МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x-1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

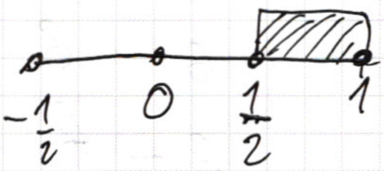
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7)$

I) $2x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge 0{,}5.$



$8x-12x+6 \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$

$-4x+6 \le ax+b$

$(a+4)x+(b-6) \ge 0.$

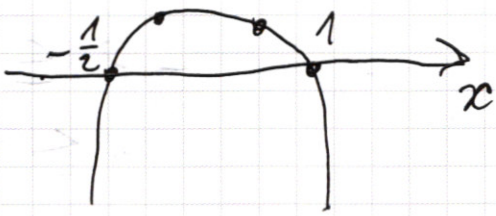
$x \ge \frac{6-b}{a+4}.$ $\quad x \ge 0{,}5 \Rightarrow 0{,}5 \ge \frac{6-b}{a+4}.$

$\frac{1}{2}a+2 \ge 6-b.$

$\frac{1}{2}a+b \ge 4.$

$-8x^2+6x+7 \ge ax+b.$

$-8x^2+(6-a)x+7-b \ge 0.$



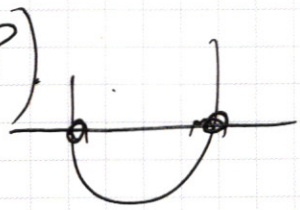
$D=(6-a)^2+32(7-b)$

$x_1' = max(x_1, x_2) \ge 1$

$x_2' = min(x_1, x_2) \le -0{,}5 \Rightarrow x_2' \le 0{,}5.$

$ax+b \le -8x^2+6x+7.$

$0 \le -8x^2+(6-a)x+(7-b)$



$8x^2+(a-6)x+(b-7) \le 0.$

$D=(a-6)^2-32(b-7) \ge 0$

$\frac{6-a \pm \sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b$

I) $x \ge \frac{1}{2}$.

$8x - 12x + 6 \le ax + b$.

$6 \le (a+12)x + b$.

$6 - b \le (a+12)x$.

$\frac{6-b}{a+12} \le x$

$\frac{6-b}{a+12} \le 0,5$.

$6 - b \le \frac{1}{2}a + 6$.

$-b \le \frac{1}{2}a$

$-b \le b - 2$.

$1 \le b$

$2 \le 2b$

$2 - 4 \le 2b - 4$.

$-2 \le a$.

II) $x \le \frac{1}{2}$.

$8x + 12x - 6 \le ax + b$

$20x - 6 \le ax + b$

$0 \le x(a-20) + (b+6)$

$\frac{-b-6}{a-20} \le x$

$\frac{b+6}{20-a} \le -0,5$.

$b + 6 \le \frac{1}{2}a - 10$.

$16 \le \frac{1}{2}a - b$.

$32 \le a - 2b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$14 - a \le \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)}$

$a \ge 14 \Rightarrow$ нет ограничения (кроме $(a-6)^2 \ge 32(b-7)$)

$a \le 14$: $196 - 28a + \cancel{a^2} \le \cancel{a^2} - 12a + 36 - 32b + 224.$

$0 \le 64 + 16a - 32b$

$2b \le 4 + a.$ $\quad 0 \le 4 + a - 2b$

$\cancel{6} - a + \sqrt{(a-6)^2 - 32(b-7)} \ge \cancel{16}.10.$

$\cancel{\sqrt{(a-6)^2 +}}$

$a \le 0$ ✓

$a \ge 10$:

$\cancel{a^2} - 12a + 36 - 32b + 224 \ge 100 + 20a + \cancel{a^2}$

$-32a - 32b \ge 160$

$4 + a - 2b$

$\cancel{64+16}$ $\ge 0 \ge 5 + a + b$ $\quad 0 \ge 10 + 2a + 2b$

$0 \ge 1 + 3b$

$-\frac{1}{3} \ge b$

$5 - \frac{1}{3} + a \ge 5 + b + a$

$5 - \frac{1}{3} + a \ge 0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a-6b=\sqrt{ab}$ $\Rightarrow a^2+36b^2-12ab=ab$ | $a^2-13ab+36b^2=0$

$a^2+2b^2=18$. $a^2+2b^2=18$. | $a^2+2b^2=18$

$18+34b^2-13ab=0$.

$D=169b^2-36\cdot4b=25b^2=(|5b|)^2$ $b>0$

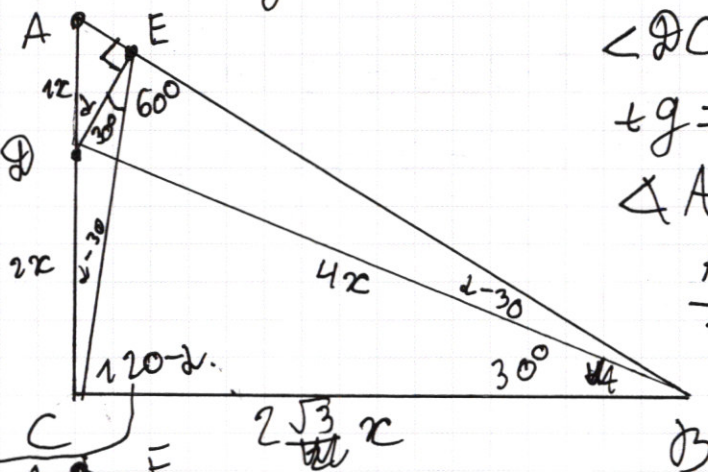
$a_{1,2}=\frac{13b\pm|5b|}{2}$ — $9b$; $4b$

$81b^2+2b^2=18$ $b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$ $a=\pm9\sqrt{\frac{18}{83}}$

$16b^2+2b^2=18$.

$b^2=1$ $b=\pm1$ $a=\pm4$.

№4 $\quad tg\angle BAC=?$



$\angle ADE=\alpha\Rightarrow\angle EDC=180^\circ-\alpha$

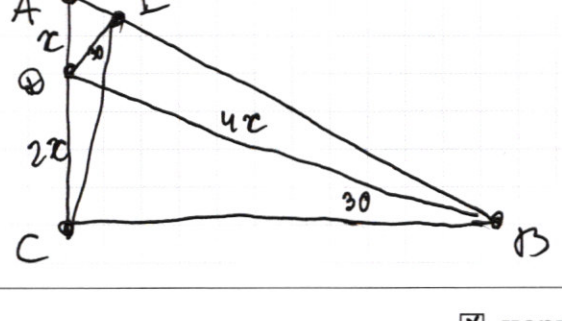
$\angle DCB=90^\circ\Rightarrow$

$tg=\frac{DE}{AE}=\frac{DC}{AC}$.

$\triangle ADB\sim\triangle$ ~~DEA~~ AEC.

$\frac{AD}{AE}=\frac{DB}{EC}\Rightarrow\frac{x}{AE}=\frac{4x}{EC}=\frac{AB}{3x}$

$EC=4AE$



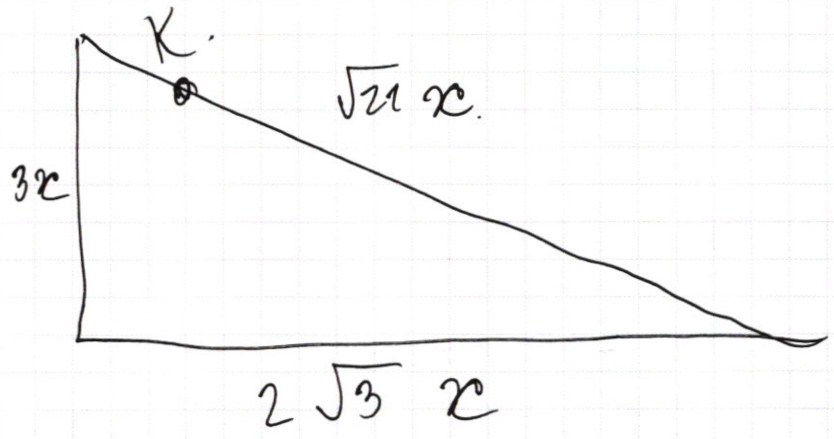
$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$ $\quad EC=4AE$

$AB\cdot AE=3x^2$.

$\frac{x}{AE}=\frac{AB}{3x}=\frac{4x}{EC}$ $\quad tg=\frac{2}{\sqrt{3}}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$$9x^2+12x^2=21x^2$$

$$K\cdot\sqrt{21}\ x=3x^2$$

$$K=\sqrt{\frac{3}{7}}\,x$$

$$\frac{6-a-\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}\le-0{,}5$$

$$6-a-\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}\le-8$$

$$14-a\le\sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}$$

$$196-28a+\cancel{a^2}\le\cancel{a^2}-12a+36-32b+224$$

$$0=64+16a-32b$$

$$0=4+a-2b$$

$$a=2b-4$$

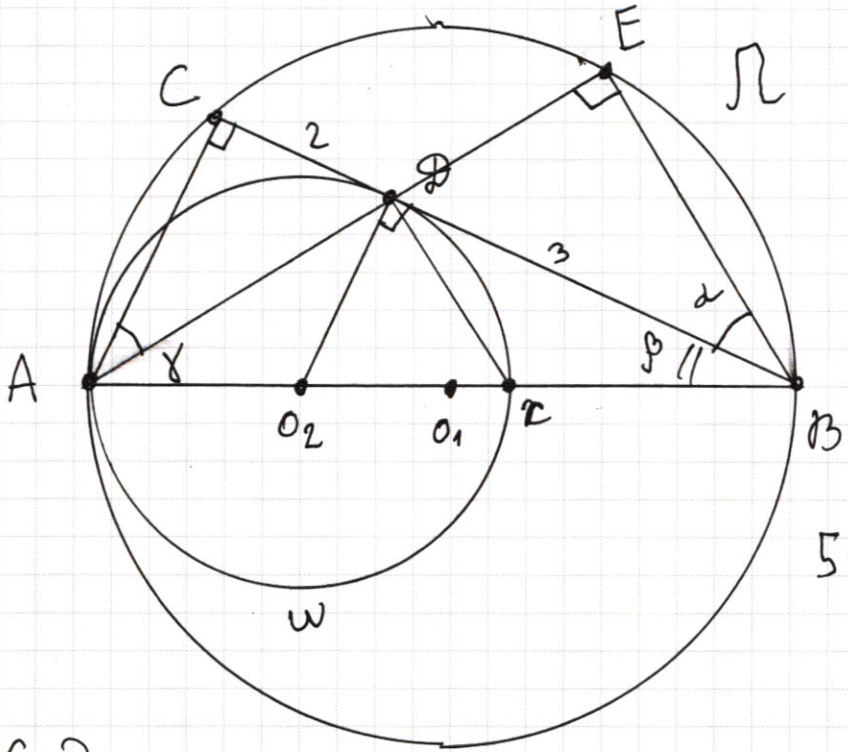
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle ACD \sim \triangle BED$

$\frac{AD}{DB} = \frac{CD}{ED}$

$AD \cdot ED = DB \cdot CD = 6$

$\alpha + \beta + \gamma = 90^0$

$\frac{R-r}{R} = \frac{3}{5}.$

$5R - 5r = 3R$

$2R = 5r$

$R = 2{,}5r.$

$xB \cdot AB = 3^2.$

$xB = R - 2r$

$AB = R$

$R^2 - 2rR = 9.$

$R = 2{,}5r$

$6{,}25r^2 - 5r^2 = 9.$

$1{,}25r^2 = 9.$

$r = \frac{3}{}$

$\left.\begin{array}{l} 9 = \frac{36}{4} \\ 1{,}25 = \frac{5}{4} \end{array}\right\} r = \sqrt{7{,}2}$

$R = 2{,}5\sqrt{7{,}2}.$

$S = \frac{1}{2} AE \cdot CB \cdot \sin\angle CDA.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

w1

a $\qquad d = q^3 a = q \Rightarrow q(q^2a - 1) = 0.$

$b = qa$ $\qquad q = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow c = 0$

$c = q^2 a.$ $\qquad q^2 a = 1 \Rightarrow C = 1.$

$ax^2 - 2bc + c = 0.$

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = q^2a^2 - q^2a^2 = 0.$

$x_{1,2} = \frac{b}{a} = \frac{qa}{a} = q$

w2

$P = a + b + c.$ $\qquad a \le b \le c.$ $\qquad 4a < 900$

$\cancel{c = \sqrt{a^2+b^2}.}$ $\qquad 3a + c = 900$ $\qquad 6a > 900 > 4a.$

$\cancel{\sqrt{a^2+b^2} = 900 - a - b.}$

$\cancel{a^2 + b^2 = 900^2 + a^2 + b^2 - 1800(a+b) + 2ab}$

$\cancel{2ab - 1800(a+b) + 900^2 = 0.}$

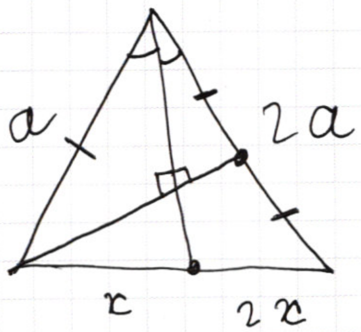
$3a > c > a$ $\qquad a > 150.$

$a + c > 2a$ $\qquad 225 > a.$

$c > a.$ $\qquad a \in [151; 224].$

$2a + c > a.$ $\qquad 224 - 151 + 1 =$

$= 224 - 150 = 74.$



☒ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

$$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}\geq 0.$$

$$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$$

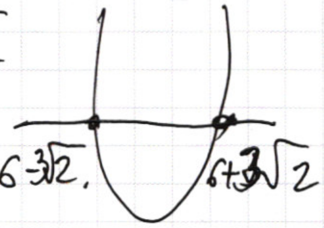
$$(x^2-12x+18)+2(y^2-2y+1)=0.$$

$$(x^2-12x+18)+2(y-1)^2=0.$$
$$\underset{\leq 0.}{(x^2-12x+18)}\qquad \underset{\geq 0}{(y-1)^2}$$

$$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6.$$

$$x^2+36y^2-13xy+x+6y-6=0.$$

$$\frac{D}{4}=36-18=18 \quad x_{1,2}=6\pm 3\sqrt{2}$$



$\sqrt{(y-1)(x-6)}\geq 0 \Rightarrow$

$x-6>0 \Rightarrow x\geq 6+3\sqrt{2}.$

$y-1>0. \Rightarrow y>1.$

$a=x-6. \Rightarrow x-6y=(x-6)-6(y-1)=a-6b=$

$b=y-1 \qquad =\sqrt{(y-1)(x-6)}=\sqrt{ab}$

$$\underbrace{x^2-12x+36}_{(x-6)^2}+\underbrace{2(y-1)^2}_{2(y-1)^2}-18=0.$$

$$a^2+2b^2=18.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(a\cdot b) = f(a)+f(b)$ $\boxed{\text{Задача 7}}$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$f(2)=1.$

$f(3)=1.$

$f(5)=2.$

$f(7)=3$

$f(11)=5$

$f(13)=6.$

$f(17)=8.$

$f(19)=9.$

$f(4)=f(2)+f(2)=2.$

$f(6)=f(2)+f(3)=2.$

$f(8)=f(2)+f(4)=3.$

$f(9)=f(3)+f(3)=2.$

$f(10)=f(2)+f(5)=3.$

$f(12)=f(2)+f(6)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=4.$

$f(15)=f(3)+f(5)=3$

$f(16)=f(2)+f(8)=4.$

$f(18)=f(2)+f(9)=3$

$f(20)=f(2)+f(10)=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=4$; $f(22)=f(11)+f(2)=6$

$22-2+1=21.$

$f(x/y)<0.$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$

$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$0=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

$\Downarrow$

$f(x/y)=f(x)-f(y)$

$f(x)-f(y)<0$

при $2\le x\le 22$ и $2\le y\le 22.$

$f(x)<f(y)$

~~Число Количество~~

Значение	количество чисел $\in [2;22]$ с таким значением
1	2
2	4
3	6
4	4
5	1
6	2
7	0
8	1
9	1

Так как $f(x)<f(y)$, то для значения x для ~~подходят~~ выполнения условия подходят все значения, больше данного, из имеющихся

Сумма всех количеств чисел – 21.

1 : $2(21-2)=38$

2 : $4(21-2-4)=60$

3 : $6(21-2-4-6)=54$.

4 : $4(21-2-4-6-4)=20$

5 : $1(21-2-4-6-4-1)=4$

6 : $2(21-2-4-6-4-1-2)=4$.

7 : $0(21-2-4-6-4-1-2-0)=0$

8 : $1\cdot(21-2-4-6-4-1-2-0-1)=1$.

9 : 0, т.к. чисел, $\in [2;22]$ с значением >9 нет

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда количество пар, которые нам подходят, это $38+60+54+20+4+4+0+1=47+80+54=181$

Ответ: 181

Задача 1

Пусть q - знаменатель этой геометрической прогрессии. Тогда $a=a$; $b=qa$; $c=q^2a$; $d=q^3a$.

$ax^2-2bx+c=0$ $\quad \frac{D}{4}=b^2-ac=q^2a^2-a\cdot q^2a=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ имеет только один корень, а значит корень d.

$\Rightarrow d=\frac{b}{a}=\frac{qa}{a}=q$, если $a\neq 0$ (Если $a=0$, то $c=0$)

$d=q^3a=q \Rightarrow q(q^2a-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow c=0 \\ q^2a=1 \Rightarrow c=1. \end{array}\right.$

Задача 2

Если медиана перпендикулярна биссектрисе одного, а того же выходящей из той же точки, что и данная медиана, то данный угол ≥ 180, чего не может в треугольнике

$P=a+b+c$

$H=BM\cap AQ$

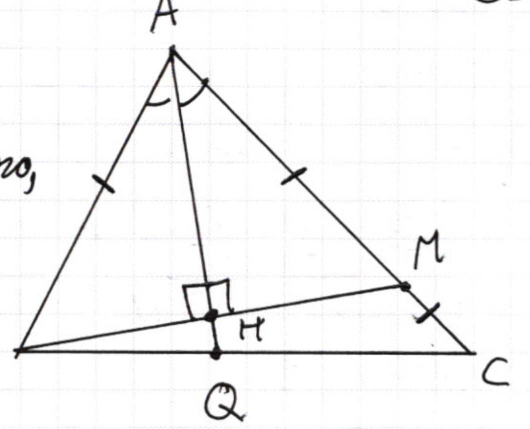
AH - высота и биссектриса в $\Delta ABM \Rightarrow$

$AB=AM=x$

$AM=MC=x \Rightarrow$

$\Rightarrow AC=2x$.

$BC=c$



Чтобы треугольник существовал, для него должно выполняться неравенство треугольника $\Rightarrow \begin{cases} 3x > c \\ c+2x > x \\ c+x > 2x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $c>0$ и $x>0$, то $3x>c$ и $c>x \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x > c > x \\ 3x + c = 900 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x < 900 \\ 6x > 900 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x < 225 \\ x > 150 \end{cases} \Rightarrow$ т.к. по x однозначно восстанавливается c, то нам просто нужно найти кол-во подходящих иксов, а это $225-150-1=74$

Значит, нам подходят 74 треугольника.

Задача 3

$a = x-6$, $b = y-1$ $\Rightarrow$ $x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)} \Leftrightarrow a-6b=\sqrt{ab}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \Leftrightarrow a^2+2b^2=18.$

~~$\sqrt{ab}$~~ $ab \geq 0$ ~~т.к. $\sqrt{ab}$ подкоры~~ как подкоренное выражение

$a-6b\geq 0$ и

$(a-6b)^2=ab \Rightarrow a^2-12ab+36b^2=ab \Rightarrow$

~~$a^2+2b^2=18$~~

$\Rightarrow a^2-13ab+36b^2=0$ – квадратное уравнение от a.

$D = 169b^2-4\cdot 36b^2 = 25b^2=(5b)^2.$

$a_{1,2} = \dfrac{13b \pm |5b|}{2} \Rightarrow a \in \{9b; 4b\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I) $a = 9b$

$a^2 + 2b^2 = 18.$

$81b^2 + 2b^2 = 18.$

$83b^2 - 18 = 0.$

$(b\sqrt{83} - 3\sqrt{2})(b\sqrt{83} + 3\sqrt{2}) = 0.$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} b\sqrt{83} = 3\sqrt{2} \\ b\sqrt{83} = -3\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 3\sqrt{\frac{2}{83}} \\ b = -3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ b = 3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ b = -3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases} \end{array}\right.$ – в обоих случаях $ab \geq 0$, но только во ~~втором~~ первом случае $a - 6b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 27\sqrt{\frac{2}{83}} \\ 3\sqrt{\frac{2}{83}} \end{cases}$

II) $a = 4b$

$a^2 + 2b^2 = 18.$

$16b^2 + 2b^2 = 18.$

$b^2 = 1$

$(b-1)(b+1) = 0$

$\Updownarrow$

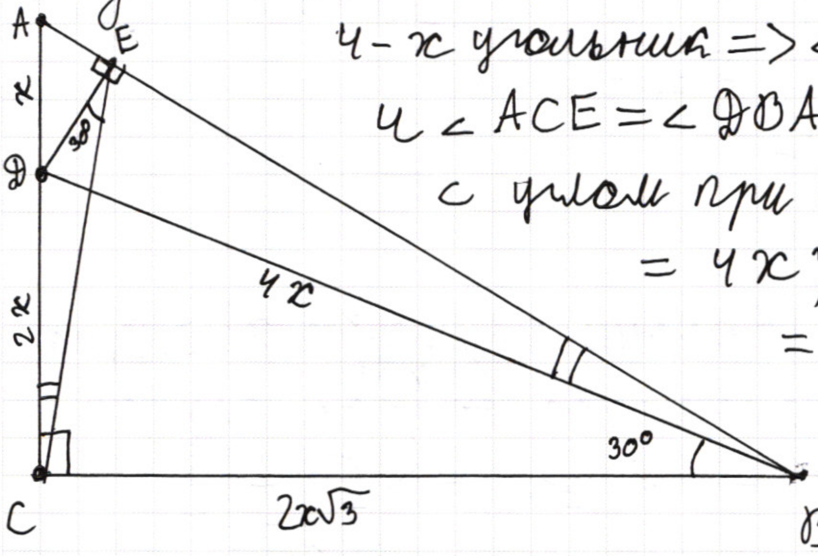
$\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$ – в обоих случаях $ab > 0$, ~~на~~ и ~~толк~~ $a - 6b \geq 0$

Значит, мы получили следующую совокупность пар $(a;b)$

$$\left[\begin{array}{l}(-4;-1)\\(4;1)\\\left(27\sqrt{\frac{2}{83}};3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)\end{array}\right.$$

$x=a+6$
$y=b+1$ $\Rightarrow (x;y)\in\left\{(2;0);(10;2);\left(\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}\right)+6;\left(3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)+1\right)\right\}$

Задача 4 $\angle DEB=\angle DCB=90^\circ \Rightarrow BEDC$ - вписанный 4-х угольника $\Rightarrow \angle CED=\angle DBC=30^\circ$ и $\angle ACE=\angle DBA$. ΔDCB - прямоугольный с углом при $B=30^\circ \Rightarrow DB=2DC=4x$; $CB^2=DB^2-DC^2\Rightarrow$ $\Rightarrow CB=2\sqrt{3}\cdot x$



$tg\angle BAC=\frac{CB}{AC}=\frac{2x\sqrt{3}}{3x}=$
$=\frac{2}{\sqrt{3}}=2\frac{\sqrt{3}}{3}$

~~$S_{\Delta CED}=S_{\Delta AEC}-S_{\Delta AED}$~~

$S_{\Delta CED}=S_{\Delta AEC}-S_{\Delta AED}$.

$tg\angle BAC=tg\angle EAD=\frac{DE}{AE}=\frac{2}{\sqrt{3}}$; $AE^2+DE^2=AD^2=\frac{AC^2}{9}=$
$=\frac{7}{9}\Rightarrow AE^2+\frac{4}{3}AE^2=\frac{7}{9}\Rightarrow\frac{7}{3}AE^2=\frac{7}{9}\Rightarrow AE=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$DE=\frac{2}{3}\Rightarrow \sin\angle BAC=\frac{DE}{AD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$.

$S_{\Delta AED}=\frac{1}{2}\sin\angle BAC\cdot AD\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

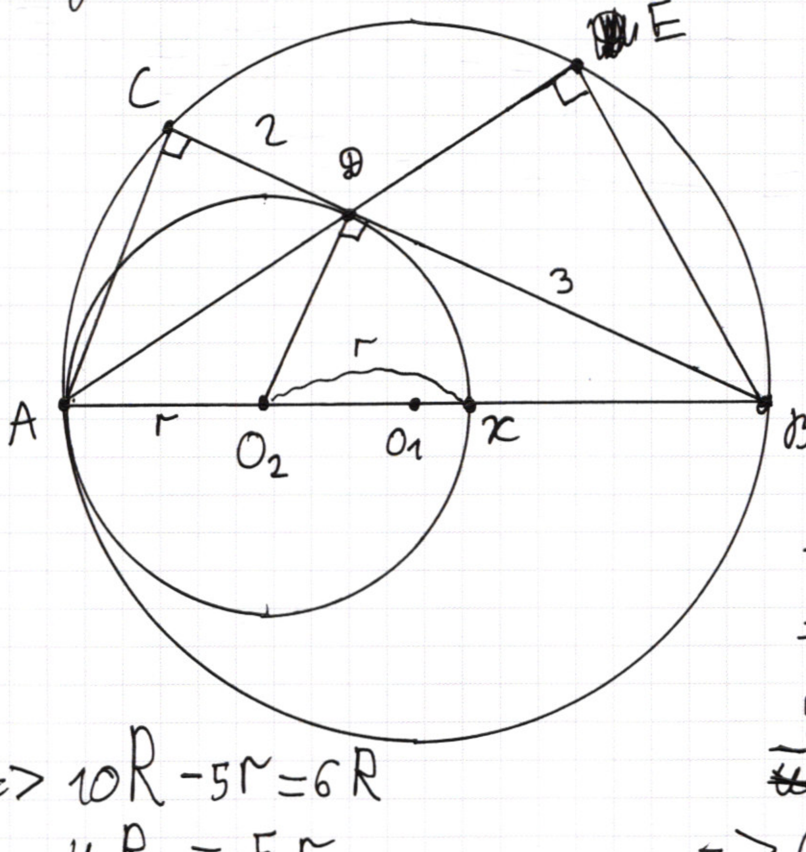
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2}\sin\angle BAC \cdot AE \cdot AC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle CED} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$

Задача 5



$AO_1 = R = O_1B$

$AO_2 = r = O_2x$

O_1 и O_2 - центры Ω и ω. Картинка симметрична относительно AB => O_2 лежит на AB.

$\triangle ACB \sim \triangle O_2DB$:

- BD - кас. к ω => $\angle O_2DB = 90^0 = \angle ACB$ как впис. угол опир. на диаметр ~~и по~~ общий угол ABC

$\Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow 10R - 5r = 6R$

$4R = 5r$

$R = \frac{5}{4}r$

$\left.\begin{array}{l} \deg(\text{т.}B, \omega) = xB \cdot AB = BD^2 = 9 \\ xB = 2R - 2r \\ AB = 2R \end{array}\right\} \Rightarrow 9 = 4(R-r)R \Rightarrow$

$\Rightarrow 9 = r \cdot \frac{5}{4}r \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$AC^2 = AB^2 - CB^2.$

$AC^2 = 4R^2 - 25$

$AC = \sqrt{4R^2 - 25} = \sqrt{45-25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AD^2 = CD^2 + AC^2 \Rightarrow AD = \sqrt{20+4} = 2\sqrt{6}$

$\sin\angle CDA = \cancel{\frac{AD}{AC}} \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

$\deg(D, \Omega) = -2 \cdot 3 = -AD \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{6}{AD} = \frac{6}{2\sqrt{6}} =$
$= \frac{\sqrt{6}}{2}$

$S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \sin\angle CDA \cdot CB \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 5 \left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)\sqrt{\frac{5}{6}}$
$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{25\sqrt{5}}{4} = 6{,}25\sqrt{5}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)