МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$a; b; c$ ⁂, четверт. : корень $ax^2 + 2bx + c = 0$

Найти c.

Пусть $a = p$; $b = pq$; $c = pq^2$. (a, b, c - перв., вт. и третий. чл.)

$\Rightarrow ax^2 - 2bx + c = 0$; $px^2 - 2pqx + pq^2 = 0$.

Заметим, что $p \neq 0$, иначе геом. пр. не им смысла $\Rightarrow$ (поскольку все свойства ⁂ не выполняются)

$\Rightarrow x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x - q)^2 = 0 \Rightarrow x = q \Leftarrow$ четвёртый член геом пр. (по условию)

$c = \sqrt{bx} = \sqrt{pq \cdot q}$ $q\sqrt{p} = \sqrt{pq^2} = \sqrt{c}$

$c = \sqrt{c}$ – данное р-во выпол. в случае $c \in \{0; 1\}$, но $c = 0$ мы не рассмотр.

$\Rightarrow c = 1$

Ответ: $c = 1$.

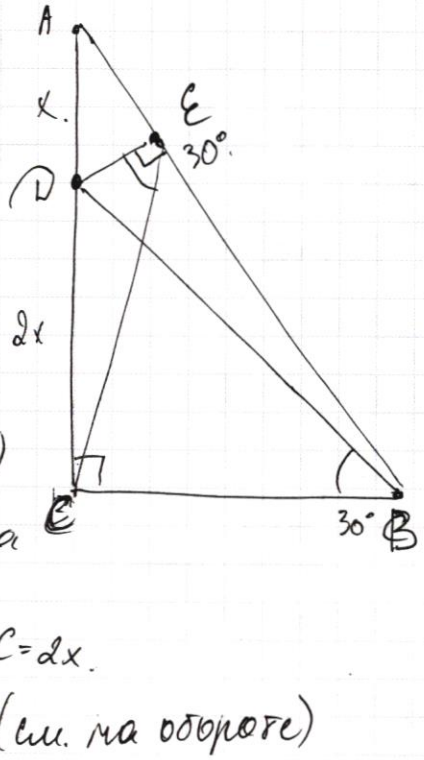
№ 4. а) $\triangle ABC$ - п/у, $\angle C = 90°$.

$D \in AC$; $E \in AB$.

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $DE \perp AB$.

$\angle CED = 30°$

$tg \angle BAC = ?$



Решение

1) $\angle ACB = 90°$; $\angle DEB = 90°$

$\Rightarrow CDEB$ - вписанный ($\angle DCB + \angle DEB = 180°$)

$\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC$ $= 30°$ (вписанные, опир. на одну дугу.)

2) $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Пусть $AD = x$, $AC = 3x \Rightarrow DC = 2x$.

(см. на обороте)

3) ~~$\triangle CDB$ - вписанный, $\angle DCB = 90° \Rightarrow DB$ диаметр опис. окр-ти~~

~~$\Rightarrow$ т.к. $\angle DBC = 30°$, по~~ $\triangle CDB$ - п/у, $\angle DBC = 30°$

$\Rightarrow tg\angle CBD = tg 30° = \frac{2x}{CB} \Rightarrow \frac{2x}{CB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow CB = \frac{6x}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}x.$

4) $tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

б) $AC = \sqrt{7}$; $S_{CED} = ?$

Решение

1) $AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} = AD$, $DC = 2x = \frac{2\sqrt{7}}{3}$; $CB = 2\sqrt{3}x = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

2) $\triangle ABC$: По Th Пифагора: $AB^2 = 9x^2 + 12x^2 = 21x^2$

$\Rightarrow AB = x\sqrt{21} = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{21} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

3) ~~DE~~ $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}} = \frac{DE}{\frac{2\sqrt{21}}{3}} \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{21}}{7\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3 \cdot 7\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

4) $\triangle AED$ - п/у $\Rightarrow$ По Th Пифагора: $AE = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

~~cos∠ADE~~ $\sin\angle ADE = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\angle CDE + \angle ADE = 180°$ (смежные)

$\Rightarrow \sin\angle ADE = \sin\angle CDE = \frac{\sqrt{21}}{7}$

5) $S_{CDE} = \frac{CD \cdot DE}{2} \cdot \sin\angle CDE = \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{2\sqrt{7} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{21}}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $S_{CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№5. Дано: Ω кас $\omega = A$.

AB - диаметр Ω

BC кас $\omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

$CD = 2$; $DB = 3$.

$r_\omega = ?$; $r_\Omega = ?$

$S_{BACE} = ?$

(см. след. лист)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

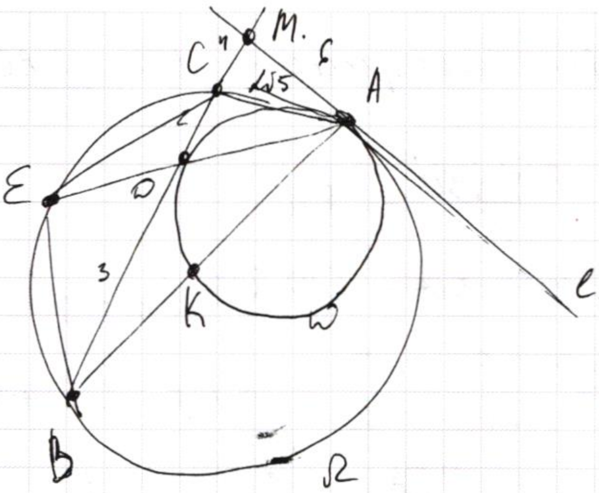
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение:



1) Пусть — l — общая касат. в A к Ω и ω.

тогда: $BC \cap l = M$.

2) $MD = MA$ (отрезки касат. к ω)

=> расм. Ω: $MA^2 = MC \cdot MB$
(касат. и отр. сек.)

=> т.к. $MA = DM$ => $DM^2 = MC \cdot MB$.

$MB = MC + CB = MC + 5$; $DM = MC + CD = MC + 2$.

=> $(MC+2)^2 = MC(MC+5)$ => $MC^2 + 4MC + 4 = MC^2 + 5MC$.

$MC = 4$.

=> $DM^2 = AM^2 = 4\cdot(4+5) = 4\cdot 9$ => $DM = AM = 2\cdot 3 = 6$.

3) $\triangle BAM$ — п/у ($BA \perp l$ — диаметр в т. касания) => По Т. Пифагора:

$AB = \sqrt{AB^2} = \sqrt{MB^2 - MA^2} = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{3\cdot 15} = 3\sqrt5$. => $\boxed{r_\Omega = \frac{1}{2} AB = \frac{3\sqrt5}{2}}$

4) Пусть $BA \cap \omega = K$, тогда: т.к. BC — кас. ω => $BD^2 = BK \cdot BA$

=> т.к. $BK = BA - 2r_\omega$ (BA — диаметр в т. кас. A => O_1 — центр ω и O_2 — центр Ω лежат на AB)

=> $BD^2 = (BA - 2r_\omega)\cdot BA$ =>

$45 - 9 = 36$

=> $9 = 9\cdot 5 - 2r_\omega \cdot 3\sqrt5$ => $6\sqrt5 \cdot r_\omega = 15\cdot 3 - 9$.

$6\sqrt5 \cdot r_\omega = 36$ => $\boxed{r_\omega = \frac{6}{\sqrt5} = \frac{6\sqrt5}{5}}$

5) $\angle BCA = 90^\circ$ (вписанный в Ω, опир. на диам AB)

=> $\triangle ACB$ — п/у => По Т. Пифагора: $AC^2 = AB^2 - CB^2$ => $AC^2 = 45 - 25 = 20$.

=> $AC = 2\sqrt5$.

6) По лемме Архимеда: E — середина $\smile CB$ => AD — бис $\angle CAB$.

7) Пусть $\angle CAB = 2\alpha$, тогда: $\cos 2\alpha = \frac{4\cdot 5 + 9\cdot 5 - 25}{2\cdot 2\sqrt5 \cdot 3\sqrt5} = \frac{20 + 45 - 25}{2\cdot 2\cdot 5\cdot 3} = \frac{40}{4\cdot 5\cdot 3} =$

(см. на обороте)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$= \frac{2}{3}$. $\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{2}{3} = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{3}$

$2\cos^2\alpha = \frac{5}{3} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $(\alpha < 90°)$

8) AD - биссектрисса $\Rightarrow AD = \frac{2 \cdot AC \cdot AB \cos\alpha}{AC + AB} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}}{5\sqrt{5} \cdot 6} =$

$= \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}}{5} = 2\sqrt{6}$.

9) $ED \cdot DA = CD \cdot DB$ (произв. отр. хорд.) $\Rightarrow 2\sqrt{6} \cdot ED = 6$.

$ED = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow EA = ED + AD = \frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

10) $\cos\angle CDA = \frac{4 \cdot 6 + 4 - 4 \cdot 5}{2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{28 - 20}{8 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \angle CDA < 90° \Rightarrow \sin\angle CDA > 0$

$\Rightarrow$ ~~$|\sin\angle CDA|$~~ $\sin\angle CDA = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$ $(\angle CDA < 90°)$

11) $S_{CEBA} = \frac{1}{2} AE \cdot CB \cdot \sin\angle CDA = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} =$

$= \frac{5\sqrt{6} \cdot 5\sqrt{30}}{4 \cdot 6} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $r_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $S_{CEBA} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18. \end{cases}$$ Пусть $a = x - 6$, $b = y - 1$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 6b \geq 0 \\ a^2 - 12ba + 36b^2 = ab \\ a^2 + b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 18 \\ a - 6b \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a - 4b)(a - 9b) = 0 \\ a^2 + b^2 = 18 \\ a - 6b \geq 0 \end{cases}$$ (см. след. лист.)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=4b \\ 16b^2+b^2=18 \\ a-6b\geq 0\end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 81b^2+b^2=18 \\ a-6b\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=4b \\ b^2=\frac{18}{17} \\ 2b\leq 0\end{cases} \\ \begin{cases} a=9b \\ 82b^2=18 \\ 3b\geq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b\leq 0 \\ a=4b \\ b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{17}}\end{cases} \text{(полож. вне подх.)} \\ \begin{cases} a=9b \\ b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{82}} \\ b\geq 0\end{cases} \text{(отриц. вне подх.)}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt{17}} \\ b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{17}}\end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{82}} \\ b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{82}}\end{cases}\end{array}\right.$$

Вернёмся к замене:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt{17}} \\ y-1=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{17}}\end{cases} \\ \begin{cases} x-6=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{82}} \\ y=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{82}}+1\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\frac{6\sqrt{17}-12\sqrt2}{\sqrt{17}} \\ y=\frac{\sqrt{17}-3\sqrt2}{\sqrt{17}}\end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{6\sqrt{82}+27\sqrt2}{\sqrt{82}} \\ y=\frac{\sqrt{82}+3\sqrt2}{\sqrt{82}}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=\frac{102-12\sqrt{34}}{17} \\ y=\frac{17-3\sqrt{34}}{17}\end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{492+54\sqrt{41}}{82} \\ y=\frac{82+6\sqrt{41}}{82}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{102-12\sqrt{34}}{17}; \frac{17-3\sqrt{34}}{17}\right)$; $\left(\frac{492+54\sqrt{41}}{82}; \frac{82+6\sqrt{41}}{82}\right)$.

№2 $P_\triangle = 900$.

одна из биссектрис ⊥ медиане, $a, b, c \in N$.

кол-во таких $\triangle$.

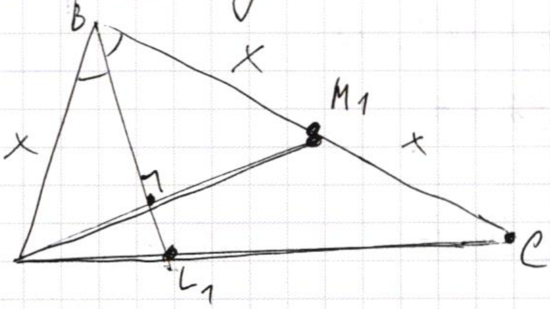
(См. на обороте.)

① $P = a+b+c$ (a, b, c — стороны, причём $a, b, c \in N$)

$$\begin{cases} a+b>c \\ a+c>b \\ b+c>a \end{cases}$$ | по нер-ву треугольника

② Заметим, что медиана и биссектриса выходящие у одной вершины не могут быть перпендикулярны, поскольку тогда, прямая, содержащая медиану будет совпадать с биссектрисой внешнего угла (прямой, её содержащую), а значит медиана будет лежать вне треугольника, что противоречит её опред.!

$\Rightarrow$ Имеет место лишь такой рисунок:



$\Rightarrow$ биссектриса — высота $\Rightarrow$

$\triangle ABM_1$ - р/б $\Rightarrow AB = BM_1 = M_1C = x$.

$\Rightarrow AB + BC = 3x \,\vdots\, 3$

$3x > AC \Rightarrow 3x > \frac{P}{2}$. $\quad 3x > 450$; $\boxed{x > 150}$

Пусть $2x = a$; $x = c$, $AC = b$.

тогда $c > 150$; $\overset{a}{\cancel{2x}} > 300$; $b < 450$.

Если $c+a \,\vdots\, 3$, $P \,\vdots\, 3 \Rightarrow b \,\vdots\, 3$ ($a; b; c \in N$).

Заметим, что если $2x \not\vdots\, 3$, $x \not\vdots\, 3$, то третья сторона обязана $\vdots\, 3$, $\Rightarrow$ а если $x \,\vdots\, 3$, то $2x \,\vdots\, 3$, то третья сторона тоже $\vdots\, 3$.

$\vdots$

(см следующий лист)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

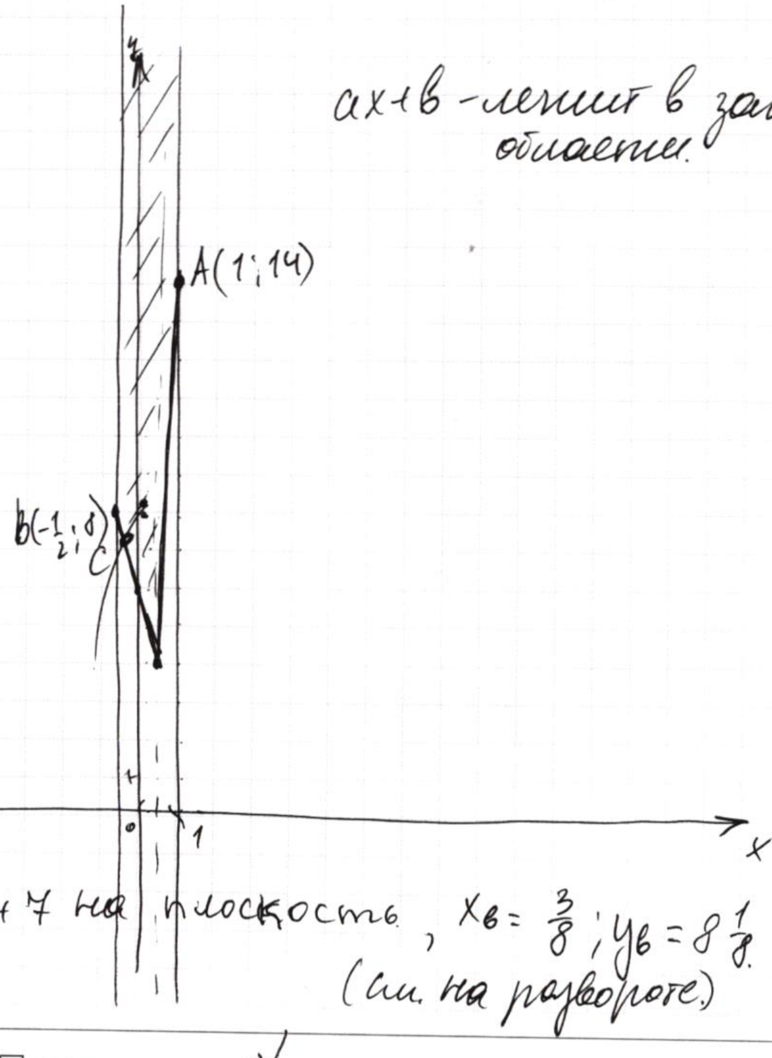
$$\begin{cases} 8x-6|2x-1|\le ax+b & (1)\\ ax+b\le -8x^2+6x+7. & (2)\end{cases},\ x\in\left[-\frac{1}{2};1\right].$$

(1) $\left[\begin{cases}2x-1\geq 0\\ 8x-12x+6\le ax+b\end{cases}\\ \begin{cases}2x-1<0\\ 8x+12x-6\le ax+b\end{cases}\right.$ $\left[\begin{cases}x\geq \frac{1}{2}\\ -4x+6\le ax+b\end{cases}\\ \begin{cases}\cancel{2x-1}\ x< \frac{1}{2}.\\ 20x-6\le ax+b\end{cases}\right.$

будем работать только на заданном промежутке

~~крайние~~

ax+b – лежит в заштрих. области.



Поместим $y=-8x^2+6x+7$ на плоскость, $x_в=\frac{3}{8}$; $y_в=8\frac{1}{8}$.

(см. на развороте.)

тогда удовлетворяющие ур-е прямой $y=ax+b$ лежат под „параболой" и над „галочкой"

$$\begin{cases} y=-4x+6 \\ y=-8x^2+6x+7 \end{cases}$$

$-4x+6=-8x^2+6x+7$

$-8x^2+10x-1=0$

$\frac{D}{4}=25-8=17$

$x=\frac{-5+\sqrt{17}}{-8}=\frac{\sqrt{17}-5}{8}$ (другая точка нам не подходит, поскольку её абсцисса будет положительна.)

$-4x+6$

$\frac{-4(\sqrt{17}-5)}{8}=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$

$\Rightarrow C\left(\frac{\sqrt{17}-5}{8};\ \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

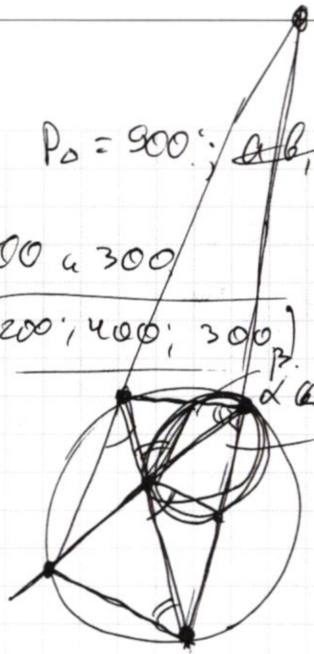
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $P_\triangle = 900$; ~~a,b,c∈Z~~ $a; b, c \in N$.

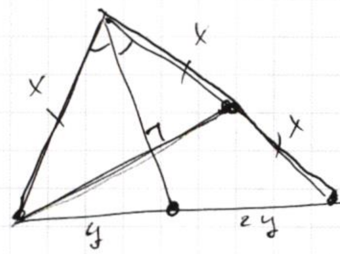
600 и 300

[200; 400; 300]



$\alpha - \beta = \beta$

$\alpha = 2\beta$ — очев.



$3x \in N$

$\Rightarrow b \vdots 3$

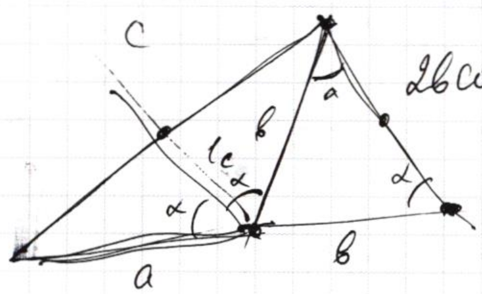
$(3x = a + c)$

$3x + 3y = 900$

$\boxed{x + y = 300}$

$-8x^2 + 6x - 1 \ 7$; вершина $(\frac{3}{8}; \frac{8}{7})$

$x - 6 - 6y + 6 = x - 6y$



$2b\cos\alpha$

$x - 6 = a$

$y - 1 = b$

$36 - 20 + 2 =$

$a + 6 - 6b - 6 = a - 6b$

$\frac{a}{a+b} = \frac{l_c}{2b\cos\alpha}$ $= 38 - 20 = 18$

③ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y + 6 - x} \\ x^2 + 2y^2 - 12x + 20 - 4y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$a - 6b \geq 0$

$ab \geq 0$

$6 \cdot 17 - 60 + 42 = 102$

$6 \times 82 = 480 + 12 = 492$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$D = 169b^2 - 4 \cdot 36b^2 = 13^2b^2 - 4(2 \cdot 6)^2b^2 = (13b - 12b)(13b + 12b) = b \cdot 25b = 25b^2$

$5b$. $a = \frac{13b - 5b}{2} = \frac{8b}{2} = 4b$ || $\frac{13b + 5b}{2} = 9b$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 8x-6|2x-1| \le ax+b & (1) \\ ax+b \le -8x^2+6x+7 & (2) \end{cases}, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$$

(1): $\left[\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 8x-12x+6 \le ax+b \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \le 0 \\ 8x+12x-6 \le ax+b \end{cases}\right.$

$\left[\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ -4x+6 \le ax+b \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-1 \le 0 \\ 20x-6 \le ax+b \end{cases}\right.$

$\left(\frac{1}{2}\right) \quad -2+6$

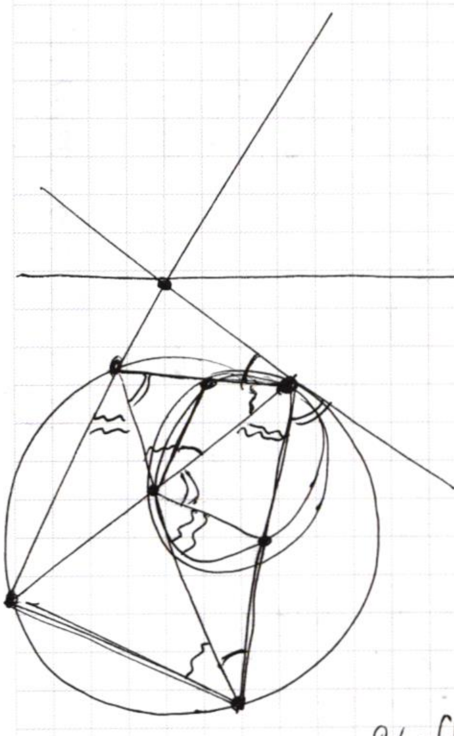
$8x-12x+6$
$8x+12x-6$

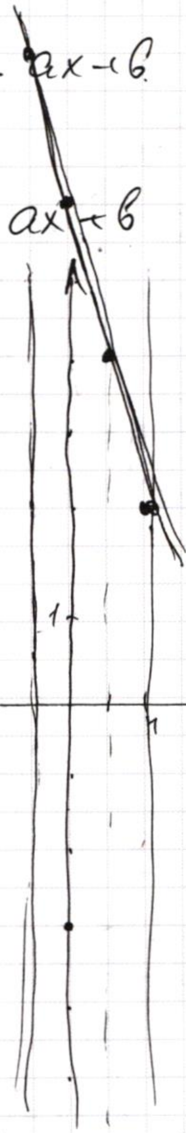
$20x+6$
$y=1$
$20-6$

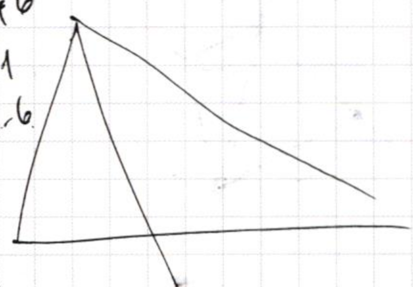
$-4x+6$

$20x-6$

$-4x+6=20x-6$
$24x=12$
$x=\frac{1}{2}$



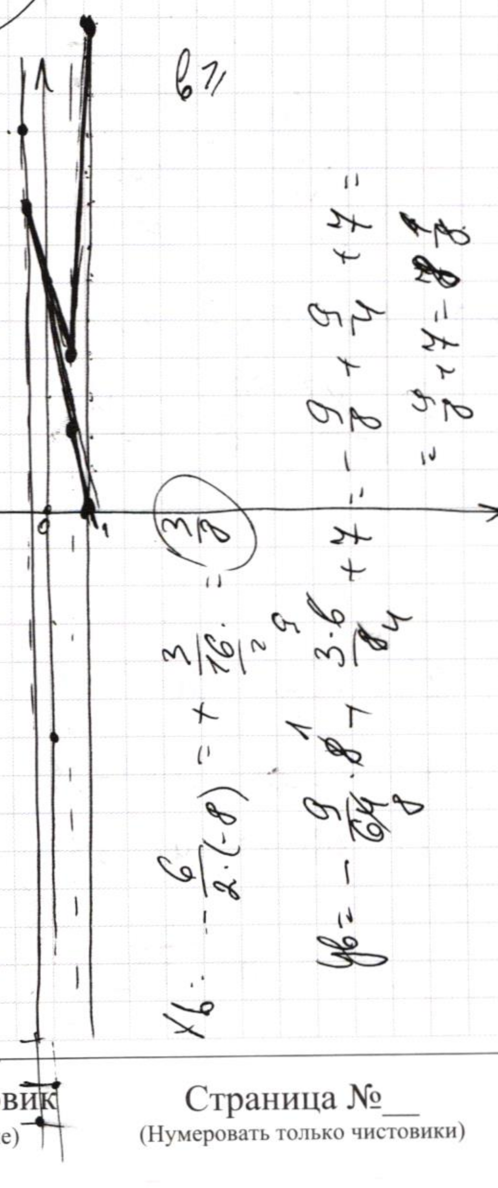




$y=-4\cdot\frac{1}{2}+6=$

$b \ge$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$
$x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$



$x_b = -\frac{6}{2\cdot(-8)} = \frac{3}{8}$

$y_b = -\frac{9}{64}\cdot 8 + \frac{3\cdot 6}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{9}{8} + 7 =$

(1). $a=p$
$b=pq$; $e=pq^3$
$c=pq^2$ $\quad be=p^2q^4=c^2$
$\to c=pq^2$ — логично

$px^2-2pqx+pq^2=0 \quad |:p$
$x^2-2qx+q^2=0$
$x=q \qquad q=pq^3 \to pq^2=1 \quad \to c=1$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \in [2;22]$

$x \in [21, 22]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

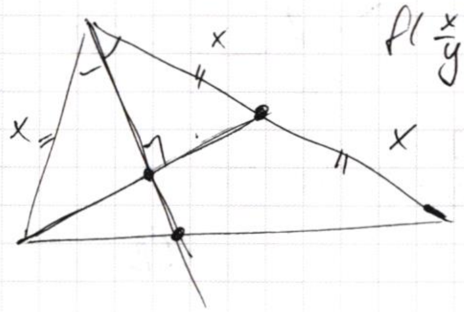
№2

$3x+6$

$\cancel{3x+6}$ $2x+x>6$

$6+2x>x$

$6+x>2x$



$\cap(f(x)) \in \mathbb{Q}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$, p простое.

№3

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2-12x+36+2y^2-4y+2 = -20+36+2 \end{cases}$$

$x-6y = \sqrt{y(x-6)-(x-6)}$ // $x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

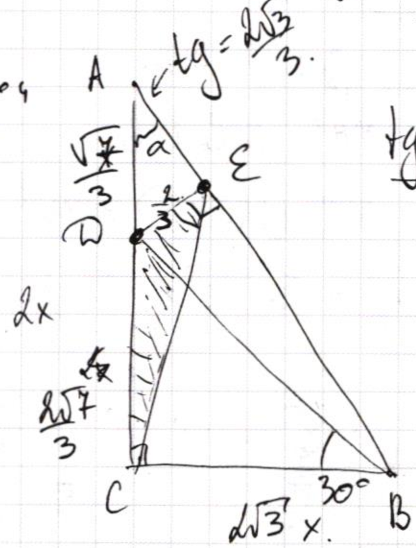
$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$(x-6)(y-1) \geq 0$

$x-6y \geq 0$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

№4



$tg\angle BAC = ?$

$\frac{2x}{?} = \frac{\sqrt3}{3} \Rightarrow ? = \frac{2x\cdot 3}{\sqrt3} = 2\sqrt3\ x$

$\angle CED = 30°$

$\boxed{tg\angle BAC = \frac{2\sqrt3 x}{3x} = \frac{2\sqrt3}{3}}$ $2x\sqrt3$

DEBC - вписанный, $\angle DEC = \angle DBC = 30°$

$3x = \sqrt7 \Rightarrow x = \frac{\sqrt7}{3}$

S_{CED}

$AB^2 = 4\cdot 3x^2 + 9x^2 = 21x^2$

$AB = x\sqrt{21}$

~~$(2\sqrt3 x)^2 + 4x^2 =$~~

$AB = x\sqrt{12+9} = x\sqrt{21}$ // $AB = \frac{\sqrt7}{3}\cdot\sqrt{21} = \frac{7\sqrt3}{3}$

$(2\sqrt3 x)^2 + 9x^2 = AB^2$

$\frac{x}{x\sqrt{21}} = \frac{DE}{2\sqrt3 x} \Rightarrow$

$ctg(90-\alpha) = tg\alpha \Rightarrow ctg\angle ADE = \frac{2\sqrt3}{3}$

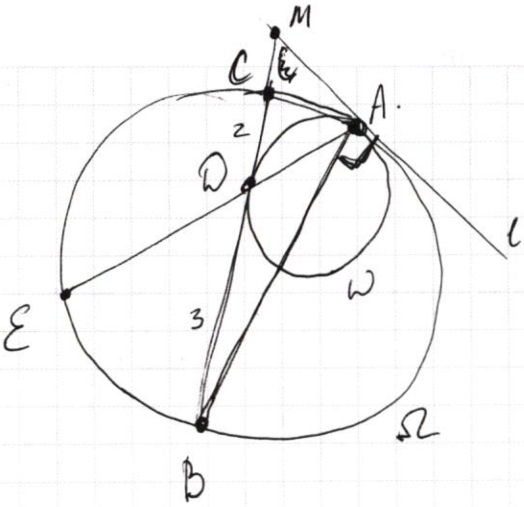
$\Rightarrow DE = \frac{x^2 2\sqrt3}{x\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt7}$

$\frac{\sqrt7}{3}\cdot 2\sqrt3 = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\frac{2\cdot\frac{\sqrt7}{3}}{\sqrt7} = \frac{2}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$CD = 2$; $BD = 3$.

$r_\omega = ?$
$r_\Omega = ?$ | $S_{BACE} = ?$

$CD \cdot DB = ED \cdot DA$.

$6 = ED \cdot DA$.

l – общая касательная.

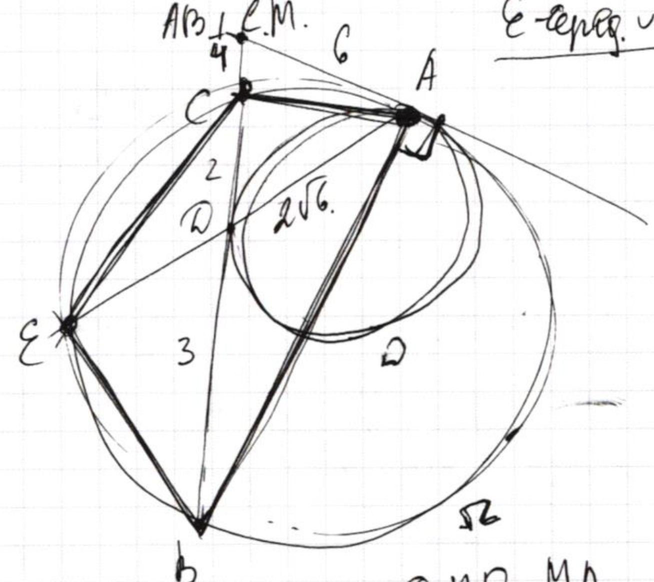
$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{DB} \Rightarrow ED \cdot AD = 6$.

$\triangle ACB$ – п/у

Надо найти AD.

AB ⊥ l. M.

E – серед. ∪CB.



$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$.

$MD^2 = MC \cdot (MC + 5)$

$(MC + 2)^2 = MC^2 + MC \cdot 5$.

$MC^2 + 4MC + 4 = MC^2 + MC \cdot 5$.

$MC = 4 \Rightarrow \boxed{MC = 4}$

$MD = MA$.

$MA^2 = MC \cdot MB =$

$= MC \cdot (MC + 5) = MD^2$.

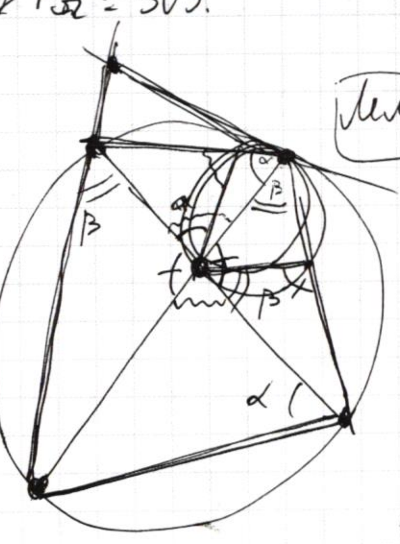
$MA^2 = MC(MC + 5) = 4 \cdot 9$

$\Rightarrow MA = 2 \cdot 3 = 6$

$AB = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{3 \cdot 15} = 3\sqrt{5}$.

$\Rightarrow r_\Omega = 3\sqrt{5}$.

$8x - 6|2x - 1| \leq ax + 6 \leq -8x^2 + 6x + 7$, $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$.



Лемма Архимеда.

S_{BACE}

$CD \cdot DA = CD \cdot DB$.

$bD^2 = bK \cdot bA$.

$bK = bA - 2$