МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Запишем числа a, b, c, как:

a, la, l^2a, т.к. мы работаем с геом. прогр, l - шаг прогр.

$ax^2+2bx+c=0$

$D = 4b^2-4ac$.

Четвёртый член прогрессии: $d = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

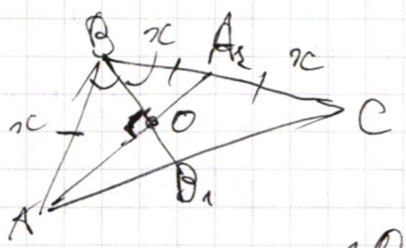
Заменим b и c на la и l^2a соотв.

$d = \frac{-la \pm \sqrt{l^2a^2 - l^2a^2}}{a} = -l$

Тогда, т.к. $d = lc$, $c = \frac{d}{l} = -1$.

Ответ: -1.

№2.



BB_1 - бисс, AA_1 - мед.

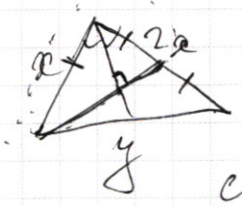
$BB_1 \cap AA_1 = O$.

BO - выс и бисс. $\triangle ABA_1 \Rightarrow \triangle ABA_1$ - р/б.

$AB = BA_1 = x$ - ~~р/б~~ боков. ст. р/б треуг.

Зн, если у треуг. перес. под прямым углом бис. и мед одна из его сторон вдвое больше другой.

Обратная ситуация:



Если одна из сторон треуг. в 2 раза больше другой, проводя к большей из них медиану, ~~медиану~~ бисс. к основ. ~~высоту~~ снова получим р/б треугольник ⇒ медиана ⊥ бисс.

Зн., усл., что одна сторона в 2 раза больше другой - необх. и достаточно, чтобы одна из медиан была перпенд. одной из биссектрисс.

По нер-ву треуг.

$$\begin{cases} x+2x>y \\ x+y>2x \\ 2x+y>x \\ 3x+y=1200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x>y \\ y>x \\ 3x+y=1200 \end{cases}$$

$x, 2x, y$ - стороны треуг-ов.

$$\begin{cases} x>200 \\ x<300 \end{cases}$$

Значит, таких треуг-ов: $300-200-1=99$.

Ответ: 99 штук.

№6.

① $y=2x^2-x-1$ - парабола, осями вверх, вершина: $\left(\frac{1}{4}; -1\frac{1}{8}\right)$

Т.п. с Ox: $2x^2-x-1=0$

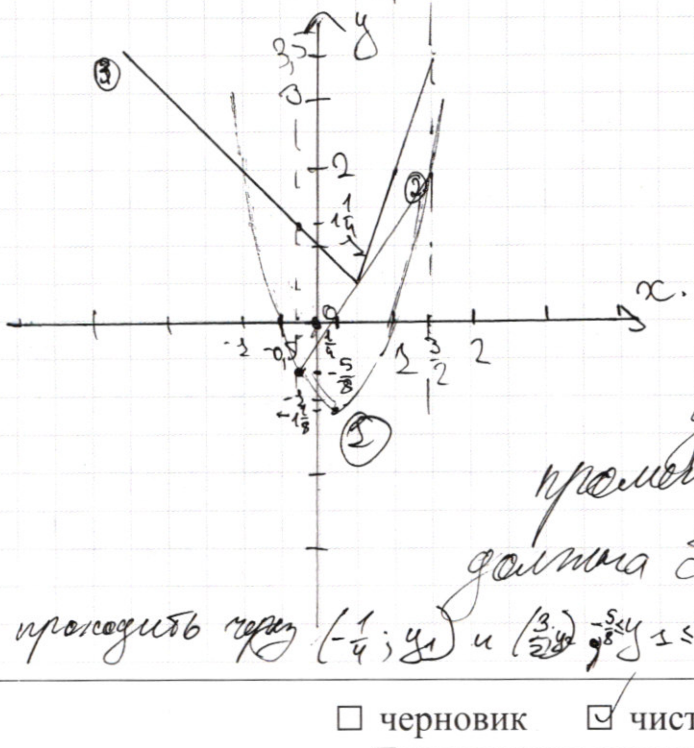
$D=9$

$x=1$

$x=-0,5$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=2$

$f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{8}$



③ $y=x+|2x-1|$:

$$y=\begin{cases} 1-x, & x\le 0,5 \\ 3x-1, & x>0,5 \end{cases}$$

Наша прямая, с уравн. $ax+b$ на промеж-ке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ (обозн. пунктиром) должна быть ~~ниже~~ не выше ③ и ~~выше~~ не ниже ①

т.е проходить через $\left(-\frac{1}{4}; y_1\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; y_2\right)$, $-\frac{5}{8}\le y_1\le 1\frac{1}{4}$, $2\le y_2\le 3,5$, не перес. ① и ③.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Прямая проходящая через т. $(0{,}5;0{,}5)$ и $\left(\frac{3}{2};2\right)$

Имеет уравн: ~~0,5k=0,5~~

$$\begin{cases}0{,}5=0{,}5k+b\\ 2=1{,}5k+b\end{cases} \qquad \begin{cases}1=k+2b\\ 4=3k+2b\end{cases}$$

$k=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$

(2) $y=1{,}5x-\frac{1}{4}$

$y\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{5}{8}$

$\Downarrow$

Точки $\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2};2\right)$ лежат на одной прямой.

Заметим что это получаются „крайние точки", т.е. при попытке провести прямую из точки $\left(\frac{3}{2};y\right)$, $2\leq y\leq 3{,}5$ к любой из точек $\left(-\frac{1}{4};y_1\right)$, $-\frac{5}{8}\leq y_1\leq 1\frac{1}{4}$ нам этого не получится т.к. без пересечения (3), т.к. т. $(0{,}5;0{,}5)$, принадлежащая (3), принадлежит и нашей прямой (2), которая проходит через точки с минимальной ординатой допустимых промежутков, указанных в конце стр. 2 №6.

Зн, наша прямая (2) - единственная.

$y=1{,}5x-\frac{1}{4}=ax+b$

$a=\frac{3}{2}$

$b=-\frac{1}{4}$

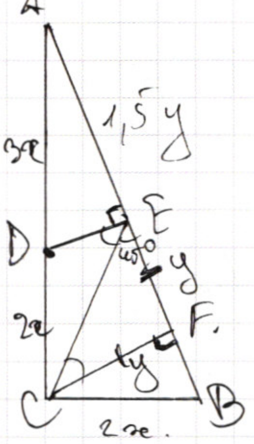
Ответ: $a=\frac{3}{2}$; $b=-\frac{1}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№4.



а) $CF \parallel DE$, $CF \perp AB$, $CF \cap AB = F$

Т.к. $\angle CED = 45°$, $\angle EFC = 90° - 45° = 45°$ – по теор. о с. уг. накр.

ΔEFC – р/б – по 2-м углам.

$\angle ECF = 180° - 90° - 45° = 45°$

$\Downarrow$

$EF = FC = y$

Тогда т.к. $DE \parallel CF$, по т. Фалеса:

$\frac{AE}{EF} = \frac{AD}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow AE = 1,5y$

$tg \angle BAC = \frac{CF}{AF} = \frac{y}{2,5y} = \frac{2}{5}$

б) $\cancel{\frac{S_{AEC}}{S_{CED}} = \frac{3}{2}}$ Площади треуг. с одинаковой высотой отн. как основания, к которым пр. высота.

$\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{3}{5}$ – аналогично.

$S_{AEC} = \frac{3}{5} S_{ABC}$

$\frac{S_{AEC}}{S_{CED}} = \frac{5}{2}$ – аналогично

$S_{CED} = \frac{2}{5} S_{ACE} = \frac{6}{25} S_{ABC}$.

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{29}{5}$

$S_{CED} = \frac{174}{125} = 1\frac{49}{125}$

$BC = tg \angle BAC \cdot AC = \frac{2}{5} \sqrt{29}$.

Ответ: а) $tg \angle BAC = \frac{2}{5}$. б) $S_{CED} =$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ – п/у, с общ. острым углом.

Значит, $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ – сходств. ст. под. треуг.

По т. Пифагора для $\triangle ACF$:

$$\left(\frac{5}{2}y\right)^2 + y^2 = 25x^2$$

$$7{,}25y^2 = 25x^2$$

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{7{,}25}{25}} = \frac{\sqrt{29}}{10}$$

$\frac{CB}{AC} = \frac{CF}{AF}$ – в под $\triangle AFC$ и ABC

$\Downarrow$

$$CB = 2x$$

$$AB = x\sqrt{29}$$

$$AE = 1{,}5 \cdot \frac{10}{\sqrt{29}}x = \frac{15x}{\sqrt{29}}$$

$\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{15}{29}$ – по 1)

$\frac{S_{DEC}}{S_{AEC}} = \frac{2}{5}$ – по 1)

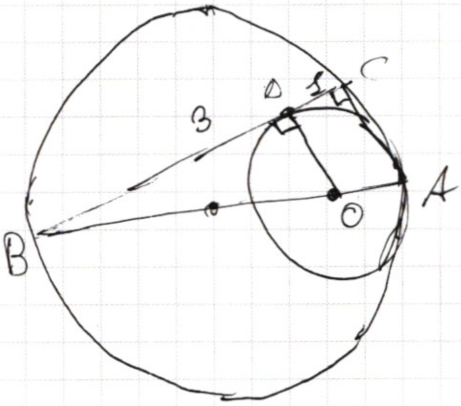
$$S_{DEC} = \frac{2}{5}S_{AEC} = \frac{6}{29}S_{ABC}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{29}{5}$$

$$S_{DEC} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Ответ: $S_{DEC} = 1{,}2$.

№5.



МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, $\cancel{b = da}$, $\cancel{c = da}$ $b = la, c = l^2 a,$ $\cancel{d = l^3 a = \frac{c^2}{b}}$

$\cancel{= a}$

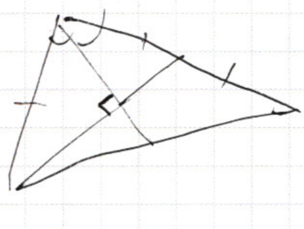
$D = 4b^2 - 4ac$

$d = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \cancel{\frac{c^2}{b} - \frac{bc}{a}}$

$d = \frac{-la \pm \sqrt{l^2 a^2 - l^2 a^2}}{a} = -l.$

$c = \frac{d}{l} = -1.$

№2.



$1200 = 3x + y$

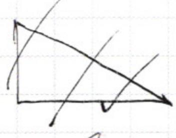
$\cancel{x : 1 - 3y}$

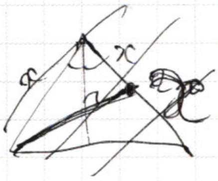
$3x > y$ $\quad x > 200$

$x + y > 2x$ $\quad x < 300$

$y > x$

99





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y \geq 2x.$

$xy-2x-y+2 \geq 0.$

$y(x-1) \geq 2x-2$

$y \geq \frac{2(x-1)}{x-1}$

~~$y \geq 2$~~

~~При $x=1$, $y=4$.~~

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2. \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$4x^2+y^2-5xy+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$y^2-5xy-6x-5y+8=0.$

$y^2+5y(x-1)-(6x-8)=0.$

$D=25(x-1)^2 + 4(6x-8)=$

$=25x^2-50x+25+24x-32=$

$=25x^2-26x-7$

$6x^2-12x+3<0$

$2x^2-4x+1<0$

$D=16-8=8.$

$\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=1\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$+ \quad - \quad +$

$1-\sqrt{\frac{1}{2}} \quad 1+\sqrt{\frac{1}{2}}$

~~$y^2-4y=-2x^2+4x-3$~~

~~$y^2+y=-4x^2$~~

$\times\frac{26}{26}$

156

52

676

$\times\frac{36}{36}$

216

108

1296

D

$y^2+y(1-5x)+4x^2+2x-2$

$D=25x^2-50x+25-16x^2-8x+8=$

$=9x^2-58x+33.$

~~9x~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

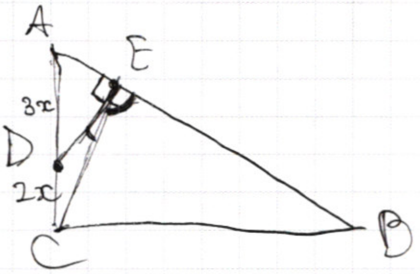
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

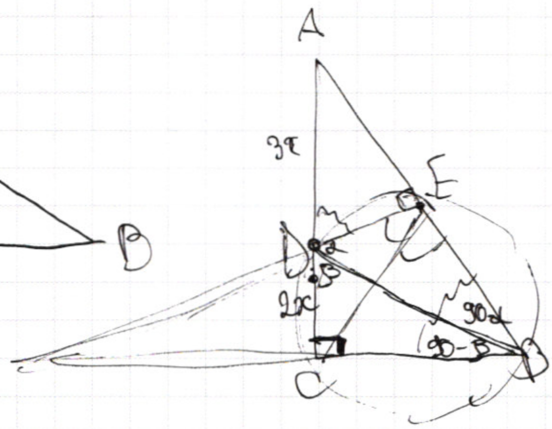
ШИФР

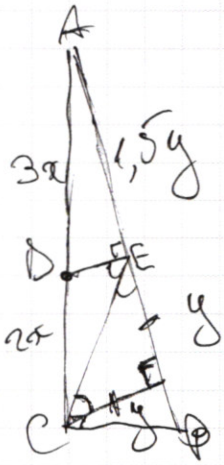
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.







$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$25x^2 + CB^2 = AB^2$

$\frac{1}{k^2}(CB^2 + 25x^2) =$

$+9x^2$

$\angle CBE = \angle ADE.$

$\cancel{AE \cdot AB = AD \cdot AC}$

$AE \cdot AB = 6x^2$

$AB = \frac{6x^2}{AE}$

$25x^2 + CB^2 = \frac{36x^2}{AE^2}$

$AE^2 + DE^2 = 9x^2$

№6.

$f'(x) = 4x - 1.$

$x \leq 0,5$

$-x+1$

$3x-1, \ x \geq 0,5.$

$2 \leq ax+b \quad x = 1,5$

$ax + b \leq$

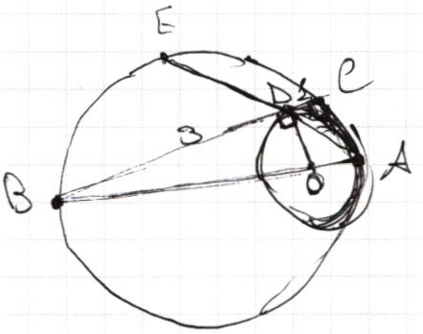
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.



$\cancel{2R = \sqrt{8^2+r^2}}$ $2R - r = \sqrt{9+r^2}$

$AD = r\sqrt{2}$

$\cancel{AC = \sqrt{2r-1}}$

$\cancel{2R = \sqrt{15+2r}}$

$\cancel{\sqrt{15+2r} - r = \sqrt{9+r^2}}$

$\cancel{15+2r - 2r\sqrt{15+2r} + r^2 - 9 - r^2 =}$

$\cancel{2r + 6 - 2r\sqrt{15+2r} = 0}$

$\cancel{r+3 = r\sqrt{15+2r}}$

$\cancel{\frac{r^2+6r+9}{r^2} = 15+2r}$

$\cancel{2r^3 + 14r^2 - 6r - 9 = 0.}$

$\cancel{' = 6r^2 + 28r - 6.}$

$\cancel{D = 784 - 144 = 640}$

$\cancel{\begin{array}{r} 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}}$

$\cancel{AC = \sqrt{2r-1} = \frac{4}{3}r}$

$\cancel{3\sqrt{2r-1} = 4r}$

$\cancel{18r - 9 = 16r^2}$

$\cancel{16r^2 - 18r + 9 = 0.}$

$\cancel{D = 324 -}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$

$\left(\frac{4r}{3}\right)^2 + 16 = R^2$

$\frac{16}{9}r^2 + 16 = 4R^2$

$2R = \sqrt{\frac{16}{9}r^2 + 16} = 4\sqrt{\frac{r^2}{9} + 1}$

$2R - r = \sqrt{9+r^2}$

$4\sqrt{\frac{r^2}{9}+1} - r = \sqrt{9+r^2}$

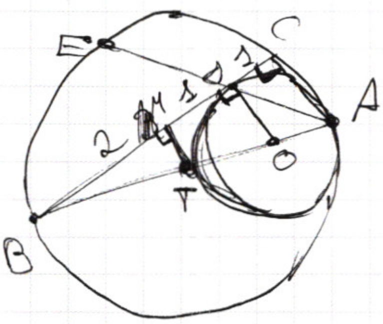
$\frac{16r^2}{9} + 16 - 8r\sqrt{\frac{r^2}{9}+1} - 9 = 0$

$16r^2 - 8r - 9 = 0.$

$D = 64r + 144$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$MT = \frac{2}{3} r$

$AC = \frac{4}{3} r.$

$\cancel{AC} = \frac{1}{4} BC$

$AC = \frac{1}{4} AB.$

$R = 2r$

$2R - \cancel{4}r = \sqrt{3 + r^2}$

$3r = \sqrt{3 + r^2}$

$9r^2 = \sqrt{3+r^2}$

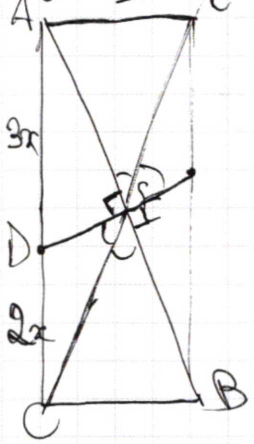
$r = \sqrt{\frac{3}{8}}$

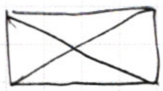
$\sqrt{\frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{6}.$

$\frac{\sqrt{16 + \frac{36}{24}}}{2} = \sqrt{4 + \frac{9}{24}} = \sqrt{\frac{105}{24}}$

$\frac{90 - \frac{180 - 45}{2}}{} =$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

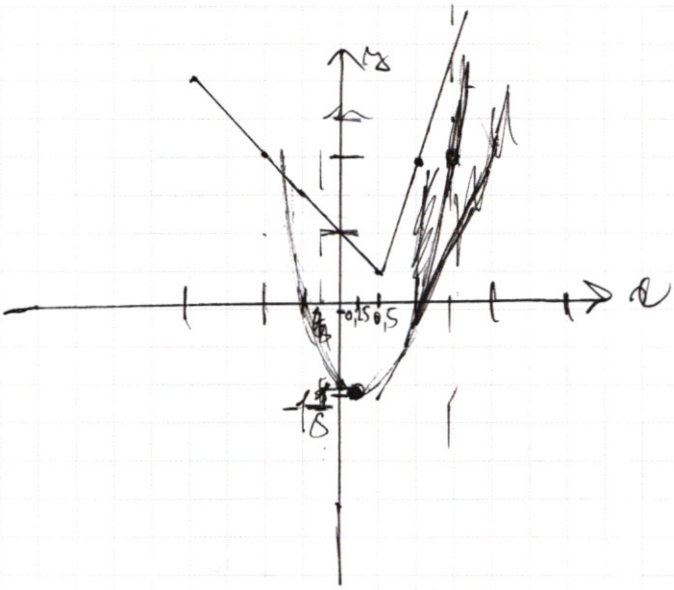
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{a}{16} = \frac{1}{8} \quad -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{8} \quad -1$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{1+3}{4} = 1$

$x = -0,5$

№7.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

~~0~~

~~или~~

~~f не подх.~~

2 3 5 7 11 13 17

19

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)