МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

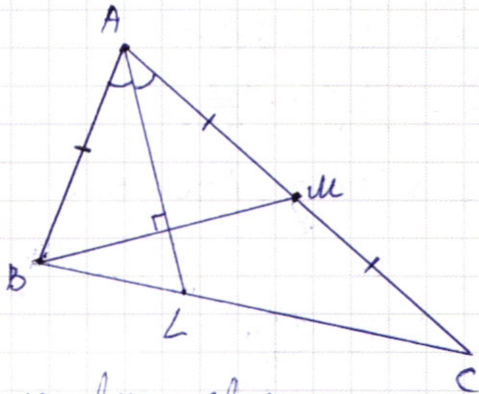
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Пусть q – знаменатель геом. прогрессии, а d – её четвёртый член. Тогда:
$b=aq$, $c=aq^2$, $d=aq^3$. По условию, d – корень многочлена $ax^2-2bx+c$. Значит:
$a\cdot(aq^3)^2-2\cdot aq\cdot aq^3+aq^2=0 \Leftrightarrow a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0 \Leftrightarrow aq^2(a^2q^4-2aq^2+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow aq^2\cdot(aq^2-1)^2=0 \Leftrightarrow c\cdot(c-1)^2=0$. Так как $c=aq^2$ – как раз третий член прогрессии, который надо найти, то, решая ур-е $c(c-1)^2=0$, получаем: $c\in\{0;1\}$. Причём случай $c=0$ достигается при $a=0$ или $q=0$.

Ответ: $c=0$ или $c=1$

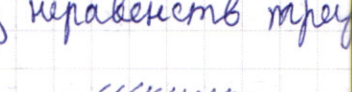
Задача 2



Пусть в $\triangle ABC$: AL – биссектриса, BM – медиана, причём $AL\perp BM$. Тогда прямая AL в $\triangle BAM$ – биссектриса и высота, а значит $\triangle BAM$ – равнобедренный и $BA=AM$. Получили, что $AB=\frac{AC}{2}$. Значит, необходимым и достаточным условием является то, что одна из сторон треугольника вдвое больше другой (можно провести обратное рассуждение и получить перпендикулярность)

Пусть $AB=x$, $AC=2x$, $BC=a$. Тогда из неравенств треугольника:

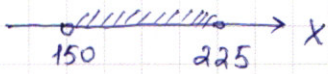
$\begin{cases} AB+AC>BC \\ AB+BC>AC \end{cases}$ $\begin{cases} x+2x>a \\ x+a>2x \end{cases}$ $\begin{cases} a<3x \\ a>x \end{cases}$



(неравенство $AC+BC>AB$ не использовалось, т.к. $AC>AB$ и это ничего не даёт)

По условию $3x+a=900$. Так как $a<3x$, то $900<6x$, а так как $a>x$, то $4x<900$. Запишем это в систему:

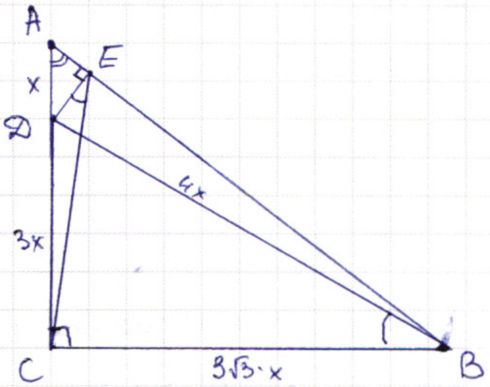
$$\begin{cases} 6x > 900 \\ 4x < 900 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \end{cases}$$



Так как при определении X мы отталкивались от связи X и a, то для любого X из интервала (150; 225) неравенства треугольника $\triangle ABC$ будут соблюдаться. (неравенство $AC+BC>AB$ выполняется всегда, так как $AC=2x>x=AB$, т.е. не зависит от x и a). Тогда искомое количество треугольников $N = 224-151+1 = 74$.

Ответ: 74

Задача 4.



а) $\angle DCB + \angle DEB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow CDEB$ – вписанный четыр-ник. Тогда $\angle CBD = \angle CED = 30^\circ$ (как вписанные). Пусть $AD = x$. Тогда $CD = 3x$.
Тогда $BD = \frac{CD}{\sin\angle CBD} = \frac{3x}{1/2} = 6x$; по т-ме Пифагора:
$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{36x^2 - 9x^2} = 3\sqrt{3}\cdot x$.
Тогда $tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{3}\cdot \cancel{x}}{4\cdot \cancel{x}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

б) По т-ме Пифагора: $AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{16x^2+27x^2} = \sqrt{43}\cdot x$. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ по 2 углам ($\angle A$ – общий, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$). Тогда:

$$\begin{cases} AE : AD = AC : AB \\ DE : AD = BC : AB \end{cases} \quad \begin{cases} AE = \frac{AC\cdot AD}{AB} \\ DE = \frac{BC\cdot AD}{AB} \end{cases} \quad \begin{cases} AE = \frac{4x\cdot x}{\sqrt{43}\cdot x} \\ DE = \frac{3\sqrt{3}\cdot x\cdot x}{\sqrt{43}\cdot x} \end{cases} \quad \begin{cases} AE = \frac{4x}{\sqrt{43}} \\ DE = \frac{3\sqrt{3}\cdot x}{\sqrt{43}} \end{cases}$$

По условию $AC = \sqrt{7}$. Так как $AC = 4x$, то $x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $AE = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$, $DE = \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\sqrt{43}}$.

$\cos\angle AEC = \cos(\angle AED + \angle CED) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$. По т-ме косинусов для $\triangle AEC$:

$AE^2 + CE^2 - 2\cdot AE\cdot CE\cdot\cos\angle AEC = AC^2 \Leftrightarrow \frac{7}{43} + CE^2 + \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}\cdot CE\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 7 \Leftrightarrow CE^2 + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}\cdot CE - \frac{294}{43} = 0$

$D = \frac{7}{43} + \frac{4\cdot 294}{43} = \frac{7}{43}(1+4\cdot 42) = \frac{7}{43}\cdot 169$; $CE = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} \pm 13\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}}{2}$; $\left[\begin{array}{l} CE = -7\sqrt{\frac{7}{43}} \\ CE = 6\sqrt{\frac{7}{43}} \end{array}\right.$

Т.к. $CE > 0$, то $CE = 6\sqrt{\frac{7}{43}}$; $S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot\sin\angle CED = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{4\cdot\sqrt{43}}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}\cdot\frac{1}{2} =$
$= \frac{3\cdot\sqrt{3}\cdot 7\cdot 3\cdot\cancel{2}}{8\cdot 43\cdot\cancel{2}} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$.

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{3\sqrt{3}}{4}$; б) $S_{CED} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

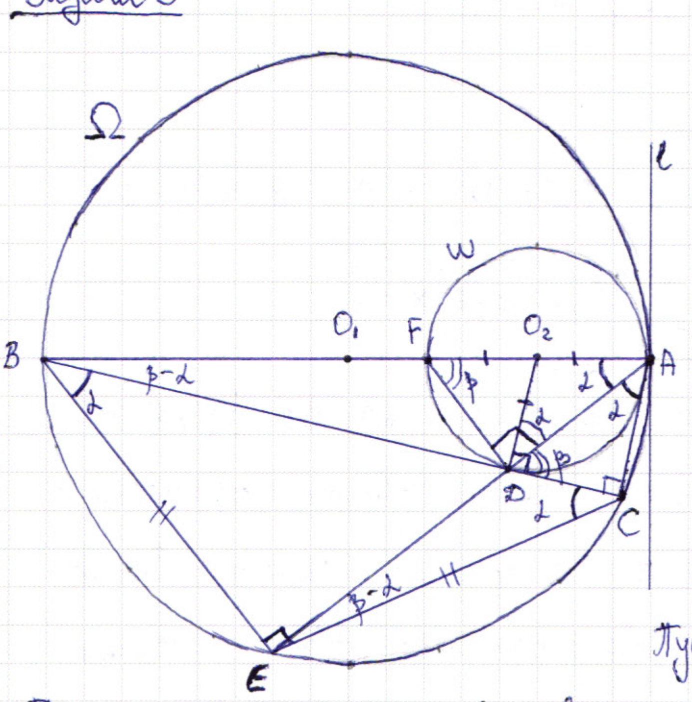
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



Пусть $R_\Omega = R$, $R_\omega = r$.

Пусть l – общая касательная к Ω и ω в точке A, O_1 – центр Ω, O_2 – центр ω.

Так как $O_1A \perp l$ и $O_2A \perp l$, то $A \in O_1O_2$, а значит $O_2 \in AB$. BC – касательная к ω, а значит $O_2 \perp \mathcal{D}$. Пусть $F = \omega \cap AB$ (F отлична от A).

Тогда AF – диаметр ω и $\angle ADF = 90°$. AB – диаметр Ω, а значит $\angle ACB = \angle AEB = 90°$.

Пусть $\angle DAF = \alpha$, $\angle DFA = \beta$ $(\alpha + \beta = 90°)$.

Тогда $\angle BAE = \angle BCE = \alpha$ (как вписанные), $\angle O_2DA = \angle O_2AD = \alpha$ (т.к. $O_2A = O_2D$), $\angle ADC = 90° - \angle O_2DA = 90° - \alpha = \beta$; $\angle CAD = 90° - \angle ADC = 90° - \beta = \alpha$. Тогда $\angle EBC = \angle EAC = \alpha$ (как вписанные). $\angle ABC = 90° - \angle CAB = 90° - 2\alpha = \beta - \alpha$.

$\angle AEC = \angle ABC$ (как вписанные). Т.к. $\angle EBC = \angle ECB = \alpha$, то $EB = EC$. Так как $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, то AD – биссектриса в $\triangle BAC$ и так как $BD : DC = 3 : 2$, $AB = 2R$, то $2R : AC = 3 : 2 \Leftrightarrow AC = \frac{2R \cdot 2}{3} = \frac{4R}{3}$. По т-ме Пифагора для $\triangle BAC$: $AC^2 + BC^2 = AB^2$; $\frac{16R^2}{9} + 25 = 4R^2 \Leftrightarrow \frac{20R^2}{9} = 25 \Leftrightarrow R^2 = \frac{5 \cdot 9}{4} \Leftrightarrow R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

По т-ме о квадрате касательной: $BD^2 = BF \cdot BA \Leftrightarrow 9 = (2R - 2r) \cdot 2R \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow R - r = \frac{9}{4R} \Leftrightarrow r = R - \frac{9}{4R} = \frac{3\sqrt{5}}{2} - \frac{\cancel{2} \cdot 9^3}{_2 4 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{15 - 3}{2\sqrt{5}} = \frac{\cancel{2} \cdot 6}{\cancel{2}\sqrt{5}} = \frac{6}{5} \cdot \sqrt{5}$.

$\triangle ACD \sim \triangle ADF$ по 2 углам ($\angle CAD = \angle DAF = \alpha$, $\angle CDA = \angle DFA = \beta$). Тогда $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AF} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow AD^2 = AC \cdot AF = \frac{4R}{3} \cdot 2r = \frac{4 \cdot \cancel{3}\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{3}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{6}{\cancel{\sqrt{5}}} = 4 \cdot 6 \Leftrightarrow AD = 2\sqrt{6}$. Тогда $\sin\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

В $\triangle BEA$: $\sin\alpha = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = AB \cdot \sin\alpha = 2R \cdot \sin\alpha = \cancel{2} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Из $\triangle ABC$: $\cos(\beta-\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{2R} = \frac{5\cdot 2}{2\cdot 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\sin\angle BEC = \sin\left(\frac{\pi}{2}+(\beta-\alpha)\right) = \cos(\beta-\alpha)$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{4R}{3}\cdot 5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\cdot 3\sqrt{5}}{3\cdot 2}\cdot 5 = 5\sqrt{5}$;

$S_{BEC} = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot EC\cdot\sin\angle BEC = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)^2\cdot\cos(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot 5}{2\cdot\cancel{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

$S_{BACE} = S_{ABC}+S_{BEC} = 5\sqrt{5}+\frac{5\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

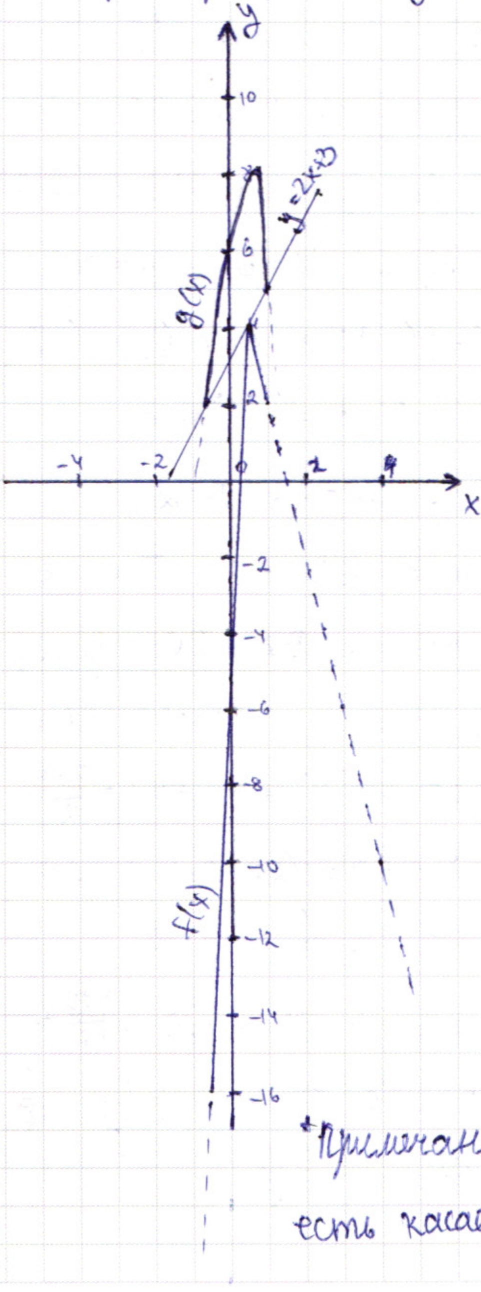
Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Задача 6

Решим задачу графически. Пусть $f(x) = 8x-6|2x-1|$, $g(x) = -8x^2+6x+7$.

Тогда $g(x) = -8\left(x-\frac{3}{8}\right)^2 + \frac{65}{8}$, а $f(x) = \begin{cases} 20x-6, & x<\frac{1}{2}; \\ -4x+6, & x>\frac{1}{2}. \end{cases}$

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.



Заметим, что $ax+b$ – прямая. Условие можно интерпретировать графически: прямая $ax+b$ должна лежать выше или касаться графика $f(x)$, а также касаться или лежать ниже графика $f(x)$. Рассмотрим прямую $y=2x+3$, проходящую через точки $\left(-\frac{1}{2};2\right)$ и $(1;5)$. Она касается графиков $f(x)$ и $g(x)$*. Заметим, что при сдвигании этой прямой вниз, она пересечёт $f(x)$ в 2х точках, а вверх – пересечёт $g(x)$. Значит, это единственная прямая, удовлетворяющая условию, и $a=2$, $b=3$.

Ответ: $a=2$, $b=3$.

*Примечание $y=2x+3$ проходит через точку $\left(\frac{1}{2};4\right)$, то есть касается $f(x)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $a, b, c \quad q$

$b = aq$

$c = aq^2 \quad d = aq^3$

$a\cdot x^2 - 2\cdot aq\cdot x + aq^2 = 0$

$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$

$a\cdot(x-q)^2 = 0$ $\boxed{q \neq 0,\ a \neq 0}$ проверим, что

$\begin{cases} x = q \\ x = aq^3 \end{cases}$ $0 = aq^3 - q$

$0 = q(aq^2 - 1)$

$\begin{cases} q = 0 \\ aq^2 = 1 \end{cases}$

Отв: 1

$\frac{1}{q^2}, \frac{1}{q}, 1, q$

$\frac{x^2}{q^2} - \frac{2x}{q} + 1 = 0$

$\left(\frac{x}{q} - 1\right)^2 = 0$

$\frac{x}{q} = 1$

$x = q$

3) $\sqrt{x-6y} = \sqrt{y(x-6) - (x-6)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2 - 12x + 36 + 2(y^2 - 2y + 1) = 18$

$(x-6)^2 + 2\cdot(y-1)^2 = 18$

$x - 6y = (x-6) - 6\cdot(y-1)$

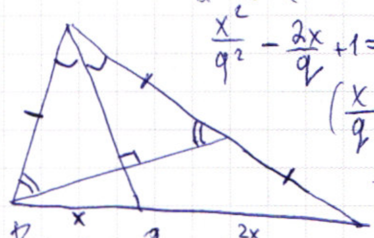
$x - 6 = a, \quad y - 1 = b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$ $a^2 + 36b^2 + 12ab = ab$

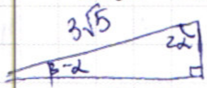
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (\beta - \alpha)\right) = -\sin(\beta-\alpha)^2 = -\frac{2}{3}$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt5}{3}$ $\sin^2(2\alpha) = \frac{5}{9}$

2)

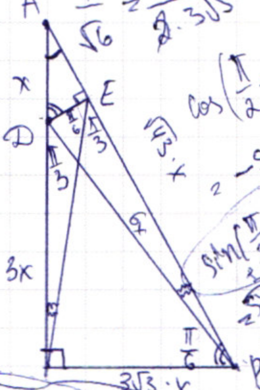


$S_{BAC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sqrt5\cdot\frac{2}{3} = 3\sqrt5$



$\sin(\beta-\alpha) = \frac{2}{3}$ $\cos(\beta-\alpha) = \frac{\sqrt5}{3}$

а)



$\frac{1}{\sqrt6} = \frac{x\sqrt2}{2\cdot 3\sqrt5}$ $x = \frac{3\sqrt5}{\sqrt6}$ $\frac{4.5}{4}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + (\beta-\alpha)\right) = \cos(\beta-\alpha)$

$\frac{AE}{4x} = \frac{x}{x\sqrt{43}}$

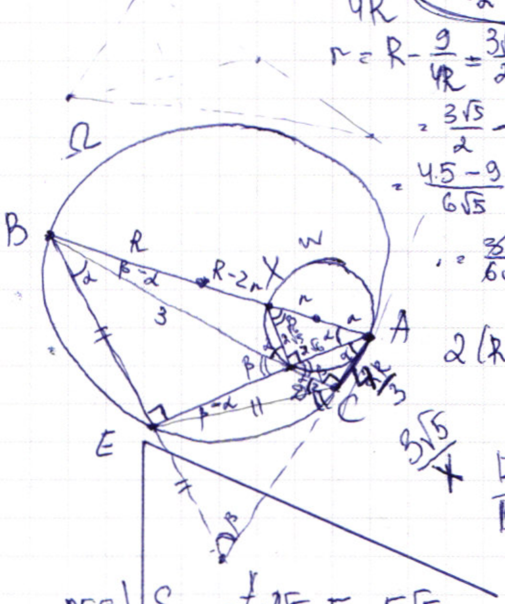
$\boxed{AE = \frac{4x}{\sqrt{43}}}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt6\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 3}$

$\frac{DE}{3\sqrt3\cdot x} = \frac{x}{x\sqrt{43}}$ $\boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt6}}$

$\boxed{DE = \frac{3\sqrt3\cdot x}{\sqrt{43}}}$

$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{3\sqrt3 x}{\sqrt{43}}\cdot\frac{\sqrt{43}}{4x} = \frac{3\sqrt3}{4}$



$R - r = \frac{9}{4R}$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + (\beta-\alpha)\right) = \cos(\beta-\alpha) = \frac{\sqrt5}{3}$

$r = R - \frac{9}{4R} = \frac{3\sqrt5}{2} - \frac{9\cdot 2}{4\cdot 3\sqrt5}$ $\frac{x}{AB} = \frac{AE}{4x}$

$= \frac{3\sqrt5}{2} - \frac{9}{2\cdot 3\sqrt5} =$ $AB\cdot AE = 4x^2$

$= \frac{45 - 9}{6\sqrt5} =$ $36 - 9 = 27$ $\frac{2x}{3\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt6}$

$= \frac{36}{6\sqrt5} = r = \frac{6}{5}\sqrt5$ $x = \frac{3\sqrt5}{2\sqrt6}$

$27 + 16 = 43$

$2(R - r)\cdot 2R = 9$ $\frac{2R}{x} = \frac{3}{2}$

$2R$ $\frac{17}{\times 5}{85}$ $x = \frac{4R}{3}$

$\frac{3\sqrt5}{4}$

$\frac{7}{16}$ $5\sqrt5$ $\frac{4R}{3}$

б) $AC = \sqrt7 \to x = \frac{\sqrt7}{4}$ $\frac{7\cdot 43 - 7}{43}$

$AE = \frac{4\cdot\sqrt7}{4\cdot\sqrt{43}} = \sqrt{\frac{7}{43}}$ $\frac{\sqrt{7\cdot 42}}{\sqrt{43}}$

$\frac{7}{43} + CE^2 + 2\cdot\sqrt{\frac{7}{43}}\cdot CE\cdot\frac{1}{2} = 7$

$CE^2 + CE - \frac{42\sqrt7}{\sqrt{43}} = 0$ $2r = \frac{12\sqrt5}{5}$

$D = 1 + \frac{4\cdot 42\cdot\sqrt7}{\sqrt{43}}$ $\frac{12}{\sqrt5}$

$DX = \frac{144}{5} - 24 = \frac{24}{5}$; $2\sqrt{\frac{6}{5}}$ $\frac{2}{3}R = \sqrt5$

$\boxed{R = \frac{3\sqrt5}{2}}$

$S = \frac{85\sqrt5}{16}$ $S_{BCA} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt5\cdot 5 = 5\sqrt5$

$S_{BEC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt5}{3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2} = \frac{5\sqrt5}{16}$

$BC = \sqrt{4R^2 - \frac{16R^2}{9}} = \sqrt{\frac{20R^2}{9}} = \frac{2}{3}R\cdot\sqrt5 = 5$

$\frac{4R}{3a} = \frac{a}{2r}$ $a^2 = \frac{8Rr}{3} = \frac{8\cdot 3\sqrt5}{2\cdot 3}\cdot\frac{6\sqrt5}{5} = 8\cdot 3 = 24$ $2\sqrt6$

$\boxed{r = \frac{6}{5}\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{25}{3} = \frac{5}{6}$

4

а) • $\angle DBC = \angle DEC$ (из вписанности CDEB)

• $\angle CDB = \frac{\pi}{2} - \angle DBC = 60°$

• $DB = 2 \cdot DC = 6x$; $BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = 3\sqrt{3} \cdot x$

• $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{16x^2 + 27x^2} = \sqrt{43} \cdot x$

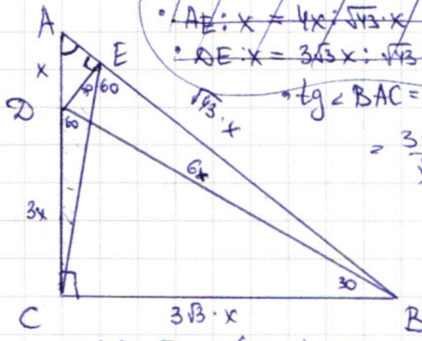
~~$\triangle AED \sim \triangle ACB$ по 2 углам~~

~~• $AE : x = 4x : \sqrt{43} \cdot x \Rightarrow AE = \frac{4x}{\sqrt{43}}$~~

~~• $DE : x = 3\sqrt{3}x : \sqrt{43} \cdot x \Rightarrow DE = \frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}}$~~

для DE и AE

• $tg \angle BAC = \frac{DE}{AE} \frac{BC}{AC} = \frac{3\sqrt{3}x}{\sqrt{43}} \cdot \frac{\sqrt{43}}{4x} = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$



б) $AE^2 + CE^2 - 2 \cdot AE \cdot CE \cdot \cos \angle AEC = AC^2$

$AC = \sqrt{7} = 4x \rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$AE = \frac{4x}{\sqrt{43}} = \frac{4 \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \sqrt{43}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$

$\frac{7}{43} + CE^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} \cdot CE \cdot \frac{1}{2} = 7$

$CE^2 + CE \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} - \frac{7^2 \cdot 2 \cdot 3}{43} = 0$

$D = \frac{7}{43} + \frac{4 \cdot 7^2 \cdot 2 \cdot 3}{43} = \frac{7(1 + 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3)}{43} = 13^2 \cdot \frac{7}{43}$; $\sqrt{D} = 13 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$

$CE = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}} + 13 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}}{2} = \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{43}}}{2} = \frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$

$DE = \frac{3\sqrt{3} \cdot x}{\sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{4\sqrt{43}}$

$\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$7 - \frac{7}{43} = \frac{7 \cdot 43 - 7}{43} = \frac{7(43-1)}{43} = \frac{7 \cdot 42}{43} = \frac{7^2 \cdot 2 \cdot 3}{43}$

$\times \frac{28}{6}$ 168   169

$\frac{\pi}{2}$

~~$S = \frac{1}{2} AE \cdot CE \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot$~~

$\times \frac{43}{8}$ 344

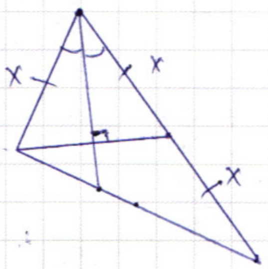
$S = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{4 \cdot \sqrt{43}} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{\sqrt{43}} =$

$= \frac{9 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{8 \cdot 43} = \frac{63 \cdot \sqrt{3}}{344}$

Ответ: а) $tg\,\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

б) $S = \frac{63\sqrt{3}}{344}$

2



$\frac{35}{3} = \frac{7}{6}$

$x; 2x; a$

$\begin{cases} 3x + a = 900 \\ 3x > a \\ x + a > 2x \\ 2x + a > x \end{cases}$ $3x > a$ $a > x$ $a > -x$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(c) = f(1) + f(c)$ $\Rightarrow f(1) = 0$

160; ~~480~~ 200 400

320; 300

420

$\emptyset - 60:$

$150 < x < 225$

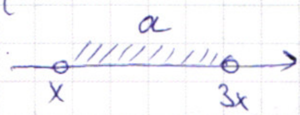
$300 < 2x < 450$

$450 < 3x < 675$

$-675 < -3x < -450$

$225 < \underbrace{900 - 3x}_{a} < 450$

$225 < a < 450$



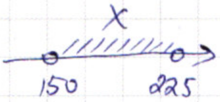
~~$a = 900 - 3x$~~

$4x < \underbrace{3x + a}_{P} < 6x$

$4x < 900 < 6x$

$x < 225 < \frac{3x}{2}$

$\begin{cases} x < 225 \\ 225 < \frac{3x}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x < 225 \\ x > 150 \end{cases}$



$\frac{n}{2} - 1$

$\frac{n}{4} + 1 \dots \frac{n}{2} - 1$ ~~$\frac{n}{4}$~~

$\frac{n}{6}$ $\frac{n}{2} - 1 - \frac{n}{4}$ $\frac{n}{12} - 1$

$\frac{n}{4} - \frac{n}{6} = \frac{2n}{24} = \frac{n}{12}$

$7 - \frac{7}{43} = \frac{7 \cdot 42}{43} = \frac{294}{43}$

294 | 7, 42, −28, 14

151 + 302 = 453, 447

151 ... 224

$N = 224 - 151 + 1 = 224 - 150 = 74$

$\times \frac{43}{8}$ 344

$\frac{7 + 4 \cdot 7 \cdot 42}{43}$

$-7\sqrt{\ }$

$6\sqrt{\ }$

294 × 4 = 1176 | 169

700 + 420 + 56 = 1176

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{3}$ $\begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2\cdot(y-1)^2 = 18 \end{cases}$ $(x-6)-6(y-1)$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{a\cdot b} \\ a^2+2b^2+18 \end{cases}$

$x-6y \geq 0$

$(x-6)(y-1) \geq 0$

$x \geq 6y$

$\left[\begin{cases} x\geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x<6 \\ y<1 \end{cases}\right.$

I $a\geq 0, b\geq 0$: $a=\sqrt{18-2b^2}$

$\sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt{b\sqrt{18-2b^2}}$ $\uparrow^2$

$18-2b^2+36b^2=12b\sqrt{18-2b^2}+b\sqrt{18-2b^2}$

$34b^2+18 = 13b\sqrt{18-2b^2}$ $\uparrow^2$

$1156b^4+324+1184b^2=3042b^2-338b^4$

$1494b^4-1858b^2+324=0$

$747b^4-929b^2+162=0$

$34\cdot 34 = 136 + 102 = 1156$, $+338 = 1494$

$34\cdot 18$: 272, 34, 592, $\cdot 2 = 1184$

$169\cdot 18 = 1352 + 169 = 3042$

$3042-1184=1858$

$169\cdot 2 = 338$

$y=2$
$x=10$

$8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$

$-8(x-\frac{3}{8})^2+\frac{81}{8}$

$x\geq\frac{1}{2}$: $8x-6(2x-1)=-4x+6$

$x<\frac{1}{2}$: $8x+6(2x-1)=20x-6$

$-\frac{6}{8\cdot 2}$ $-\frac{6}{16}=-\frac{3}{8}$

$\frac{3}{8}\cdot 3=\frac{9}{8}$

$\frac{9}{8}+\frac{7\cdot 8}{8}=\frac{9+56}{8}=\frac{65}{8}$ $\frac{9}{8}+7=\frac{81}{8}$

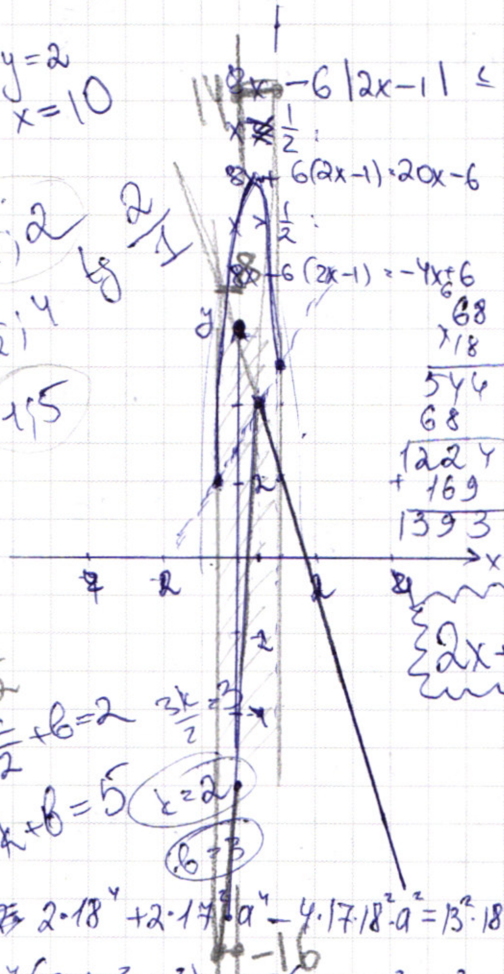
$x^2+36y^2-12xy = xy-6y-x+6$

$x^2-x+36y^2+6y-11xy-6=0$

$-\frac{1}{2};2$ $tg\ \frac{2}{1}$

$\frac{1}{2};4$

$1;5$



$68\cdot 18 = 544 + 68 = 1224$, $+169 = 1393$

$2x+3$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2+2b^2=18$

$b=\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}$

$18(4\cdot 17\cdot 18+13^2)$

$289\cdot 2 = 578 + 169 = 747$

$a-6\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}=\sqrt{a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}}$ $\uparrow^2$

$a^2+\cancel{36}^{18}\cdot\frac{18-a^2}{\cancel{2}}-12a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}=a\cdot\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}$

$-\frac{k}{2}$

$-\frac{k}{2}+b=2$ $\frac{3k}{2}=3$

$k+b=5$ $k=2$

$b=3$

$\cancel{324}^{18^2}-17a^2=13a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}$ $\uparrow^2$

$18^4+17^2\cdot a^4-2\cdot 17\cdot 18^2\cdot a^2=\frac{13^2\cdot 18\cdot a^2-13^2\cdot a^4}{2}$

$2\cdot 18^4+2\cdot 17^2a^4-4\cdot 17\cdot 18^2\cdot a^2=13^2\cdot 18\cdot a^2-13^2\cdot a^4$

$a^4(2\cdot 17^2+13^2)-a^2(4\cdot 17\cdot 18^2+13^2\cdot 18)+2\cdot 18^4=0$

$D=18^2(4\cdot 17\cdot 18+13^2)^2-4\cdot 2\cdot 18^4\cdot(2\cdot 17^2+13^2)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$18^2(16\cdot17^2\cdot18^2+13^4+2\cdot4\cdot17\cdot18\cdot13^2)-8\cdot18^4(2\cdot17^2+13^2)=$

$=18^2(\cancel{16\cdot17^2\cdot18^2}+13^4+2\cdot4\cdot17\cdot18\cdot13^2-\cancel{16\cdot17^2\cdot18^2}-8\cdot18^2\cdot13^2)=$

$=18^2\cdot13^2(13^2+2\cdot4\cdot7\cdot18-8\cdot18^2)=13^2\cdot18^2(13^2-8\cdot18(18-7))=13^2\cdot18^2\cdot(13^2-8\cdot11\cdot18)$

$88 \cdot 18 = 704 + 88 = 1584$; $1584+169=1753$; $1584-169=1415$

$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$ I $a=1$: $f(b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

II $a=b$: $f(a\cdot a)=f(a)+f(a) \Rightarrow f(a^2)=2\cdot f(a)$

$f(7)=3 \quad f(49)=6$

$\boxed{6}$ $8\cdot x-6\cdot|2\cdot x-1|\le a\cdot x+b\le -8\cdot x^2+6\cdot x+7$

$-4-12$; $-8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7$; $-12 \quad 10$

$x=0: -6\le b\le 7$ $\boxed{-5\le a\le 11}$ $\boxed{-6\le b\le 7}$

$x=1: 2\le a+b\le 5$ $\boxed{-6\le b\le 5}$ $-6\le b\le 3$

$x=-\frac{1}{2}: -16\le -\frac{a}{2}+b\le 2$ $\boxed{-10\le b\le 3}$ $2\le a\le 11$

$x=\frac{1}{2}: 4\le \frac{a}{2}+b\le 8$

$1 \quad 14$

$-32\le -a+2b\le 4$ $-3\le -b\le 6$

$-30\le 3b\le 9$

$1\le\frac{a}{2}\le 14$

$2\le a\le 28$

$y=\begin{cases}20x-6, & x<\frac{1}{2}\\ -4x+6, & x\ge\frac{1}{2}\end{cases}$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$ $\begin{cases}a-6\cdot b=\sqrt{ab}\\ a^2+2b^2=18\end{cases}$ $a=\sqrt{18-2b^2}$

$(x-6)^2+2\cdot(y-1)^2=18$ $18\ge(6(y-1))^2+2\cdot(y-1)^2=$

$\sqrt{18-2b^2}-6b=\sqrt{b\sqrt{18-2b^2}}$ $\uparrow^2$ $=38\cdot(y-1)^2$

$36b^2-2b^2+18-12b\sqrt{18-2b^2}=b\sqrt{18-2b^2}$ $(y-1)^2\le\frac{18}{38}=\frac{9}{17}$

$2\cdot17\cdot b^2+18=13\cdot b\cdot\sqrt{18-2b^2}$ $\uparrow^2$ $y=\frac{1}{2}$

$2^2\cdot17^2\cdot b^4+18^2+4\cdot17\cdot18\cdot b^2=13^2\cdot18\cdot b^2-13^2\cdot2\cdot b^4$

$b^4(2^2\cdot17^2+2\cdot13^2)+b^2(4\cdot17\cdot18-13^2\cdot18)+18^2=0$

$D=16\cdot17^2\cdot18^2+13^4\cdot18^2-4\cdot18^2(2^2\cdot17^2+2\cdot13^2)$; $\frac{D}{18^2}=\cancel{16\cdot17^2}+13^4-\cancel{16\cdot17^2}-8\cdot13^2=$

$=13^2(13^2-8)=13^2\cdot161\cdot18^2$ $x-6\cdot y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$b=\sqrt{\frac{13^2\cdot18-4\cdot17\cdot18\pm13\cdot18\cdot\sqrt{161}}{2\cdot(2^2\cdot17^2+2\cdot13^2)}}$ $x-3=\sqrt{(x-6)\cdot(-\frac{1}{2})}$

$\boxed{x=4, y=\frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

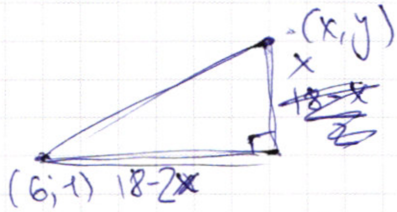
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2+2\cdot(y-1)^2=18 \Rightarrow (x-6)^2+(y\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2})^2=(3\sqrt{2})^2$



$18^2\cdot16-4\cdot3\cdot18^2=18^2\cdot4=18^2\cdot2^2$

$\frac{72\pm36}{6}=12\pm6$

$x^2+36y^2-12xy-xy+6y+x-6=0$

$x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0$

$324+4x^2-72x+\cancel{+}x^2=S^2$

$3x^2-72x+324=0$

$5x^2-72x+324=(x-6)^2+(y-1)^2$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \Rightarrow b=\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}=\sqrt{9-\frac{a^2}{2}}$

$a-6\cdot\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}=\sqrt{a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}}\quad \uparrow^2$

$a^2+36\cdot\frac{18-a^2}{2}-12a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}=a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}$

$18^2-17a^2=13a\sqrt{\frac{18-a^2}{2}}\quad\uparrow^2$

$17^2\cdot a^4+18^4-2\cdot17\cdot18^2\cdot a^2=\frac{13^2\cdot18\cdot a^2-13^2\cdot a^4}{2}$

$2\cdot17^2a^4+2\cdot18^4-4\cdot17\cdot18^2\cdot a^2-13^2\cdot18\cdot a^2+13^2\cdot a^4=0$

$a^4(2\cdot17^2+13^2)-a^2(4\cdot17\cdot18^2+13^2\cdot18)+2\cdot18^4=0$

$D=\cancel{16\cdot17^2\cdot18^4}+13^4\cdot18^2+8\cdot17\cdot13^2\cdot18^3-8\cdot18^4(\cancel{2\cdot17^2}+13^2)=$

$\frac{D}{18^2}=13^4+8\cdot17\cdot13^2\cdot18-8\cdot18^2\cdot13^2=$

$17\cdot8=136$, $136\cdot18$; $18\cdot8=84$; $80+64=144$

$\frac{D}{13^2\cdot18^2}=13^2+8\cdot17\cdot18-8\cdot18^2$

$13^2+8\cdot18(17-18)$

$13^2-8\cdot18$

$D=5^2\cdot13^2\cdot18^2$

$a^2=\sqrt{\frac{4\cdot17\cdot18^2+13^2\cdot18\pm5\cdot13\cdot18}{2(2\cdot17^2+13^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)