МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) $b = ad$
2) $c = ad^2$ $\quad c = ?$
3) $x = ad^3$, т.к a, b, c, x – ~~ар.~~ геом. прогр.

• $ax^2 + 2bx + c = 0$

Из •, 1, 2, 3 $\Rightarrow a^3d^6 + 2a^2d^4 + ad^2 = 0$

$a^3d^6 = (ad^2)^3 = c^3$

$a^2d^4 = (ad^2)^2 = c^2$

$ad^2 = c$

$c^3 + 2c^2 + c = 0$

$c(c^2 + 2c + 1) = 0$

$c(c+1)^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

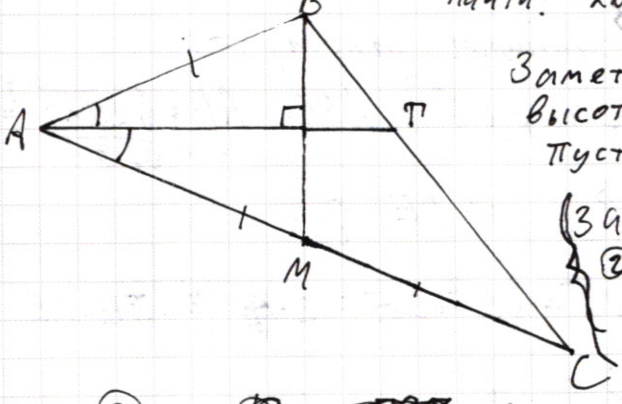
Ответ: $c = 0$ или $c = -1$

№2

Дано: $\triangle ABC$; BM – медиана; AT – бис

$BM \perp AT$; $AB + BC + AC = 1200$; $AC; BC; AB \in \mathbb{N}$

Найти: кол-во таких $\triangle$.



Заметим, что $\triangle BAM$ р/б т.к. AT бис и высота (признак) $\Rightarrow AB = AM = MC$

Пусть $AB = a$; $BC = b$, тогда:

$$\begin{cases} 3a + b = 1200 \\ ② \; 3a > b \Rightarrow 3a > \frac{1200}{2} \Rightarrow a \geq 201 \\ a + b > 2a \Rightarrow b > a \\ a; b \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (\ne 0 \; \triangle)$$

Из ② $\Rightarrow$ $a_{min} = 201$

$b = 1200 - 3a \Rightarrow b \in \mathbb{N}$, при любых $a \in \mathbb{N}$

При a_{min} стороны $\triangle ABC$ равны $201; 402; 597$

Каждый раз, когда мы увеличиваем a на 1

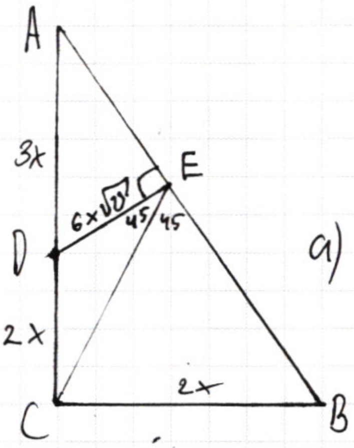
сторона AB увелич на 1; сторона AC увеличивается

на 2 $(2a+2-2a) \Rightarrow$ сторона b уменьшаются на 3,
тогда мы можем прибавлять по 1 к a, пока
не нарушится условие, что $b > a$, а это условие
нарушится при $a=300$, тогда $a=b \Rightarrow a_{max}=299$.

Тогда таких $\triangle$. будет $299-200=99$

Ответ: 99

№4



а) 1) $tg_{BAC} = \frac{BC}{AC}$

2) $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, тогда $AD = 3x \Rightarrow AC = 5x \Rightarrow$
$= DC = 2x$

3) Заметим, что $\angle CDEB$ впис. т.к.
суммы прот. $\angle = 180^\circ$ $(DEB = DCB = 90 \Rightarrow DEB + DCB = 180)$ ~~призн.~~

На дуги DC и CB опираются равные углы $\left(\begin{array}{l} CED = 45 \\ CEB = 90-45=45 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ хорды DC и CB равны $\Rightarrow CB = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow tg_{BAC} = \frac{2x}{5x} = 0,4$

б) $AC = \sqrt{29} \Rightarrow CB = \frac{2\sqrt{29}}{5} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (прямоуг с общим углом) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB}$ По т Пифагора в $\triangle ABC$: $AB = \sqrt{29x^2} =$
$= x\sqrt{29}$

$\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \frac{DE}{2x} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow DE = \frac{6x}{\sqrt{29}}$

По т. косинусов в $\triangle DCE$: $DC^2 = DE^2 + CE^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot DE \cdot CE$

$4x^2 = \frac{36 \cdot x^2}{29} + CE^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot CE$

~~$\frac{4 \cdot 29}{25} = \frac{36}{25} + CE^2 - \frac{\sqrt{2} \cdot 29 \cdot 6}{5} \cdot CE$~~

~~$CE^2 - \frac{6 \cdot 29 \cdot \sqrt{2}}{5} \cdot CE + \frac{116 \cdot 52}{5} = 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CE_{12} = \frac{\frac{6\cdot 29\cdot\sqrt{2}}{5} \pm \sqrt{\frac{36\cdot 29^2\cdot 2 - [illegible]\cdot 116}{25}}}{2} =$$

$$= \frac{6\cdot 29\sqrt{2} \pm 2\sqrt{9\cdot 29^2\cdot 2 - 52\cdot 116}}{10} = \cancel{3\cdot 29\sqrt{2} \pm \sqrt{522}}$$

$$= \frac{3\cdot 29\sqrt{2} \pm \sqrt{29\cdot 2(261-104)}}{5} = \frac{3\cdot 29\sqrt{2} \pm \sqrt{157\cdot 29\cdot 2}}{5}$$

$$CE = \frac{3\cdot 29\sqrt{2} + \sqrt{157\cdot 29\cdot 2}}{5} \quad (CE > 0)$$

$$S_{DEC} = \frac{DE\cdot CE\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} =$$

$$4x^2 = \frac{36x^2}{29} + CE^2 - \frac{\sqrt{2}\,6x}{\sqrt{29}}\cdot CE$$

$$\frac{4\cdot 29}{25} = \frac{36}{25} + CE^2 - \frac{\sqrt{2}\,6}{5}\cdot CE$$

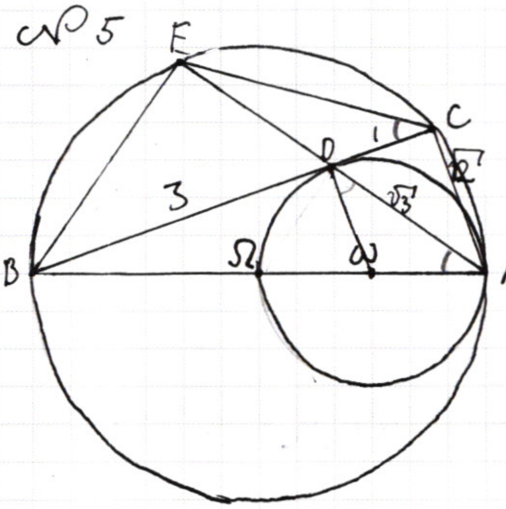
$$CE^2 - \frac{\sqrt{2}\,6}{5}CE - \frac{16}{5} = 0$$

$$CE_{12} = \frac{\sqrt{2}\,6 \pm \sqrt{72 + 64\cdot 5}}{10} = \frac{3\sqrt{2} + 7\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$$

$$S_{DEC} = \frac{DE\cdot EC\cdot\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 6\cdot\sqrt{25}}{20\cdot\sqrt{25}} = \frac{24}{20} = 1{,}2$$

Ответ: 1,2

№5



R – радиус Ω

r – радиус ω

$R = ?$; $r = ?$

$S_{BACE} = ?$

$\triangle BD\omega \sim \triangle BCA$ (т.к $\angle B$ общ; $\angle BD\omega \overset{\text{радиус}\perp\text{кас.}}{=} \angle BCA \overset{\text{оп. на диам}}{=} 90°$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{B\omega}{BA} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 6R = 8R - 4r \Rightarrow R = 2r$

По т. Пифагора в $\triangle BD\omega$:

$3^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 = 4R^2 - 4Rr \Rightarrow 9 = 16r^2 - 8r^2 \Rightarrow 8r^2 = 9 \Rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

По т Пифагора в $\triangle ABC$: $CA = \sqrt{\frac{36}{2} - 16} = \sqrt{2}$

По т Пифагора в $\triangle DCA$: $DA = \sqrt{3}$

$\triangle ECD \sim \triangle BAD$ ($\angle BDA \overset{\text{вертик}}{=} \angle EDC$; $\angle ECB = \angle EAB$ опир. на равн. дуги)

коэф. подобия равен $\frac{DC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{S_{ECD}}{S_{BAD}} = \frac{1}{3}$.

$S_{ECD} = \frac{1}{3} S_{BAD} = \frac{1}{3}(S_{ABC} - S_{DCA})$

$\triangle EDB \sim \triangle CDA$ ($\angle EDB \overset{\text{вер.}}{=} \angle CDA$; $\angle DCA = \angle DEB$ на одну дугу)

$k = \frac{DA}{DB} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{S_{EDB}}{S_{CDA}} = 3$

$S_{ABC} = \frac{DC \cdot CA}{2} = 2\sqrt{2}$; $S_{DCA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{BECA} = S_{ABC} + S_{CDE} + S_{BED} = 2\sqrt{2} + \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{2} =$

$= \frac{12\sqrt{2}}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{6} + \frac{9\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} =$

$= 4\sqrt{2}$

Ответ: $4\sqrt{2}$

№7

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad$ $1\leq x\leq 21$ $\quad$ $x\in N$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$ $\quad$ $1\leq y\leq 21$ $\quad$ $y\in N$

$f(x/y)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

~~Если $\frac{x}{y}$ прост., то $f\left(\frac{x}{y}\right)\geq 0$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$f\left(\frac{x}{y}\right)>0$, если $x=2y$; $x=3y$; $x=5y$; $x=7y$; $x=11y$; $x=13y$; $x=17y$; $x=19y$~~

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)>0$, если $\frac{x}{y}$ — произвед. двух простых чисел:~~

~~$x=4y$; $x=6y$; $x=9y$; $x=10y$; $x=14y$; $x=15y$; $x=21y$~~.

~~если $y=1$, то $f\left(\frac{x}{y}\right)>$~~

если $x \vdots y$, то $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$, т.к. $\frac{x}{y}$ можно представить как производение простых чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|;\ x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$

1) $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$

$2x^2-x-1\le ax+b\le x-2x+1$

$\begin{cases} 2x^2-(a+1)x-b-1\le 0 & (1)\\ (a+1)x+b-1\le 0 & (2)\end{cases}$

(1) : $x_{12}=\dfrac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a+1+8b+8}}{4}=\dfrac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a+8b+9}}{4}$

(2) $(a+1)x\le 1-b$, если $a\ge -1$

$x\le \frac{1-b}{}$

№3

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}\\ 2x^2+y^2-4y+3-4x=0\end{cases}$ $y\ge 2x$

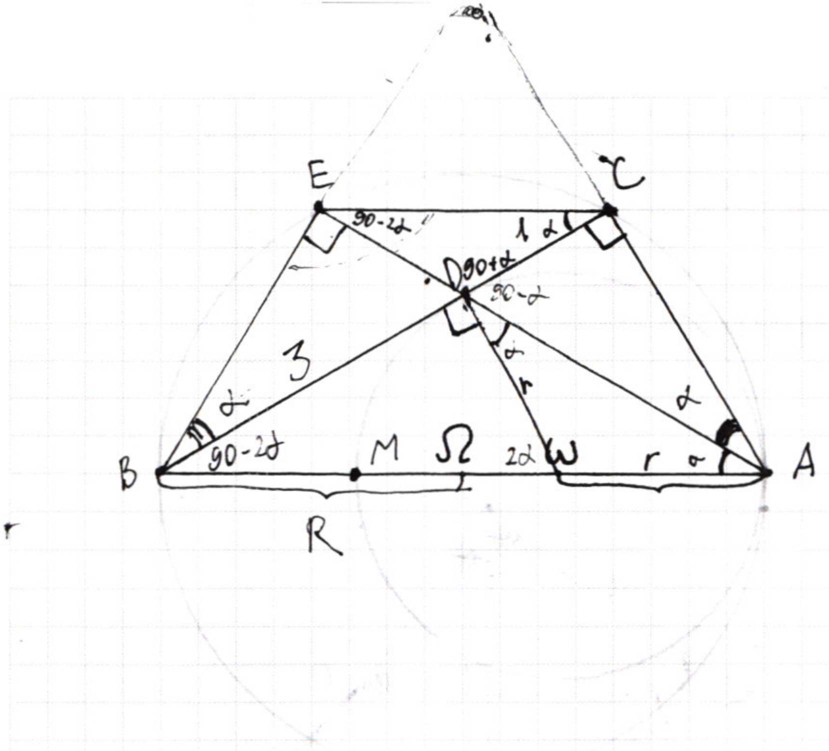
$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0\\ y^2+2x^2-4y+3-4x=0\end{cases}$

$2x^2+5y+6x-5-5xy=0$

$2x^2-(5y-6)x+5y-5=0$

$x_{12}=5y-6\pm\sqrt{25y^2-60y+36+40-40y}$



$r = ?$ $S_{BACE} = ?$

$R = ?$

$9 = BM \cdot 2R$

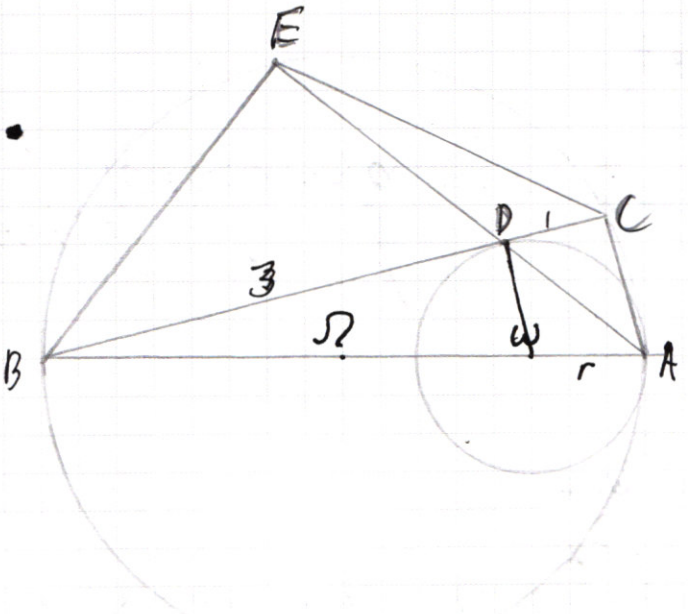
$9 + r^2 = (2R - r)^2$

$9 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$9 = 4R^2 - 4Rr$ $\Rightarrow BM = 2R - 2r = 2(R - r)$

$9 = BM \cdot 2R$

$4R^2 - 4Rr = 9$ $16 + CA^2 = 4R^2$



$\frac{2R}{2R - r} = \frac{4}{3}$

$6R = 8R - 4r$

$3R = 4R - 2r$

$R - 2r = 0 \Rightarrow R = 2r$

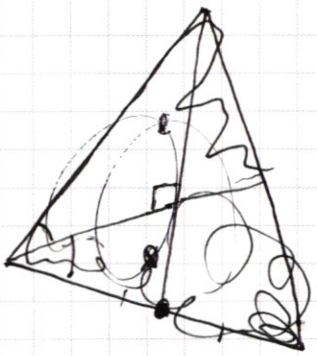
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

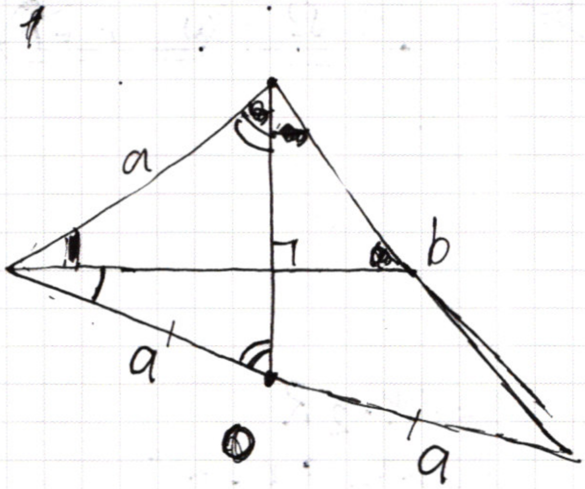
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$a + b + c = 1200$

~~стороны $\in \mathbb{N}$~~

по н-ву Δ

$$\begin{cases} 3a + b = 1200, \ a \in \mathbb{N}, \ b \in \mathbb{N} \\ 3a > b \\ b + a > 2a \Rightarrow b > a \\ \cancel{b > a} \end{cases}$$

~~2, 4, 1194~~
~~3, 6, 1191~~
~~4, 8, 1188~~
~~5, 10, 1185~~

$$\begin{cases} 3a + b = 1200 \\ 3a > b \\ b > a \\ a; b \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow 3a > 600 \Rightarrow a > 200 \Rightarrow b > 200$$

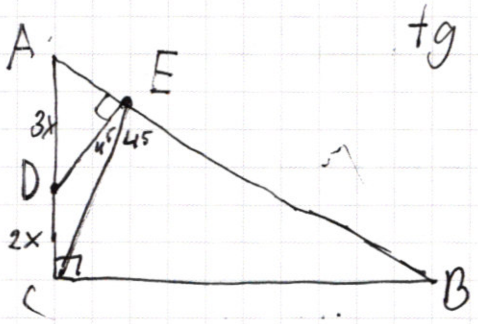
$a_{min} = 201 \Rightarrow b_{min} = 202$

При $a = 201$: $b = 1200 - 603 = 597$

При $a = 202$: $b = 1200 - 606 = 594$

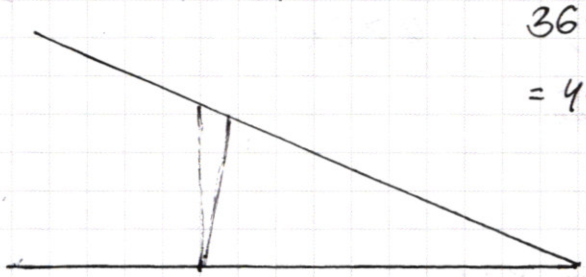
При $a = 300$: $b = 1200 - 900 = 300$ – не подходит $(b = a) \Rightarrow$
$\Rightarrow a < 300$

$a = 299$ $\quad b = 1200 - 897 = 303$ – подходит



$tg\ BAC = ?$

$$tg_{BAC} = \frac{CB}{AC} = \frac{DE}{AE}$$



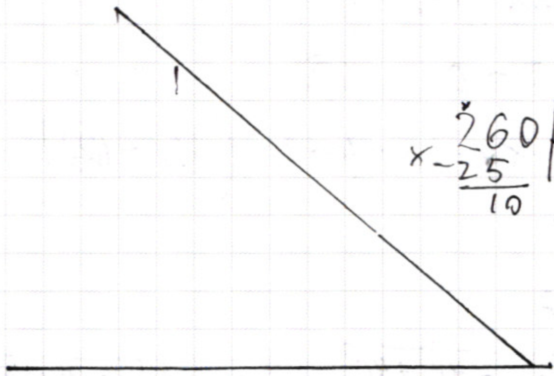
$36 \cdot 29^2 - 4 \cdot 29 =$

$= 4 \cdot 29(9 \cdot 29 - 1)$

$29 \times 4 = 116$

$29 \times 9 = 261$

157



$116 \cdot 160$

$260 : 5 = 52$

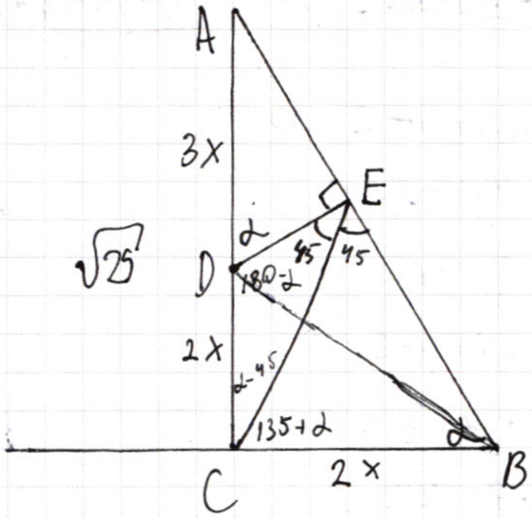
$58 \times 9 = 522$

116×32

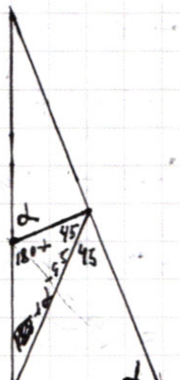
$29 \times 3 = 87$

$261 - 104 = 157$

$29 \times 5 = 145$



$\sqrt{25}$



$90 - 135 + \alpha =$

$180 - \alpha$

$180 - 180 + \alpha - 45 =$

α

$90 + 45 - \alpha$

$\frac{6\sqrt{2}}{5}$

$180 - 45 - \alpha = 90 - \alpha +$

$29 \times 4 = 116$

$116 - 36 = 80$

$36 - 4 \cdot 29$

320

$392 : 2 = 196$

$196 : 4 = 49$

$261 : 9 = 29$

$45 \cdot 8$

$\underline{5x \cdot 2x}$

$5x^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases} \Rightarrow y>2x$$

(1)
$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

$$-4xy+2x^2+4x+4y-3=xy-2x-y+2 \quad \left((1)-(2)\right)$$

$$2x^2+6x+5y=5xy+5$$

$$2x^2+(6-5y)x+5y-5=0$$

$$x_{12}=\frac{5y-6\pm\sqrt{25y^2-60y+36-40y+40}}{4}=\frac{5y-6\pm\sqrt{25y^2-100y+76}}{4}$$

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ y^2+2x^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y^2+4x^2-8x-8y+6=0 \\ y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \end{cases}$$

$$y^2-10x-9y+5xy+8=0$$

$$y^2-(9-5x)y+8-10x=0$$

$$y_{12}=\frac{9-5x\pm\sqrt{81-90x+25x^2-32+40x}}{2}=\frac{9-5x\pm\sqrt{49-50x+25x^2}}{2}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)