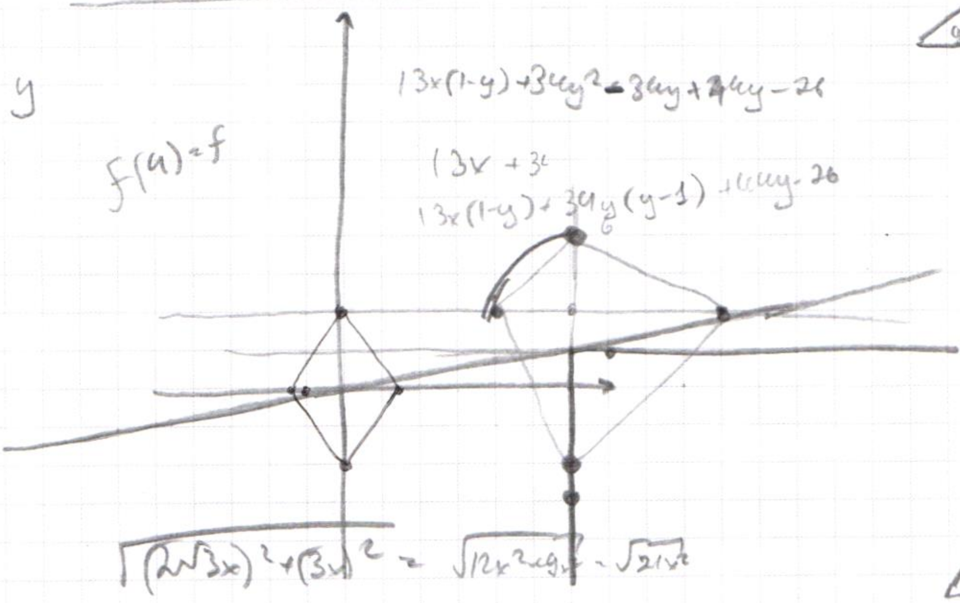
y

$f(u) = f$

$13x(1-y) + 34y^2 - 34y + 44y - 26$

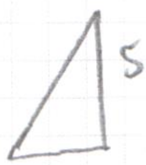
$13x + 34$

$13x(1-y) + 34y(y-1) + 44y - 26$



$g = 5x^2$

$x = \frac{3\sqrt{5}}{5}$



$2x = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\sqrt{(2\sqrt{3}x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{12x^2 + 9x^2} = \sqrt{21x^2}$

$2x^2 - 26xy + 72y^2 + 12y + 2x - 12 = 0$

$x^2 + 2y^2$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

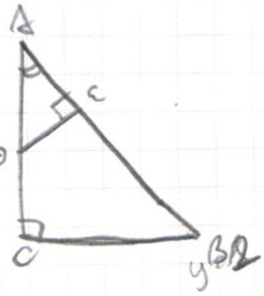
$(0-6)^2$

$2{,}5x = \frac{6\sqrt{5} \cdot 5}{4}$

$\frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 2} = \frac{5}{4}$

$9 \quad -12$

$13x(9-y) + 0$



$(9-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0$

$-13xy + 34y^2 + 13x + 10y - 26 = 0$

$(x-6)^2 + 2(2-1)^2 = 18$

$9 + 2(y-1)^2 = 18$

$2 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}$

$2(y-1)$

$\frac{6\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{5}{3}$

$\frac{30\sqrt{5}}{4}$

$(x-6)^2 = 16$

$x^2 + 70y^2 + 16y + 14x + 20 = 0$

$2\sqrt{5}$

$$\left[\begin{array}{l} x - 6 = 4 \\ x - 6 = -4 \end{array}\right.$$

$x = 10$
$x = 2$

$\frac{5 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{3\sqrt{5}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$ax^2-2bx+c=0$; a, b, c - члены геометрической прогрессии

$D=(-2b)^2-4ac=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$. Пусть q - знаменатель прогрессии, тогда $b=a\cdot q$ и $c=a\cdot q^2$ и $D=4((a\cdot q)^2-a\cdot aq^2)=$ $=a^2q^2-a^2q^2=0$, тогда уравнение имеет единственный корень $x=\frac{2b}{2a}=\frac{b}{a}$. По условию, $x=\frac{b}{a}$ - 4й член геометрической прогрессии и $\frac{b}{a}=a\cdot q^3$. Также $q=\frac{b}{a}=\frac{a\cdot q}{a}$ и $\cancel{q=\frac{c}{b\cdot a}}=$ $q=\frac{b:a}{c}=\frac{a\cdot q^3}{a\cdot q^2}$, и тогда $\frac{b}{a}=\frac{b}{ac} \mid :\frac{b}{a}$ (a, b $\neq 0$, так как в ~~таком~~ противном случае геометрическая прогрессия невозможна) $\Leftrightarrow 1=\frac{1}{c}\Rightarrow c=1$ (3й член прогрессии)

Ответ: 1.

№4

Дано.

ΔABC - прямоуг.

AB - гипотенуза

$D\in AC$

$E\in AB$

$AD:AC=1:3$

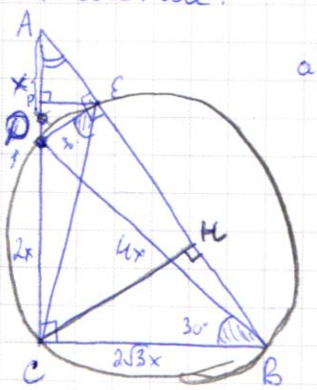
$DE\perp AB$

$\angle CED=30°$

а) $tg\angle BAC=?$

б) $AC=\sqrt{7}$; $S_{BCED}=?$

Решение:



а) Пусть $AD=x$, тогда $DC=AC-AD=$ $=3x-x=2x$ ($AD:AC=1:3=(x):(3x)$)

В 4х угольнике CDEB $\angle BCD+\angle BED=$ $=90°+90°=180°\Rightarrow$ все его вершины лежат на одной окружности $\Rightarrow\angle CED=30°=\angle CBD$ (вписанные, опираются на $\cup CD$). В прямоугольном ΔDCB ($\angle C=90°$) $\sin\angle DBC=\sin 30°=\frac{1}{2}=\frac{DC}{DB}=\frac{2x}{DB}\Rightarrow DB=4x$. По теореме Пифагора для ΔDCB: $DB^2=DC^2+BC^2\Rightarrow BC=\sqrt{DB^2-DC^2}=\sqrt{(4x)^2-(2x)^2}$

$=\sqrt{12x^2}=2\sqrt{3}x$. В треугольнике $\triangle ABC$ $tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $AB^2=AC^2+BC^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{(3x)^2+(2\sqrt{3}x)^2}=\sqrt{9x^2+12x^2}=\sqrt{21x^2}=x\sqrt{21}$.

Рассмотрим $\triangle CBA$ и $\triangle EDA$: 1. $\angle EAD$ - общий. 2. $\angle DEA=$ $=90^\circ=\angle BCA$ ($DE\perp AB$ по условию, AB - гипотенуза $\triangle ABC$) $\Rightarrow \triangle CBA \sim \triangle EDA$ (по 2м углам) $\Rightarrow \frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}x}{x}=\frac{3x}{AE}=\sqrt{21}\Rightarrow$

$\Rightarrow AE=\frac{3}{\sqrt{21}}x=\frac{3\sqrt{21}}{21}x=\frac{\sqrt{21}}{7}x$. $BE=AB-AE=\sqrt{21}x-\frac{\sqrt{21}}{7}x=\frac{6\sqrt{21}}{7}x$. $\triangle AEC$ и $\triangle BEC$ имеют общую высоту $CH\Rightarrow \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{BE}{AE}=\frac{(6\sqrt{21}:7)x}{(\sqrt{21}:7)x}=6$.

Пусть $S_{\triangle AEC}=3S_0$, тогда $S_{\triangle BEC}=18S_0$ и $S_{\triangle ABC}=21S_0$. $\triangle AED$ и $\triangle CED$ имеют общую высоту $EP\Rightarrow \frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle AED}}=\frac{CD}{AD}=\frac{2x}{x}=2$.

Пусть $S_{\triangle CED}=2S$, а $S_{\triangle AED}=S$, тогда $S_{\triangle CED}+S_{\triangle AED}=3S=3S_0$ $\Rightarrow S=S_0$ и $S_{\triangle CED}=2S_0$. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CED}}=\frac{21S_0}{2S_0}=\frac{21}{2}$. $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC=$ $=\frac{1}{2}\cdot 3x\cdot 2\sqrt{3}x=3\sqrt{3}x^2$. По условию, $AC=\sqrt{7}$ и $AC=3x$, т.е. $\sqrt{7}=3x\Rightarrow x=\frac{\sqrt{7}}{3}$ и $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2=3\sqrt{3}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. $S_{\triangle CED}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{21}=$

$=\frac{2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}}{21}=\frac{2\cdot 7\sqrt{3}}{63}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{\triangle CED}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5

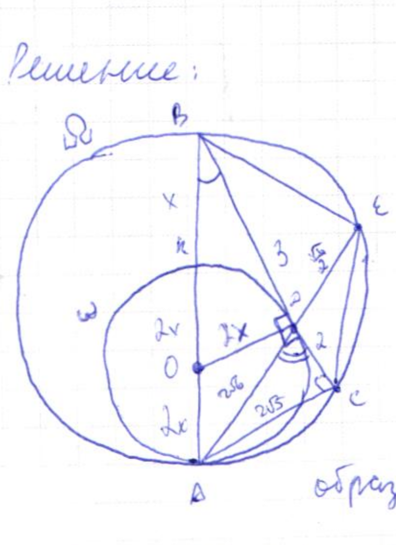
Дано:

Ω и ω - окружности

$\Omega\cap\omega=A$ (внутренним образом касаются)

AB - диаметр Ω

Решение:



Пусть $AB\cap\omega=K$, а O - середина AK и O - центр ω, а также AK - диаметр ω (диаметры окружностей, касающихся внутренним образом и проходящих через точку касания, лежат на одной прямой)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

BC - касательная к ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 2$; $BD = 3$

$R_\Omega = ?$; $R_\omega = ?$

$S_{BACE} = ?$

По свойству касательной и секущей из одной точки: $BD^2 = AB \cdot KB$ (1). ~~Пусть~~ ~~По обобщённо~~ $OD \perp BC$ (радиус, проведённый в точку касания), $\angle ACB = 90^\circ$ (AB - диаметр Ω, $B \in \Omega$) $\Rightarrow \angle ACB + \angle ODC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow OD \parallel AC$ (односторонние).

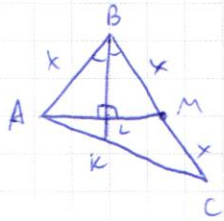
По обобщённой теореме Фалеса для угла ABC и прямых OD, AC ($OD \parallel AC$): $\frac{BO}{OA} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$. Пусть $OA = 2x$, тогда $BO = 3x$, $OK = 2x$ (радиус ω, как и AO) и $BK = BO - OK = 3x - 2x = x$. Из уравнения (1) следует: $3^2 = (AO + OB)KB \Leftrightarrow 9 = (3x + 2x)x \Leftrightarrow 9 = 5x^2 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt5}{5}$ и $R_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{5x}{2} = \frac{(3\sqrt5 : 5)5}{2} = \frac{3\sqrt5}{2}$. $R_\omega = 2x = \frac{6\sqrt5}{5}$. Рассмотрим $\triangle BOD$ и $\triangle BCA$:

1. $\angle OBD$ - общий. 2. $\angle ODB = 90^\circ = \angle ACB \Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle BCA$ по 2м углам $\Rightarrow \frac{OD}{AC} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2x}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow AC = \frac{10x}{3} = \frac{10 \cdot 3\sqrt5 : 5}{3} = \frac{30\sqrt5}{15} = 2\sqrt5$. По теореме Пифагора для $\triangle ACD$ ($\angle ACD = 90^\circ = \angle ACB$): $AD^2 = AC^2 + CD^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AD = \sqrt{2^2 + (2\sqrt5)^2} = \sqrt{4+20} = \sqrt{24} = 2\sqrt6$. По свойству пересекающихся хорд: $AD \cdot DE = BD \cdot DC \Leftrightarrow 2\sqrt6 \cdot DE = 3 \cdot 2 \Leftrightarrow 6 = 2\sqrt6 \cdot DE \Leftrightarrow$
$\Rightarrow DE = \frac{\sqrt6}{2}$. В прямоугольном $\triangle ADC$ $\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt5}{\sqrt6}$)
и $S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC \cdot \sin\angle ADC = \frac{1}{2}\left(2\sqrt6 + \frac{\sqrt6}{2}\right) \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt5}{\sqrt6} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt6}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt5}{\sqrt6} = \frac{25\sqrt5}{4}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt5}{2}$; $R_\omega = \frac{6\sqrt5}{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt5}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2



В $\triangle ABC$ AM – медиана ($AB = x$), BK – биссектриса $BK \cap AM = L$. В $\triangle ABM$ BL – высота и биссектриса $\Rightarrow$ $\triangle ABM$ – равнобедр. (осн. AM) $\Rightarrow AB = BM = MC = x$. Так как $|AB|, |BC| \in \mathbb{Z}$ (по усл.) и $P_{\triangle ABC} = 900 \in \mathbb{Z}$, то $AC \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z}$.

По теореме косинусов для $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle ABC} = \sqrt{x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos\angle ABC} = \sqrt{5x^2 - 4x^2\cos\angle ABC} = x\sqrt{5 - 4\cos\angle ABC}$, так как $x \in \mathbb{Z}$, то и $AC \in \mathbb{Z}$, то и $\sqrt{5 - 4\cos\angle ABC} \in \mathbb{Z}$. $-1 < \cos\angle ABC < 1$ (для треугольника) $\Rightarrow \sqrt{5-4} < \sqrt{5 - 4\cos\angle ABC} < \sqrt{5+4} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5 - 4\cos\angle ABC} < 3$, подходит только $\sqrt{5 - 4\cos\angle ABC} = 2 \Leftrightarrow 5 - 4\cos\angle ABC = 4 \Rightarrow 4\cos\angle ABC = 1 \Rightarrow \cos\angle ABC = \frac{1}{4}$ и тогда $AC = x\sqrt{5 - 4 \cdot \frac{1}{4}} = x\sqrt{5-1} = 2x \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный и $AC = 2x = BC$. $P_{\triangle ABC} = 900 = 5x \Rightarrow x = 180$ и $2x = 360$, т.е. существует единственный такой треугольник.

Ответ: 1

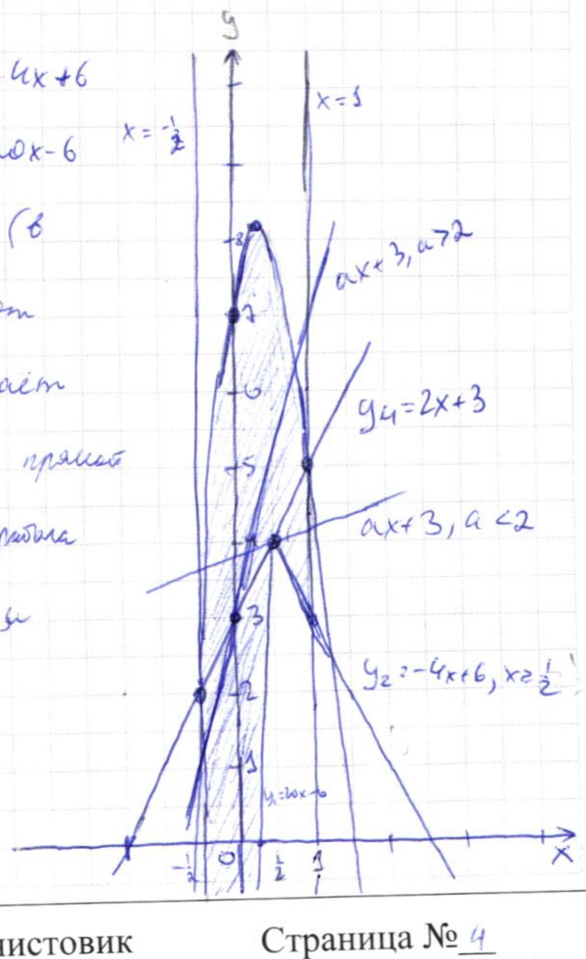
№6

$$8x - 6|2x-1| = \begin{cases} -4x+6, & x \geq \frac{1}{2}, \quad y_1 = -4x+6 \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2}, \quad y_2 = 20x-6 \end{cases}$$

$|2x-1| = 0$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$



y_1 задаёт прямую (в полуплоскости справа от прямой $x = \frac{1}{2}$ $y_1 = -4x+6$), y_2 задаёт прямую (в полуплоскости слева от прямой $x = \frac{1}{2}$ $y_2 = 20x-6$). $y_3 = -8x^2+6x+7$ – парабола с ветвями, направленными вниз и вершиной $x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$. $y_1(\frac{1}{2}) = y_2(\frac{1}{2}) = -4 \cdot \frac{1}{2} + 6 = 4 = 20 \cdot \frac{1}{2} - 6$. $y_1(1) = -4+6 = 2$

$y_2(0) \Leftrightarrow 20x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_3(1)=5$

$y_3\left(\frac{3}{8}\right) = -8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7 = \frac{-9}{8}+\frac{18}{8}-7 = \frac{9}{8}+7 = 8\frac{1}{8}$. $y_3(0)=7$. $y_3(-\frac{1}{2}) =$ $\cancel{= -8-6+7} = -8\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{2}+7 = -2+3+7=2$. Построим графики функций в плоскости xOy. Чтобы неравенство из условия выполнялось для любых $x\in[-\frac{1}{2};1]$, прямая $ax+b$ должна быть ~~выше~~ не ниже „ломаной", образованной прямыми y_1 и y_2, но не выше $y_3=-8x^2+6x-7$ (т.е. попадать в заштрихованную область). Точки $(-\frac{1}{2};2)$, $(\frac{1}{2};4)$ проходят через прямую $y_4=2x+3$

$(2=2\cdot(-\frac{1}{2})+3 \Leftrightarrow 2=3-1 \to$ верно; $4=2\cdot\frac{1}{2}+3 \Leftrightarrow 4=4 \to$ верно), однако точка $(1;5)$ также лежит на этой прямой: $5=2\cdot1+3$ - верно. При $b=3$ и $a>2$, $f(1)^{*}>5$ и условие не выполнено или $a<2$, тогда $f(-\frac{1}{2})>2$, значит, подходит только $a=2$. ~~Если $ax+b \Leftrightarrow 2x-$~~ $a=2$ и $b>3$, то $f(-\frac{1}{2})>2$, и условие не выполнено; а при $a=2$ и $b<3$ ~~прямая~~ $f(\frac{1}{2})<4$, значит, годится только $b=3$, т.е. $a=2$; $b=3$

Ответ: $(2;3)$ (т.е. $a=2$ и $b=3$)

№ 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2=18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x-6y}=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases} \text{~~Пусть~~} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2=18-2(y-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2=2(9-(y-1)^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2=2(-y^2+2y+8) \end{cases}$$