МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[2 балла]** Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. **[4 балла]** Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть множитель геом. прогрессии q. Тогда $a = a \cdot q^0$, $b = a \cdot q^1$, $c = a \cdot q^2$, $d = a \cdot q^3$, где d - четвертый член прогрессии.

Уравнение $ax^2 - 2bx + c = 0$ тогда примет вид:

$ax^2 - ~~b~~ 2aqx + aq^2 = 0$

1) $a \neq 0$, сократим на a

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

$(x-q)^2 = 0 \Rightarrow x = d = q$

Тогда $q = a \cdot q^3$ (по опр. геом. прогрессии $q \neq 0$)

$1 = a \cdot q^2$

Однако вспомним, что $a \cdot q^2 = c$

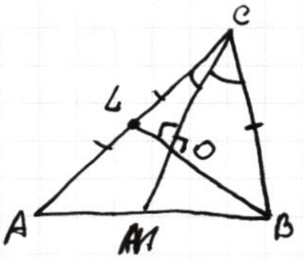
Отсюда $c = 1$

Ответ: 1.

2) $a = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow c = 0$

Уравнение вырождено, а последовательность перестаёт быть прогрессией $\Rightarrow$ не подходит

№2.



1) По усл. $AL = LC$, $LB \perp CM$, $\angle LCM = \angle BCM$
отсюда CM – и биссектриса, и высота $\triangle LCB \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle LCB$ равнобедренный $\Rightarrow LC = CB$

2) Получили условие на то, чтобы одна сторона была в 2 р. больше другой. Пусть $CB = x$, $AB = y$, $AC = 2x$.

3) ~~Неравенства треугольника~~: По условию также $900 = 3x + y \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 900 - 3x$.

Неравенства треугольника:

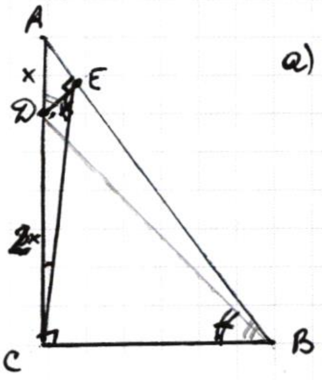
$$\begin{cases} 2x + x > 900 - 3x \Rightarrow x > 150 \\ 2x - x < 900 - 3x \Rightarrow x < 225 \end{cases}$$

~~$2x + 900 - 3x > x$~~ $\Rightarrow$ Отсюда $x \in (150; 225)$. Другие стороны задаются однозначно $\Rightarrow$ на каждый x один случай (с точностью до поворота).

Между 150 и 225 (не включительно) 74 числа.

Ответ: 74 треугольника.

№4.



а) 1) В 4х угольнике $DEBC$ противолежащие углы в сумме $180° \Rightarrow$ он вписанный $\Rightarrow$ ~~$\angle DBE = \angle EBD$, 30°~~
$\angle CED = \angle CBD = 30°$

~~2) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по прямому углу и общему $\angle A \Rightarrow$~~
~~$\Rightarrow tg \angle BAC = \frac{DE}{AE}$~~
~~3) Из подобия в п. 2: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$~~

2) $CB = DC \cdot \frac{1}{tg 30°} = \sqrt{3} DC =$ ~~$2\sqrt{3}x$~~ $2\sqrt{3}x$

3) $tg \angle BAC = \frac{CB}{AC} =$ ~~$\frac{2\sqrt{3}}{3}$~~ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) 1) $\sin \angle EDC = \sin \angle EDA = \cos \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \angle BAC}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

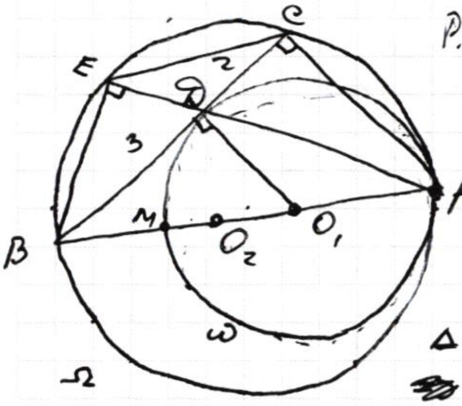
2) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по прямым углам и общему $\angle BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow DE = AD \cdot \frac{CB}{AB} = x \cdot \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2} = \frac{2}{3}$

3) $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DC \cdot \sin \angle EDC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $tg \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.



P.S. B, A, O_1 и O_2 на одной прямой в силу симметрии.

P.S.S. В задаче не используется факт, что центр Ω находится внутри ω, на чертеже O_2 стоит для наглядности. Она может быть и вне ω.

1) $BC \perp AC$, т.к. $\angle BCA$ опирается на диаметр Ω. $DO_1 \perp BC$, т.к. BC - касательная, DO_1 - радиус.

$\triangle DBO_1 \sim \triangle CBA$ по прямым углам и общему $\angle CBA$.

2) Пусть радиус ω r, а радиус Ω R. Тогда по п. 1:

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

3) По св-ву касательной и хорды с точкой пересечения в т. B:

$BM \cdot BA = BD^2 \Rightarrow (2R-2r)\cdot 2R = 9$, подставим r:

$4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{4}{5} = 9 \Rightarrow$ ~~$R = 2{,}5$; $r = 2$~~. $R = \frac{\sqrt{45}}{2}$; $r = \frac{2\sqrt{45}}{5}$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

4) $S_{BACE} = S_{\triangle BDA} + S_{\triangle ADC} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle EDB} = \frac{1}{2}(BD \cdot DA \sin\angle BDA +$
$+ AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC + CD \cdot DE \cdot \sin CDE + ED \cdot BD \cdot \sin\angle EDB) =$
$= \frac{1}{2}\sin\angle CDA (ED + DA)(BD + CD)$

5) $\sin\angle CDA = \frac{CA}{DA}$; по п. 1 $CA = \frac{5}{3}DO_1 = \frac{5}{3}r = 2\sqrt{5}$; DA по т. Пифагора:
$DA = \sqrt{DC^2 + CA^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \Rightarrow \sin\angle CDA = \sqrt{\frac{5}{6}}$

6) В окружности хорды BC и AE пересекаются в т. D ⇒
$ED \cdot DA = BD \cdot CD \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot CD}{DA} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

7) $S_{BACE} = \frac{1}{2}\sin\angle CDA (ED + DA)(BD + CD) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}\left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 2\sqrt{6}\right)(3+2) =$
$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6-6y+6=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

Пусть $(x-6)=a$; $(y-1)=b$. Тогда:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow a=\pm\sqrt{18-2b^2}\text{, подставим:}$$

~~±~~ $\sqrt{18-2b^2}-6b=$ ~~$\sqrt{ab}$~~ $\sqrt{b\sqrt{18-2b^2}}$. Возводя в квадрат, мы приобретаем новые решения $\Rightarrow$ необходима подстановка.

1) $34b^2+18=13b\sqrt{18-2b^2}$

$1494b^4-1818b^2+324=0$

$$\left[\begin{array}{l} b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \\ b^2=\frac{18}{83} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}} \end{array}\right.$$

2) $34b^2+18=-11b\sqrt{18-2b^2}$

$1398b^4-954b^2+324=0$

$D=954^2-4\cdot 324\cdot 1398<0$

$\ominus$

$y=0 \Rightarrow$ $x=2$ $\oplus$ или $x=10$ $\ominus$ (не подходит, т.к. под корнем -4).

$y=-2 \Rightarrow x=-21$ $\ominus$ или $x=-6$ $\ominus$ оба не явл. реш. второго ур-ния

$y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \Rightarrow x=\pm\frac{9}{\sqrt{83}}+6$, оба корня не явл. реш. второго ур-ния

$y=-\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \Rightarrow x=\pm\frac{9}{\sqrt{83}}+6$ оба не явл. корнями второго ур-ния

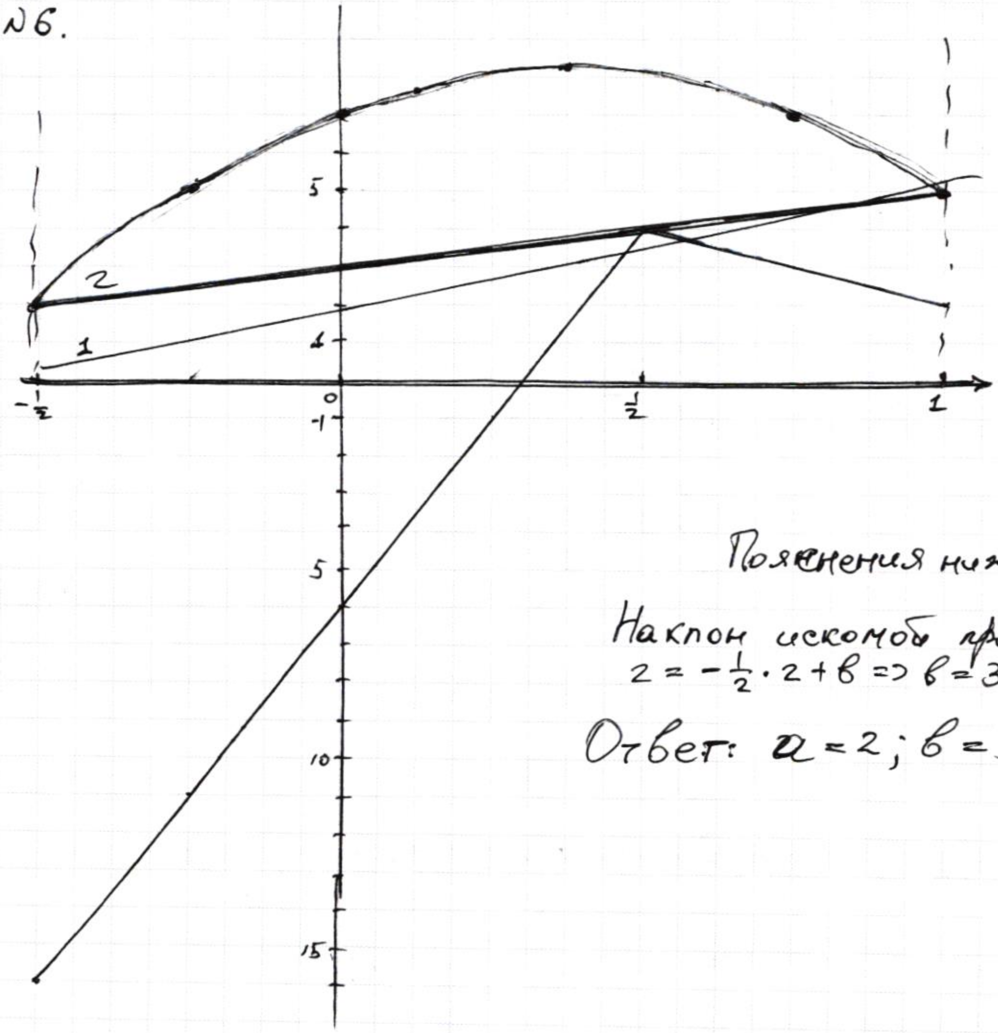
Решения: $(2;0)$, ~~$(10;0)$~~.

~~2) $34b^2+18=-11b\sqrt{18-2b^2}$~~

Ответ: $(2;0)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



Пояснения ниже.

Наклон искомой прямой $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{1,5} = 2$

$2 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$

Ответ: $a = 2$; $b = 3$

Начертим график $y = 8x - 6|2x - 1|$ и эскиз $y = -8x^2 + 6x + 7$ по опорным точкам (жирные). Тогда прямая обязана лежать в области между этими двумя графиками.

Крайние положения: прямая обязана „начинаться" из точки с $y \geq 2$, иначе она пересекает параболу или ломаную (пр. 1)

В то же время, она ~~вон~~ не может пересечь параболу в начале $\Rightarrow y \leq 2$. Отсюда вывод: прямая „выходит" из т. $(-\frac{1}{2}; 2)$.

Она не может пересечь ломаную, а точки $(-\frac{1}{2}; 2)$, $(\frac{1}{2}; 4)$ (изгиб модуля), $(1; 5)$ (граница параболы) лежат на одной прямой (пр. 2). Такая прямая единственна и будет искомой.

№7.

Для составного числа $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$: $\delta(x) = \alpha_1 \delta(p_1) + \alpha_2 \delta(p_2) + \ldots + \alpha_n \delta(p_n) =$
$= \alpha_1 \cdot [p_1/2] + \alpha_2 \cdot [p_2/2] + \ldots + \alpha_n [p_n/2]$

Деление на число в функции равнозначно вычитанию всех степеней простых делителей:

$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = (\alpha_1 - \beta_1)[p_1/2] + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)[p_n/2]$, где:
$x = \sum_{i=0}^{n} p_i^{\alpha_i}$, $y = \sum_{i=0}^{m} p_i^{\alpha_i}$

		к-во сп.
Тогда для $x=2$ найдётся	$y \in [4; 22]$, где вып. усл.	19
$x=3$	$y \in [4; 22]$	19
$x=4$	$y \in [7; 22]$	16
$x=5$	$y \in [7; 22]$	16
$x=6$	$y \in [7; 22]$	16
$x=7$	$y \in [11; 22]$	12
$x=8$	$y \in [11; 22]$	12
⋮		⋮
$x=10$	$y \in [11; 22]$	12
$x=11$	$y \in [13; 22]$	
⋮		
$x=13$	$y \in [17; 22]$	
⋮		
$x=17$	$y \in [19; 22]$	
$x=18$		
$x=19$	$y \in \varnothing$	

Ответ: $19 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 12 \cdot 4 +$ ~~10 12 + 13 · 4 +~~ $10 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 2$
38 48 48 20 24 8
86 134 194 178 186

Ответ: 186 способов

Пояснение: от каждого простого x до следующего простого y мн-во чисел y остаётся прежним, иначе сужается до следующего простого y.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ $EB = \sqrt{3}DE$

~~$AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{AD \cdot AC}{A}$~~

$\frac{AD}{AE+EB} = \frac{AE}{AC}$ $AE^2 + AE \cdot \sqrt{3}DE - AD \cdot AC = 0$

$tg = \frac{CB}{AC}$

$\frac{x}{AB} = \frac{DE}{\sqrt{AB^2-(4x)^2}}$

$x^2(AB^2 - 16x^2) = AB^2 \cdot DE$

$\frac{\sqrt{3}\,DC}{AC} = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}$

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4 \cdot 3}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{3}}}$

$\sqrt{1-\frac{3}{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x^2-12x+36 = -2y^2+4y+16$

$(x-6)^2 = -2(y-1)^2+18$

~~возр. всегда~~ возр. НQ

6 1

1) $\frac{x}{6} \geq y$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$

$$\begin{cases} x^2+x-13xy+6y+36y^2-6=0 \\ x^2-12x-4y+2y^2+20=0 \end{cases}$$

$0 + 13x - 13xy + 10y + 36y^2 - 26 = 0$

$\boxed{(2;0)\ +}$

$\begin{array}{r} 2178 \\ -1224 \\ \hline 954 \end{array}$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \Rightarrow a = \pm\sqrt{18-2b^2} \end{cases}$$

$\sqrt{18-2b^2} - 6b = \sqrt{\sqrt{18-2b^2} \cdot b}$

$18-2b^2-12b\sqrt{18-2b^2}+36b^2 = b\sqrt{18-2b^2}$

$18+4b^2$

$= 13b\sqrt{18-2b^2}$

$x+12 = \sqrt{-2x+12-x+6}$

$x+12 = \sqrt{18-3x}$

$x^2+24x+144 = 18-3x$

$x^2+27x+126=0$

$x = \frac{-27\pm\sqrt{729-504}}{2} = \frac{-27\pm15}{2} = \left[\begin{array}{l} -21 \\ -6 \end{array}\right.$

$\left[\sqrt{\frac{3}{7}}\right.$

~~$\frac{18}{\sqrt{83}}$~~ $a = \pm\sqrt{\frac{81}{83}} = \pm\frac{9}{\sqrt{83}}$

$x = \pm\frac{8}{\sqrt{83}} - 6$

$324 + 144b^2 + 16b^4 = 169 \cdot 18b^2 - 169 \cdot 2b^4$

$177 \cdot 2b^4 - 161 \cdot 18b^2 + 324 = 0$

$\left(\frac{18}{\sqrt{83}}\right)^2$

$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 11 \\ \hline 169 \\ 169 \\ \hline 1859 \end{array}$

$\begin{array}{r} 161 \\ \times\ 18 \\ \hline 1288 \\ 161 \\ \hline 2898 \end{array}$

$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 18 \\ \hline 968 \\ 121 \\ \hline 2178 \end{array}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$

$1156b^4 + 1224b^2 + 324 = \cancel{1859}\ 2178b^2 - 242b^4$

$1398b^4 - 954b^2 + 324 = 0$

$D = 954^2 - 4 \cdot 1398 \cdot 324 < 0$

☑ черновик ☐ чистовик

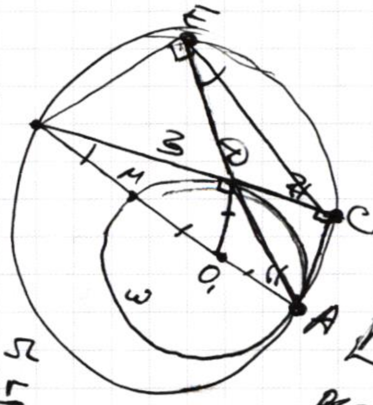
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3.

~~$x-6y$~~



$\boxed{AD}$

~~AO_1~~

$BM \cdot BA = 9$

~~BA~~

$\boxed{BA \cdot (BA - 2r) = 9}$

~~BO_1~~ ~~BO_1~~

~~$(BA-r)^2 - r^2 = 9$~~

~~2~~ $\frac{3}{5} = \frac{BA-r}{BA}$

$3BA$

~~3~~ $6R = 10R - 5r$

$5r = 4R$

$r = \frac{4}{5}R$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 = 18 - 2(y-1)^2$

~~$x^2 + 2y + y^2$~~

$x - 6 \neq -6y + 6$ $x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 = 20$

$(x-6) - 6(y-1)$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$AC = \frac{r}{3} \cdot 5 = \frac{2}{3}\sqrt{45} = 2\sqrt{5}$

$AD = \sqrt{4 + 20} = 2\sqrt{6}$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{4}{5} = 9$

~~$\frac{9}{25} \cdot 4R^2 = 9$~~

~~$4R^2 = 25$~~ ~~$4 \cdot 2{,}5 \cdot 2{,}5 = 5 \cdot 5$~~

~~$2R = 5$~~

~~$R = 2{,}5$~~

$\frac{4R^2}{5} = 9 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{45}{2}}$ $\Rightarrow r = \sqrt{\frac{16 \cdot 45}{25 \cdot 2}} = \sqrt{\frac{72}{5}}$

$\boxed{\frac{1}{2} ED \cdot DC \sin EDC + \frac{1}{2} AD \cdot BD \cdot \sin EDC + \frac{1}{2} DC \cdot DA \cdot \sin EDC + \frac{1}{2} \cdot ED \cdot BD \cdot \sin EDC}$

~~$a - 6b = \sqrt{ab}$~~

~~$a^2 + 2b^2 = 18$~~

$a^2 - 6b^2 = ab$

$a^2 + 2b^2 = 18$

$b = 0 \Rightarrow y = 1$, $x = 6$ ①

$b \neq 0$

sin $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b}$

$\left(\frac{a}{b} - 3\right)\left(\frac{a}{b} + 2\right) = 0$

$\frac{a}{b} = 3$

$\frac{a}{b} = -2$

$(\sqrt{90} - 4\sqrt{\frac{18}{5}})\sqrt{90}$

$90 - 4 \cdot 18$

$4R^2 = 45 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{45}}{2}$

$r = \frac{2\sqrt{45}}{5}$

$(ED + DA)(BD + CD) = $ ~~$BD \cdot ED + DA \cdot BD + CD \cdot ED + DA \cdot CD$~~

$\frac{5}{2} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \sqrt{6} \left(\frac{1}{2} + 2\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \sqrt{5}$

x y

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6-6y+6=\sqrt{y(x-6)-1(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\, 34 \\ \hline 136 \\ +\,102 \\ \hline 1156 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times\, 18 \\ \hline 1352 \\ 169 \end{array} \qquad .3042$$

$$\begin{array}{r} 1156 \\ +\, 338 \\ \hline 1494 \end{array} \quad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{r} 3042 \\ -\,1224 \\ \hline 1818 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\, 36 \\ \hline 204 \\ 102 \\ \hline 1224 \end{array}$$

$\cancel{a\, b}$

$a \mp \sqrt{18-2b^2}$

$\pm$

$$\begin{array}{r|l} 1494 & 18 \\ -144 & 83 \\ \hline 54 & \end{array}$$

а) Пусть $\sqrt{x-6}=a$; $\sqrt{y-1}=b$ (проверка на ОДЗ позже)

$$\begin{cases} a^2-6b^2=\cancel{\sqrt{ab}}\ ab \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$$

$\cancel{4}\ 12b-\frac{71b^2}{2}\pm\frac{b}{2}\sqrt{48b-143b^2}=$

1) $b=0 \Rightarrow a=0$
$y=1 \Rightarrow x=6$
Не выполнено второе выражение $\Rightarrow b\neq 0$.

2) $b\neq 0 \Rightarrow$ можно поделить 1-ое ур-ние

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-6=0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}+2\right)=0 \\ a^4+2b^4=18 \end{cases}$$

Заметим, что $a\geqslant 0$, $b>0 \Rightarrow \frac{a}{b}\geqslant 0 \Rightarrow \frac{a}{b}=3$

Подставим во второе:

$$\begin{cases} a=3b \\ a^4+2b^4=18 \Rightarrow 83b^4=18 \Rightarrow b^2=\sqrt{\frac{18}{83}}=y-1 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \\ x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \end{cases}$$

Оба корня на ОДЗ.

$\frac{324}{1494}=\frac{18}{83}$ $\cancel{78}$

$1\sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt{(18-2b^2)}\,b$

$18-2b^2-12b\sqrt{18-2b^2}+36b^2=b\sqrt{18-2b^2}$

$34b^2+18=13b\sqrt{18-2b^2}$

$1156b^4+1224b^2+324=\cancel{169}\ 3042b^2-$
$-338b^4$

$1494b^4-1818b^2+324=0$

$b=1$ ⊕

б) Если $\sqrt{(x-6)(y-1)}\geqslant 0$, а $\cancel{\sqrt{x-6}\leqslant 0}$ $\cancel{\sqrt{y-1}\leqslant 0}$ $\begin{cases} x-6\leqslant 0 \\ y-1\leqslant 0 \end{cases}$, то так разбивать нельзя.

~~Функция при увеличении~~

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2-12b+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$a^2-ab-12b+36b^2=0$

$$a=\frac{b\pm\sqrt{b^2+48b-144b^2}}{2}$$

$$\frac{b^2\pm 2b\sqrt{\cancel{b^2}\,48b-143b^2}+b^2+48b-14\cancel{4}b^2}{4}+2b^2=18$$

№6.

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{6-4x}\ 20x-6$

$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 6-4x$

$\frac{6}{16} = \frac{3}{8} - x^6$

$x_B = \frac{3}{8}$

Для составного числа

$x = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$

$\delta(x) = \cancel{8}\,\alpha_1\delta(p_1) + \alpha_2\delta(p_2)$

$-8\cdot\frac{9}{8^{\cancel{2}}} + 6\cdot\frac{3}{8} + 7$

$-\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7$

$\frac{9}{8} + 7$

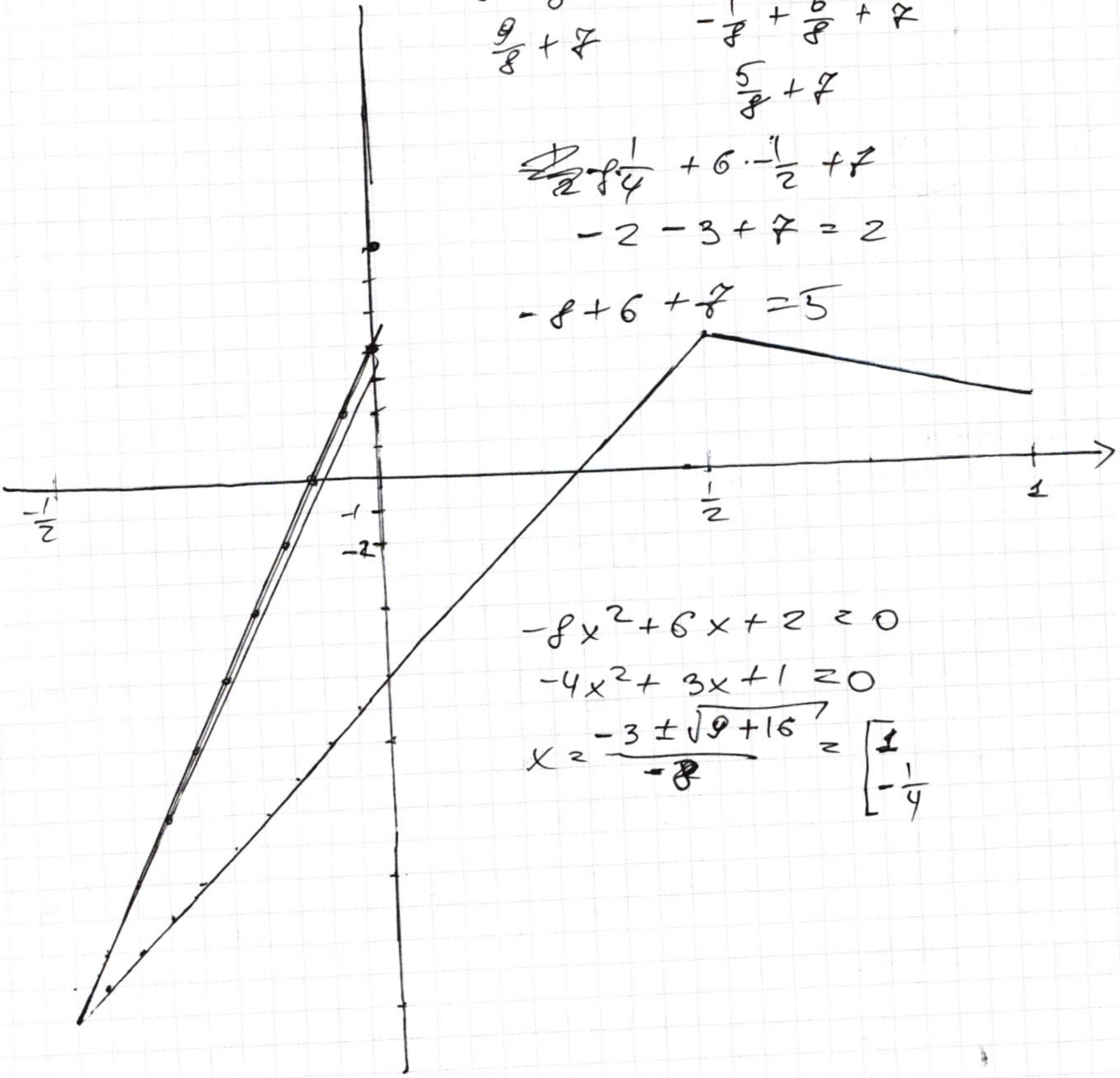
$-\frac{1}{8} + \frac{6}{8} + 7$

$\frac{5}{8} + 7$

$\cancel{-\frac{1}{2}}\,8\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot -\frac{1}{2} + 7$

$-2 - 3 + 7 = 2$

$-8 + 6 + 7 = 5$



$-8x^2 + 6x + 2 = 0$

$-4x^2 + 3x + 1 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{-8} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{array}\right.$