МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \to y\geq 2x \quad \begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \quad a=x-1,\ b=y-2,\ y-2x=b-2a$

$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \to 4a^2-5ab+b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(4a-b)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$

$a=b$ или $b=4a$

1) $a=b$

$2a^2+a^2=3 \quad a^2=1 \to a=\pm1$

1. $a=b=1 \to x=2 \quad y=3$, но $3<4 \to$ не подходит.

2. $a=b=-1 \to \underline{x=0} \quad \underline{y=1}$

2) $b=4a$

$2a^2+16a^2=3 \quad 18a^2=3 \to a=\frac{\pm\sqrt6}{6} \quad b=\frac{\pm2\sqrt6}{3}$

1. $a=\frac{\sqrt6}{6} \to \underline{x=1+\frac{\sqrt6}{6}} \quad b=\frac{2\sqrt6}{3} \to \underline{y=2+\frac{2\sqrt6}{3}}$

2. $a=\frac{-\sqrt6}{6} \to x=1-\frac{\sqrt6}{6} \quad b=\frac{-2\sqrt6}{3} \to y=2-\frac{2\sqrt6}{3}$, но $2-\frac{2\sqrt6}{3}<2-\frac{\sqrt6}{3} \to$ не подходит

Ответ: $(0;1)$, $\left(1+\frac{\sqrt6}{6};\ 2+\frac{2\sqrt6}{3}\right)$.

№4

Дано:

а) $AD:AC=3:5$

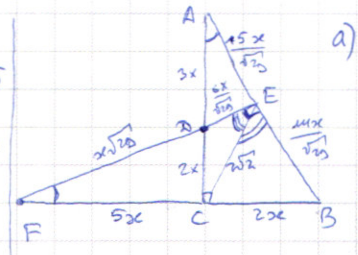
$DE\perp AB$

$\angle CED=45^\circ$

$\operatorname{tg} BAC$ – ?

б) $AC=\sqrt{29}=5x$

S_{CED} – ?



а) 1) Продолжим ED и BC до пересечения в точке F. Тогда в прямоугольных $\triangle FEB$ и $\triangle ACB$ $\angle B$ – общий $\to \triangle FEB \sim \triangle ACB$.

2) ~~tg BAC~~ т.к. $\angle DEB=90^\circ$ и $\angle CED=45^\circ$, то $\angle CEB=45^\circ$. Тогда EC – биссектриса $\angle DEB$.

3) $\operatorname{tg} BAC=\frac{BC}{AC}$

$\operatorname{tg} EFB\ (=\operatorname{tg} BAC)=\frac{BE}{FE}$

По св-ву бис-сы $\frac{BE}{FE}=\frac{BC}{FC}$

$\frac{BC}{AC}=\frac{BE}{FE}=\frac{BC}{FC}$, $AC=FC=5x$

3) Из $\triangle DFC$: $\operatorname{tg} DFC\ (=\operatorname{tg} BAC)=\frac{DC}{FC}=\frac{2x}{5x}=0{,}4$.

б) 1) $\triangle ACB=\triangle FCD$ (по стороне $FC=AC$ и двум прилежащим к ней углам) $\to BC=DC=2x \quad FD=AB=\sqrt{4x^2+25x^2}=x\sqrt{29}$ (по т. Пифагора)

~~tg BAC = tg DBE ...~~ т.к. $\triangle FDC\sim\triangle ADE$ (по трём углам)

$\frac{AD}{FD}=\frac{DE}{DC}=\frac{AE}{FC} \Rightarrow DE=\frac{3x\cdot 2x}{x\sqrt{29}}=\frac{6x}{\sqrt{29}}$ тогда $AE=\frac{3x\cdot5x}{x\sqrt{29}}=\frac{15x}{\sqrt{29}}$

$BE=x\sqrt{29}-\frac{15\sqrt{29}x}{29}=x\sqrt{29}\cdot\frac{14}{29}=\frac{14x}{\sqrt{29}}$

2) Найдём CE по т. косинусов: $CB^2=BE^2+CE^2-2BE\cdot CE\cdot\cos45^\circ$

$29=49+CE^2-2\cdot7\cdot CE\frac{\sqrt2}{2} \Leftrightarrow CE^2-7\sqrt2\,CE+20=0 \to CE=2\sqrt2$ или $5\sqrt2$.

Но $5\sqrt2$ не подходит по нер-ву треугольника $5\sqrt2>BE+BC=2{,}8+0{,}4\sqrt{29}$

3) $S_{CED}=\frac12 ED\cdot EC\cdot\sin DEC$

$S_{CED}=\frac12\cdot1{,}2\cdot2\sqrt2\cdot\frac{\sqrt2}{2}=1{,}2$.

Ответ: а) $\operatorname{tg} BAC=0{,}4$; б) $S_{CED}=1{,}2$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

N5

Дано:

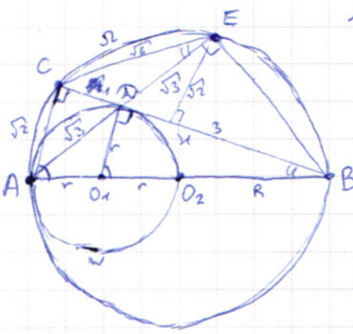
CD = 1

BD = 3

r – ?

R – ?

S_{BACE} – ?



1) O_1 – центр ω с R O_2 – центр Ω с r

BD – касательная → $\angle BDO_1 = 90^\circ$

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр AB) } $AC \parallel O_1D$

Тогда $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (по трём углам)

$\frac{AB}{O_1B} = \frac{CB}{DB} = \frac{4}{3}$ $AB = 2R$, $O_1B = 2R - r$ } $\frac{2R}{2R-r} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6R = 8R - 4r$; $\underline{R = 2r}$

→ ω проходит через центр Ω.

2) По т. Пифагора для $\triangle BO_1D$: $BD^2 + DO_1^2 = BO_1^2$

$9 + r^2 = (R+r)^2 = 9r^2 \rightarrow r^2 = \frac{9}{8} \rightarrow r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \underline{0{,}75\sqrt{2}}$

$\underline{R = 1{,}5\sqrt{2}}$

3) $AC = \sqrt{4R^2 - BC^2} = \sqrt{18-16} = \sqrt{2} \rightarrow AD = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ $AB = 2R = 3\sqrt{2}$

$\triangle CDE \sim \triangle ABD$ (по двум углам: $\angle ADB = \angle CDE$ (верт.), $\angle CED = \angle DBA$ (опираются на одну дугу)).

$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{ED} = \frac{AB}{CE}$ $\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{3}{ED} = \frac{3\sqrt{2}}{CE} \rightarrow ED = \sqrt{3}$ $CE = \sqrt{6}$ $BE = \sqrt{9-3} = \sqrt{6} \rightarrow CE = BE = \sqrt{6}$.

4) EH – высота в $\triangle CEB$, $CH = HB = 2 \rightarrow EH = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CEB} = \frac{1}{2} AC \cdot BC + \frac{1}{2} EH \cdot BC = \frac{1}{2} BC(AC + HE)$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $r = 0{,}75\sqrt{2}$; $R = 1{,}5\sqrt{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

N6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

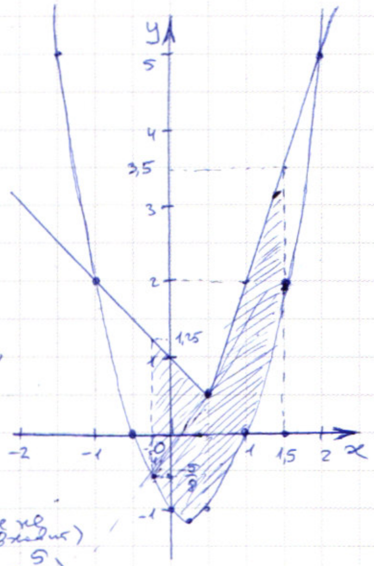
Построим $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$

$y = 2x^2 - x - 1$ $y = x + |2x - 1|$

$x_в = \frac{1}{4}$ $x \ge 0{,}5$ $y = 3x - 1$

$x < 0{,}5$ $y = 1 - x$

x	$\frac{1}{4}$	0	0,5	-1	1,5	2
y	$-1\frac{1}{8}$	-1	-1	2	2	5



$y = ax + b$ – прямая

Решение нер-ва расположены над $y = 2x^2 - x - 1$, но под $y = x + |2x - 1|$. Прямая $y = ax + b$ должна попадать в заштрихованную область на интервале $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$y = ax + b$ при $a > 0$, т.е. прямая расположена в I и III четвертях (иначе не подходит).

~~При b~~ Зафиксируем точку $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$.

Чтобы прямая полностью вошла в заштрихованную область, она должна проходить и через точки 2) $(0{,}5; 0{,}5)$, и 1) $(1{,}5; 2)$. Тогда в первом случае:

точки прямой $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $(1{,}5; 2)$ $\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ 2 = 1{,}5a + b \rightarrow b = 2 - 1{,}5a \end{cases}$ $-\frac{5}{8} = -0{,}25a + 2 - 1{,}5a \rightarrow \underline{a = 1{,}5}$, $\underline{b = -0{,}25}$

2) $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ $(0{,}5; 0{,}5)$

$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ 0{,}5 = 0{,}5a + b \end{cases}$ $b = 0{,}5 - 0{,}5a$ $-\frac{5}{8} = 0{,}25a + 0{,}5 - 0{,}5a \rightarrow a = 1{,}5$, $b = -0{,}25$

$(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$, $(0{,}5; 0{,}5)$, $(1{,}5; 2)$

Это значит, только одна прямая $y = 1{,}5a - 0{,}25$ удовлетворяет нер-ву (лежат на 1 прямой) т.к. мы не можем ни опустить левую точку $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$, ни поднять правую $(1{,}5; 2)$

Ответ: $a = 1{,}5$; $b = -0{,}25$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a \quad b=aq \quad c=bq=aq^2 \quad x=aq^3$ Найти: $c=aq^2$ - ?

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4a^2q^2-4a^2q^2=0$ (по св-ву геом. прогр. $z_n^2=z_{n-1}\cdot z_{n+1}$)

$x=\frac{-2b}{2a}=\frac{-2aq}{2a}=-q \quad -q=aq^3 \quad q(aq^2+1)=0$

$q=0$ или $aq^2=-1$

$\Updownarrow \qquad c=-1$

$c=0$, но тогда и $a=0$, но из уравнения $ax^2+2bx+c=0$ $a\neq 0$.

Ответ: -1.

№7

$f(ab)=f(a)+f(b) \quad f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]=\frac{p-1}{2}$ (p-нечётное т.к. кроме 2)

это означает, что $f(n)$, где n-составное число, равно функциям от его простых делителей.

Например: $f(18)=f(3)+f(6)=f(3)+f(2)+f(3)$.

Причём, $f(1)=0 \quad f(2)=1 \quad f(3)=1 \quad f(5)=2 \quad f(7)=3 \quad f(11)=5$

$f(13)=6 \quad f(17)=8 \quad f(19)=9$, т.е. все функции ≥ 0.

Заметим, что если m - ~~составное~~ простое число, то

$f(m\cdot\frac{1}{m})=f(1)=0=f(m)+f(\frac{1}{m}) \Leftrightarrow f(m)=-f(\frac{1}{m})$.

Итак, надо найти такие числа x и y, чтобы $\frac{x}{y}<1$

Пример: $x=5$, $y=18$ $\quad f(\frac{5}{18})=f(1)-f(\frac{18}{5})=-\left(f(\frac{1}{5})+f(3)+f(3)\right)=$ $+f(2)$

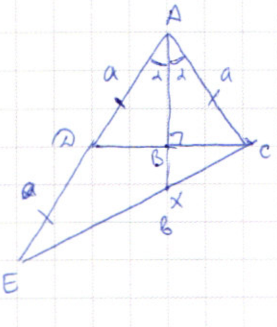
$=-\left(f(\frac{1}{5})+3\right)=f(5)-3=2-3=-1$.

Поэтому всего пар: для $x=1$ $y\in[2;21]$, для $x=2$ $y\in[3;21]$ и т.д. (во $x\leq 20$, $y\leq 21$): $20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=20!$

Ответ: $20!$.

№2

$P=1200$



Построим прямоугольный $\triangle ABC$ с углом $BAC=\alpha$. Построим $\angle BAD=\alpha$ и продлим сторону AD в 2 раза. Таким образом $\triangle CAD$ - равнобедренный. А в искомом $\triangle ACE$, где бис-са $AX\perp$ медиане CD, одна сторона в 2 раза больше другой. Значит, мы имеем треугольники, в которых одна сторона в 2 раза больше другой (все стороны целые), тогда медиана из угла между стороной, которая в 2 раза меньше и третьей стороной, будет $\perp$ бис-се между сторонами, одна из которых в 2 раза больше другой.

$1200=3a+b$, где a,b-целые и $b<3a$ ($b<200$ ($1200=3a+3a$) $a>200$) т.к. $2a<a+b$ $a<b$. Заметим, что $b\vdots 3$.

Кол-во таких пар a b - искомое кол-во треуг-ков $\to$ все пары, где $b=3n$ ... если $b<300$, то это самое $\Leftarrow$ т.к. если $b=300$ $a=300$ то 600 $600=300+300$ ⊗ (нерав-во $\triangle$-ков) (100; 200) всего 99

Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b = aq \quad c = bq = aq^2$ Найти c?

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4a^2q^2 - 4a^2q^2 = 0$

$x_1 = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} = \frac{-aq}{a} = -q$

$-q = aq^3$

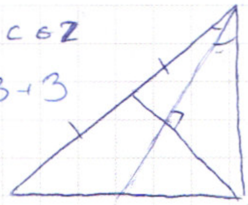
$q(aq^2+1) = 0$

$q = 0$ или $aq^2 = -1 = c$

$P = 1200 \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$

$\cancel{AB} = 399 \cdot 3 + 3$

1100

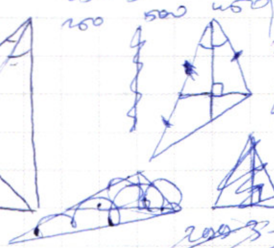


$300 \cdot 3 + 300$

$299 \cdot 3 + 303$ 299 598 602

$280 \cdot 3 + 460$ 460 303

200 500



$301 \cdot 3 + 297$ 301 602 297

$303 \cdot 3 + 3$ 300 298

$299 \cdot 3 + 303$

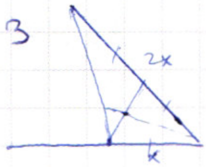
299 598 303

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 - y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

ОДЗ: $y \geq 2x$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0$

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$



$a = x - 1$

$b = y - 2$

$y^2 - 4x + 4x^2 = x(y-2) - (y-2) = (x-1)(y-2)$

$y^2 + 4x(x-1) = (x-1)(y-2)$

~~$(x-1)(y-2) - 2x^2 - 4y + 3 = 0$~~

$y^2 + (4x^2 - 4x + 1) - 1 = (x-1)(y-2)$

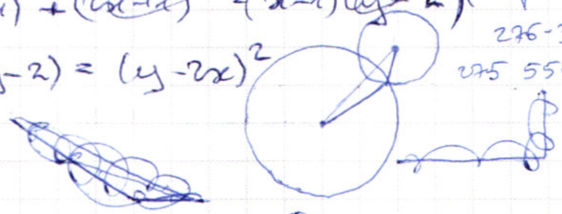
$(y-1)(y+1) + (2x-1)^2 = (x-1)(y-2)$

$(x-1)(y-2) = (y-2x)^2$

b = 600, a = 200, 600, 200, 1000

$276 \cdot 3 + 375$

275 550 375



$y - 2x = y - 2 - x + 1 - x + 1 = b - 2a$

$\begin{cases} 2a^2 + b^2 = 3 \\ ab = (b - 2a)^2 \end{cases}$

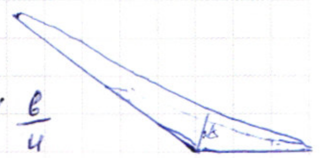
$b^2 - 4ab + 4a^2 - ab = 0$

$4a^2 - 5ab + b^2 = 0$

$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$

$a_{1/2} = \frac{5b \pm 3b}{8} = b \,/\, \frac{b}{4}$

$(a - b)(4a - b) = 0$



1) $a = b$

$3b^2 = 3$

$b = 1$ или $b = -1$

$a = x - 1 = 1$ $\quad -1 = x - 1$

$x = 2$ $\quad x = 0$

$b = y - 2 = 1$ $\quad -1 = y - 2$

$y = 3$ $\quad y = 1$

По ОДЗ не подх

2) $b = 4a$

$2a^2 + 16a^2 = 3$

$a^2 = \frac{1}{6}$

$a = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$

$b = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$a = \frac{\sqrt{6}}{6} = x - 1 \rightarrow \boxed{x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}}$

$b = \frac{2\sqrt{6}}{3} = y - 2 \rightarrow \boxed{y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}}$

$2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \geq 2 + \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$ ✓

$a = \frac{-\sqrt{6}}{6} = x - 1 \rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$

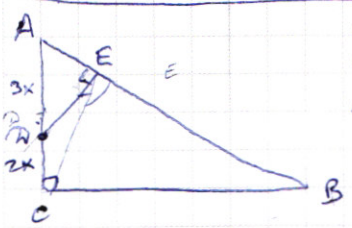
$b = -\frac{2\sqrt{6}}{3} = y - 2 \rightarrow y = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \geq 2 - \frac{\sqrt{6}}{3}$

$-\frac{\sqrt{6}}{3} \geq 0$ ✗

Ответ: $(0; 1)$

$\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}; 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.



$AD : AC = 3 : 5$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45° \rightarrow \angle DEC = 45°$

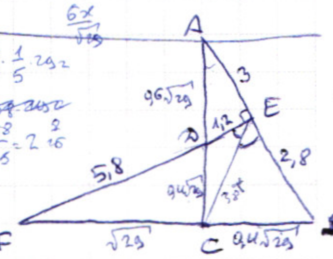
$\operatorname{tg} BAC - ?$ $\quad \operatorname{tg} BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{BE}{FE} = \frac{CB}{FC}$

$\triangle FEB \quad \triangle BCE$

$AC = \sqrt{29} = 5x$

$S_{CED} - ?$

$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot 29 = \frac{58}{25} = 2.16$



$\operatorname{tg} BAC = \operatorname{tg} CFD = \frac{2x}{5x} = \boxed{0{,}4}$

$AC = FC = 5x$

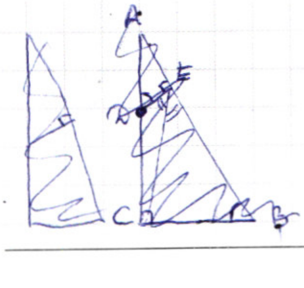
$\frac{CB}{AC} = 0{,}4 \rightarrow CB = 0{,}4\sqrt{29}$

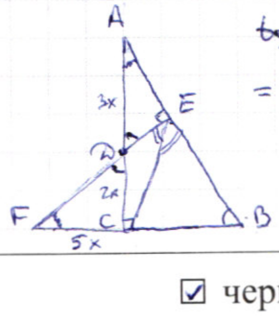
$FD = \sqrt{4x^2 + 25x^2} = x\sqrt{29} = \frac{\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{5}$

$\frac{AD}{FD} = \frac{DE}{CD} \rightarrow DE = \frac{0{,}6\sqrt{29} \cdot 0{,}4\sqrt{29}}{5} =$

$AB = \frac{0{,}4\sqrt{29}}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{29}{5}$

$= 1{,}2$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$29 = 49 + x^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 + 20 - 7\sqrt{2}x = 0$

$D = 98 - 80 = 18$

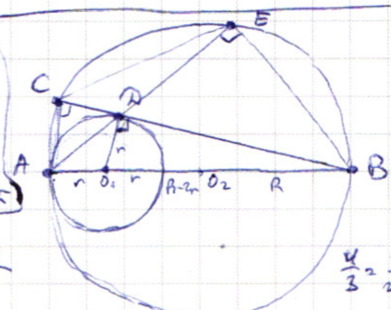
$x = \frac{7\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ или $5\sqrt{2}$

$\approx 2{,}8$ $\quad \approx 7$

не подходит

$S_{CED} = \frac{1}{2} bc \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1{,}2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}2$

пусть $2r < R$



$CD = 1 \quad BD = 3$

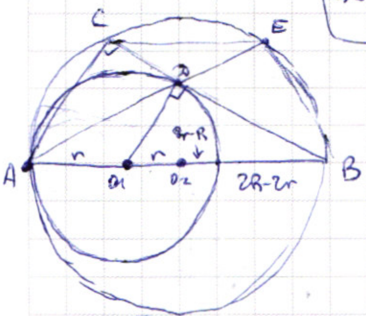
$\angle ACB = 90^\circ$ от на диам AB $\to AC \parallel DO_1$

$\to \triangle ABC \sim \triangle O_1BD \to \frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BO_1}$

$\frac{4}{3} = \frac{2R}{2R - r}$

$4R = 3R - 3r$

$R = 3r$



$\frac{4}{3} = \frac{2R}{2R - r}$

$8R - 4r = 6R$

$2R = 4r$

$R = 2r$

$\frac{4}{3} = \frac{2R}{2R - r}$

$r^2 + 9 = (2R - 2r)^2 = 4 \cdot 9r^2$

$r^2 + 9 = 36r^2$

$9 = 35r^2 \to r = \frac{3\sqrt{35}}{35}$ $\quad R = \frac{12\sqrt{35}}{35}$

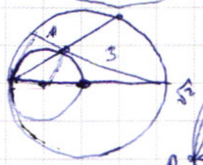
$3R = 4R - 4r$

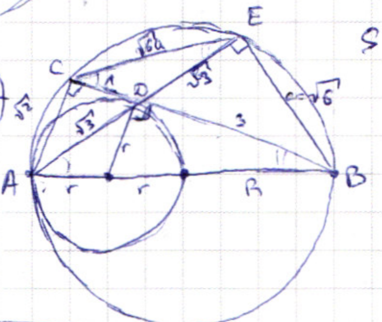
$R = 4r$

$6R = 8R - 4r$

$2R = 4r$

$R = 2r$





$S_{ACEB} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

$r^2 + 9 = (R + r)^2 = 9r^2$

$9 = 8r^2 \to r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{4}}$

$\boxed{R = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$

$AC = \sqrt{4R^2 - 16} =$

$= \sqrt{18 - 16} = \sqrt{2}$

$\frac{3}{4} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{2}}$ V

$AD = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$

$\triangle ADB \sim \triangle CDE$

$\frac{CD}{AD} = \frac{ED}{BD} = \frac{CE}{AB}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{3} = \frac{a}{3\sqrt{2}}$

$b = \sqrt{3} \quad a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$y = 2x^2 - x - 1$

$x_0 = \frac{1}{4}$

x	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	-1	1,5	2
y	$-1\frac{1}{8}$	-1	-1	2	2	5

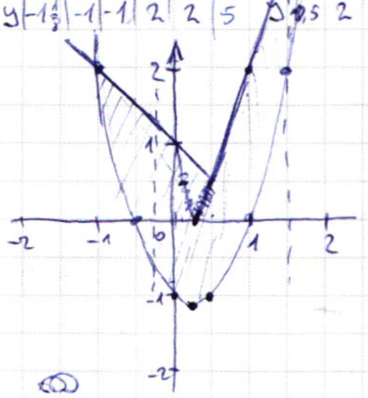
$y = x + |2x - 1|$

$x \ge 0{,}5 \quad x < 0{,}5$

$y = 3x - 1 \quad y = 1 - x$

x	0,5	1	2
y	0,5	2	5

x	0,5	0	-1
y	0,5	1	2



$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$

$AC \cdot BE + CE \cdot AB = AE^2 + BE^2$

$c\sqrt{2} + a \cdot 3\sqrt{2} = (b + \sqrt{3})^2 + 16$

$BE = \sqrt{\frac{}{9-3}} = \sqrt{6}$

$\triangle CEB$ равноб. $\to h = \sqrt{6 - 4} = \sqrt{2}$

$S_{ACB} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ $\quad S_{CEB} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot 4 = 2\sqrt{2}$

$S_{BACE} = \boxed{4\sqrt{2}}$

$F(4) = F(2) + F(2) =$

$= F(1) + F(4) =$

$= F(1) + F(2) + F(2)$

$1{,}75a = 2\frac{5}{8}$

$\frac{7}{4}a = \frac{21}{8}$

$a = \frac{21 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{3}{2}$

$0{,}25a = 2{,}5$

$a = 2$

$0{,}75a = \frac{9}{8}$

$\frac{3a}{4} = \frac{9}{8}$

$a = \frac{39 \cdot 4}{8 \cdot 3} = 1{,}5$

$0{,}25a = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$

$a = \frac{36}{8} = 4{,}5$

$0{,}5 - 3{,}25$

$F(ab) = F(a) + F(b)$

$F(p) = [\frac{p}{2}]$, от p - нег. $\quad F(p) = \frac{p-1}{2}$

$F(\frac{x}{y}) < 0 \quad F(x \cdot \frac{1}{y}) = F(x) + F(\frac{1}{y}) < 0$

≥ 0

$F(18) = F(2) + F(9) = F(2) + F(3) + F(3)$

~~$F(18) = F(3) + F(6) = F(3) + F(2)$~~

$F(\frac{x}{y}) = F(x) + F(\frac{1}{y}) =$

Если $x \vdots y$, то $F(\frac{x}{y})$ — цело и $F \ge 0$ $\quad x \not\vdots y$

$F(2) = 1 \quad F(1) = 0$

$F(3) = 1 \quad F(21) = F(3) + F(7)$

$F(5) = 2 \quad = 1 + 3 = 4$

$F(7) = 3 \quad F(20) = F(4) + F(5) =$

$F(19) = 9 \quad = 2 + 2 = 4$

$F(18) = F(2) + F(9) =$

$= 1 + 1 + 1 = 3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА