



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа  $a, b, c$  не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$ . Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  на катете  $AC$  и гипотенузе  $AB$  отмечены точки  $D$  и  $E$  соответственно, такие что  $AD : AC = 1 : 3$  и  $DE \perp AB$ . Найдите тангенс угла  $BAC$ , если известно, что  $\angle CED = 30^\circ$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $AC = \sqrt{7}$ . Найдите площадь треугольника  $CED$ .
5. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника  $BACE$ , если известно, что  $CD = 2, BD = 3$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{1}{2}; 1]$ .

7. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/2]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$  и  $f(x/y) < 0$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

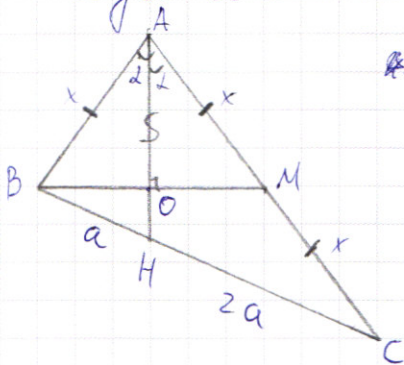
$$ax^2 - bx + c = 0 \quad x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a}}}{a}$$

$a, b, c, x$  - члены геом. прогр. Фел:  $b = a \cdot k$   $c = a \cdot k^2$   $x = a \cdot k^3$

$$\Rightarrow x = k \pm \sqrt{k^2 - k^2} = k \quad x = ak^3 \Rightarrow ak^3 = k$$

$$\Rightarrow ak^2 = 1; \quad c = ak^2 \Rightarrow c = 1$$

Задача 2



$\Delta AOB = \Delta AOM$  (прямоуг.;  $AO$  - общ.;  $\angle BAO = \angle OAM$ )

$$\Rightarrow AB = AM = x$$

$$AH - \text{выс.} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{BH}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$2BH = HC = 2a$$

$$3x + 3a = 900 \quad a + x = 300 \quad 3a < 2x + x \quad 3a + x > 2x \quad 3a + 2x > x$$

$$a < x; \quad a > \frac{x}{3}; \quad a > -\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x}{3} < a < x$$

$$\frac{x}{3} < 300 - x < x \Rightarrow 300 < 2x \Rightarrow x > 150$$

$$\frac{x}{3} < 300 \Rightarrow x < 200 \Rightarrow 150 < x < 200$$

$$\Rightarrow K = (200 - 150 - 1) = 49 \quad 44 \Rightarrow 75 < a < 150$$

Выбрав  $x$  (такое, что  $150 < x < 200$ ) рассмотрим  $\angle$  (от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  ( $0^\circ; 90^\circ$ ))  $\Rightarrow a$  непрерывно меняется от  $\frac{x}{3}$  до  $x$  ( $\frac{x}{3}; x$ ), среди которых общ. найдётся такое  $a$ , что  $a + x = 300$  (по лем. выше) ( $x \in (150, 200); a \in (75, 150)$ ), то для мод.  $x \in (150, 200)$  найдётся  $a$ .

$\Rightarrow$  Ответ: 44



### Задача 3

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \quad \textcircled{1} \quad x - 6y \geq 0; \quad xy - 6y - x + 6 \geq 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 32xy + 36y^2 - xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(1-13y) \pm \sqrt{(1-13y)^2 - 4(36y^2 + 6y - 6)}}{2} = \frac{1}{2} (13y - 1 \pm \sqrt{1 + 169y^2 - 26y - 144y^2 - 24y + 24}) = \frac{1}{2} (13y - 1 \pm \sqrt{25y^2 - 50y + 25}) = 9y - 3; \quad 4y + 2$$

$$x = 9y - 3: \quad 81y^2 + 9 - 54y + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$$

$$83y^2 - 168y + 65 = 0 \quad y^2 - 2y + \frac{65}{83} = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \frac{65}{83}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$x = 4y + 2: \quad 16y^2 + 4 + 16y + 2y^2 - 48y - 24 - 4y + 20 = 0$$

$$18y^2 - 36y = 0 \quad y = 0; \quad -2$$

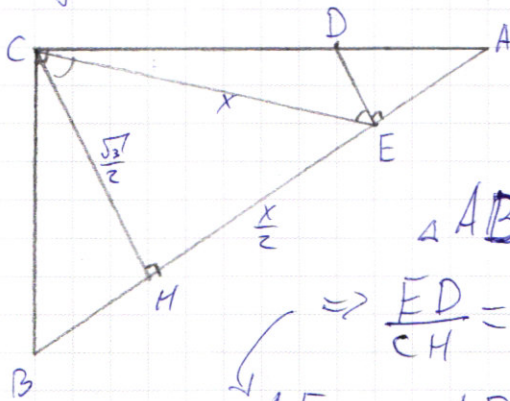
$$\Rightarrow \text{~~ответ~~ } \left\{ y=0; x=2 \right\}; \left\{ y=2; x=10 \right\}; \left\{ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}; x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}} \right\};$$

$$\left\{ y=1-\sqrt{\frac{18}{83}}; x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}} \right\} \rightarrow \text{не пойд. по } \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } \begin{cases} y=0; x=2 \\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}; x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~ 4



$CH \parallel DE; HE \perp AB$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle ECH = 30^\circ$

пусть  $EC = x \Rightarrow EH = \frac{x}{2}; CH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$  (прямоуг.;  $\angle A$  - общ.)

$\Rightarrow \frac{ED}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{3}}{6}x$

$\frac{AE}{AE+EH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AE + \frac{x}{6} \Rightarrow AE = \frac{x}{4}$

$\Rightarrow \tan(\alpha) = \frac{ED}{EA} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x}{\frac{x}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$AC = \sqrt{7}: \triangle AED: (\frac{x}{4})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{6}x)^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{7}{9} = x^2(\frac{1}{16} + \frac{1}{12})$

$\frac{28}{9} = x^2(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}) \Rightarrow \frac{28}{9} = x^2(\frac{7}{12}) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{48}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{16}{3}$

$S_{CDE} = \frac{1}{2} \sin 30^\circ \cdot ED \cdot CE = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 1 \cdot x^2 = \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot 16}{4 \cdot 6 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Задача ~ 7

$f(a) = f(\frac{a-a}{a}) = f(a) + f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

~~$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(y)$~~   $\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$n \in \mathbb{N} \quad f(n) = \sum f(p_i) \quad p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i = n \quad p_i - \text{простые } \mathbb{Z}$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = \sum f(p_x) - \sum f(p_y) \leftarrow \text{разность функций от простых}$

множителей  $x$  и  $y$ , получ. в результ. разлож на множ

$a$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
множители	2	3	2 5	2 5	2 3	2 7	2 3 5	2 3 5	2 3 5	2 11	2 13	2 3 7	2 3 5 7	2 3 5 7	2 3 5 7	2 17	2 3 19	2 3 11	2 3 13	2 3 17	2 3 19
$f(a)$	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

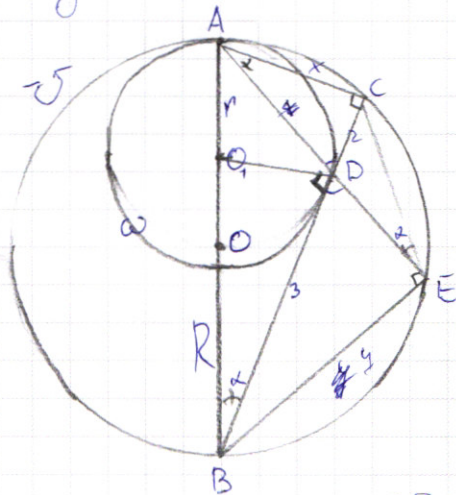
$f(xy) < 0, \text{ т.е. } f(x) < f(y)$

$f(x)$	1	2	3	4	5	6	8	9
каково больше	10	15	9	5	4	2	1	0
каково меньше	2	4	6	4	1	2	1	1

Ответ:  $\sum k_i \cdot k_j = 161$



# Задача 5



$$\frac{y}{x} = \frac{3}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{\sqrt{9-y^2}}{2} \quad 4R^2 = 5^2 + x^2 = (\sqrt{9-y^2} + \sqrt{4+x^2})^2 + y^2$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{9}{4+x^2} = \frac{9-y^2}{4} \quad y^2 = \frac{9x^2}{4+x^2}$$

~~$$4y^2 + y^3 x^2 - 9x^2 = 0$$~~
~~$$4y^2 - 9x^2 + x^3 y^2 = 0$$~~

$$\sqrt{9-y^2} \cdot \sqrt{4+x^2} = 3 \cdot 2$$

~~$$4R^2 = 25 + x^2 = 9 - y^2 + 4 + x^2 + 2 \cdot 6 \cdot \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{3x^2}{2} \cdot \frac{2}{3}$$~~

$$4R^2 = 25 + AC^2$$

$$O, D \perp CB$$

~~$$\frac{5}{2R} = \frac{3}{R+r}$$~~

$$5R = 5r = 6R \quad r = \frac{1}{5}R \quad (R+r)^2 = 9 + r^2$$

$$\frac{36}{25}R^2 - \frac{1}{25}R^2 = 9$$

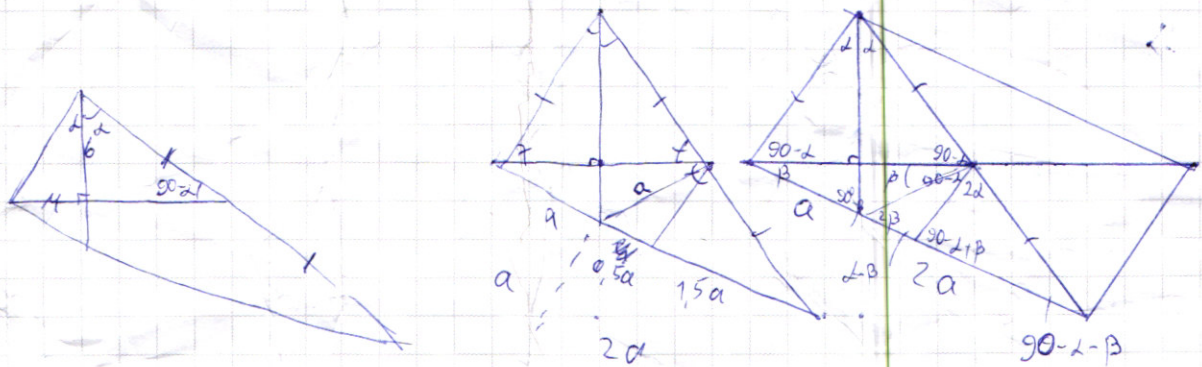
$$R^2 = \frac{9 \cdot 5}{7} \Rightarrow R = 3\sqrt{\frac{5}{7}}$$

$$r = 3\sqrt{\frac{1}{25}}$$

$$x = \sqrt{4R^2 - 25} = \sqrt{\frac{5}{7}} \quad y = \frac{3}{2}$$

$$S_{ACE} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot CE \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( 2R \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} \right)$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$3x + 3a = 900$$

$$x + a = 300$$

$$3x + 3a = 15$$

$$x + a = 5$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x^2 - x^2 \cdot \cos 2\alpha}$$

$$a = x \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\alpha}$$

$$x + a = 300$$

$$x \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{4} - \cos 2\alpha} \right) = 300$$

$$\frac{5}{4} - \cos 2\alpha = \left( \frac{300}{x} - 1 \right)^2$$

$$0 < 3a < 3x$$

$$a < x$$

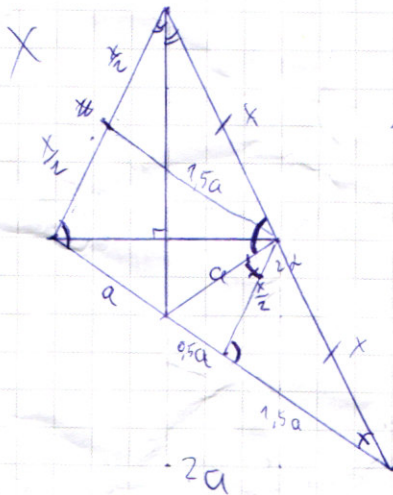
$$\Rightarrow a < 150$$

$$a = \{1; 2; \dots; 149\}$$

$$3a > x$$

$$\frac{x}{3} < a < x$$

$$75 < a < 150$$



$$x + a = 300$$

$$\frac{x}{2} + 1.5a$$

$$\frac{0.5a}{0.5x} = \frac{1.5a}{x \cdot 0.5}$$

$$3a + x$$



$$x - 6y \geq 0$$

$$xy - 6y - x + 6 \geq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 6 \\ x < 6 \\ y < 9 \end{cases}$$



$$x - 6y = \sqrt{x(y-1) - 6(y-1)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy - xy + 6y + x - 6 = 0$$

$$36y^2 + 6y + x^2 + x - 13xy - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 + 13y \pm \sqrt{(1-13y)^2 - 4(36y^2 + 6y - 6)}}{2} = 4y + 2; 9y - 3$$

$$1 + 169y^2 - 26y - 144y^2 - 24y + 24 = (25y^2 - 50y + 25) = (5y - 5)^2$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(29y^2 - 4y + 20)}}{2} = 6 \pm \sqrt{36 - 29y^2 + 4y - 20}$$

$$= 6 \pm \sqrt{-29y^2 + 4y + 16} = 6 \pm \sqrt{-2(y^2 - 2y + 1 - 9)} = 6 \pm \sqrt{-2(y-4)(y+2)}$$

$$-2 \leq y \leq 4$$

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8(x^2 - 12x + 20)}}{4} = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{2} + 6x - 10} = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + 18 - 12x)}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{-\frac{16y^2 + 16y + 4}{2} + 24y + 12 - 10} = 1 \pm \sqrt{-8y^2 + 16y}$$

$$(y-1)^2 = 8(2y - y^2)$$

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 - 12x + 36 - 18)}$$

$$4y - 4 = \pm \sqrt{-2(y-4)(y+2)}$$

$$16y^2 - 32y + 16 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$18y^2 - 36y = 0 \quad y=0 \quad x=2$$

$$y=2 \quad x=4$$

$$(9y-9)^2 = (\sqrt{-2(y-4)(y+2)})^2$$

$$81y^2 - 162y + 81 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$y^2 - 2y + \frac{65}{83} = 0$$

$$y = \frac{166 \pm \dots}{83}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{65}{83}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{83 - 65}{83}} = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

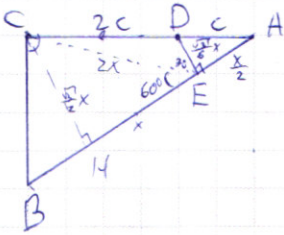


**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

a  
b ak  
c ak<sup>2</sup> - ?

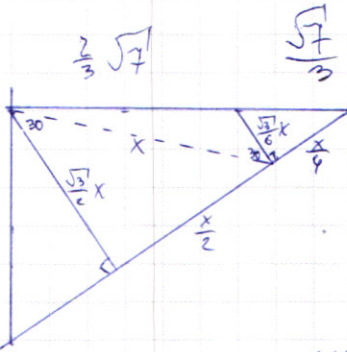
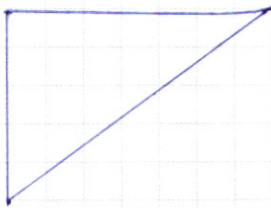
$$ak^3 = \frac{26 \pm \sqrt{46^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{\frac{6^2}{a^2} - \frac{c}{a}}}{1}$$

$$ak^3 = k \pm \sqrt{k^2 - k^2} \quad ak^2 = 1$$



$$\frac{AE}{3c} = \frac{c}{AB}$$

$$AE \cdot 3 = AE + EH \quad EH = 2AE$$



$$\Rightarrow \text{tg} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{7}{9} = \frac{x^2}{16} + \frac{3x^2}{36} = \frac{x^2}{16} + \frac{x^2}{12}$$

$$\frac{7}{9} = x^2 \left( \frac{12+16}{16 \cdot 12} \right) = x^2 \frac{28}{3 \cdot 2^5}$$

$$144 \quad 12x^2 +$$

$$x^2 = \frac{16}{3} \quad x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1}{2} \sin 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} x^2 = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

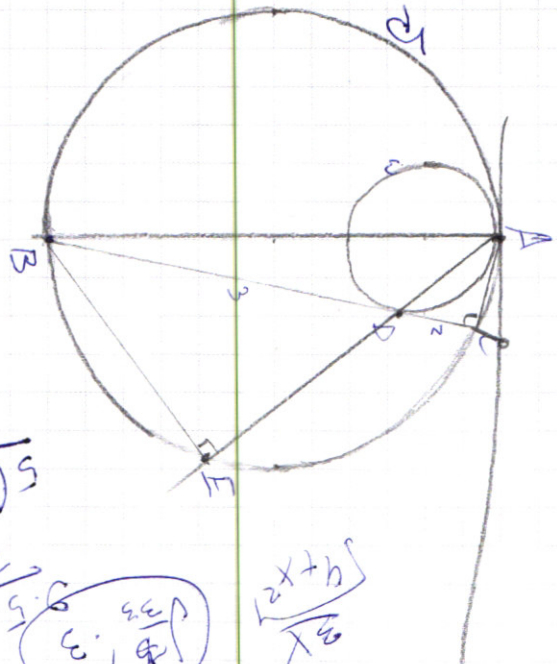
$$6 + \frac{5c}{6} \quad \frac{5c}{1} = 28$$

$$\frac{7}{9} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{5c}{1} = 28$$

$$\frac{5c}{1} = 28$$

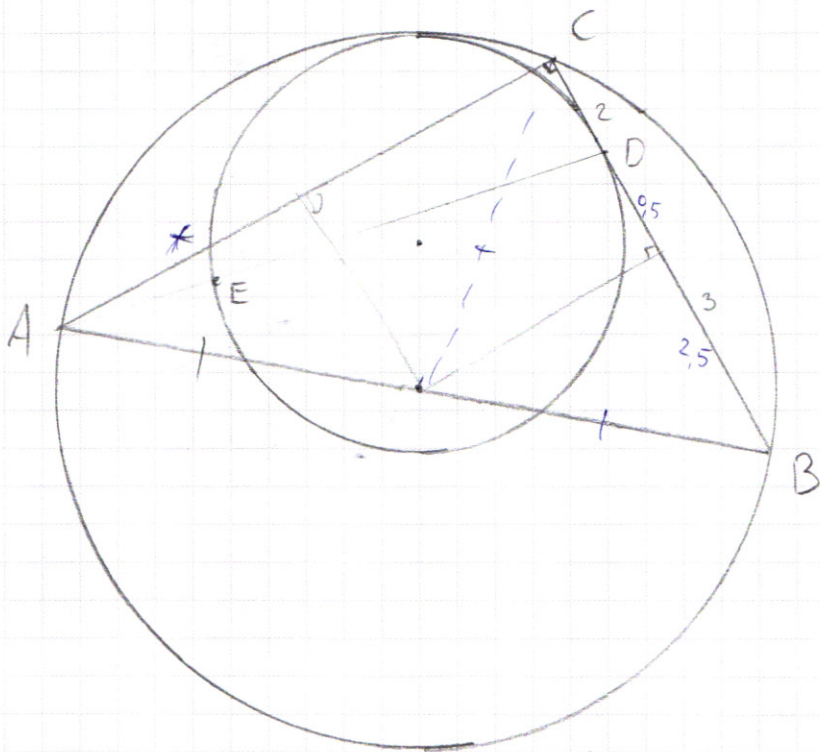
$$\frac{5}{2R} = \frac{1}{R} \quad \frac{5}{2R} = \frac{1}{R}$$



$$\frac{5}{2R} = \frac{1}{R} \quad \frac{5}{2R} = \frac{1}{R}$$



1-12+36  
2-4+2  
81-18



2.19  
+  
4.15  
6.9  
4.5  
1.4  
2.2  
1.1  
1.0

2		1
3		1
4	2+2	2
5		2
6	2+3	2
7		3
8	2+2+2	3
9	2+3	2
10	2+5	3
11		5
12	2+2+3	3
13		6
14	2+7	4
15	3+5	3
16	2+2+2+2	4
17		8
18	2+3+3	3
19		9
20	2+2+5	4
21	3+7	4
22	2+11	6

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 224}}{-16} = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{-8} = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{8}$$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \quad N, A \in \mathbb{N} \quad p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$

$f(R) = f(N) + f(\frac{1}{A}) = \sum f(p_i) + f(\frac{1}{A})$

$f(a) = f(a) + f(a) + f(\frac{1}{a}) \quad f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$$\Rightarrow f(R) = \sum f(p_i) - \sum f(p_j) < 0$$

$$\Rightarrow \sum f(p_x) < \sum f(p_y)$$

$$38 + 60 + 54 +$$

$$4 + 4 + 1$$

$$152 + 9$$

$$6 + 9 \cdot \frac{18}{83} + 6 - 6 - 6 - 10 \cdot \frac{18}{83}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)