МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

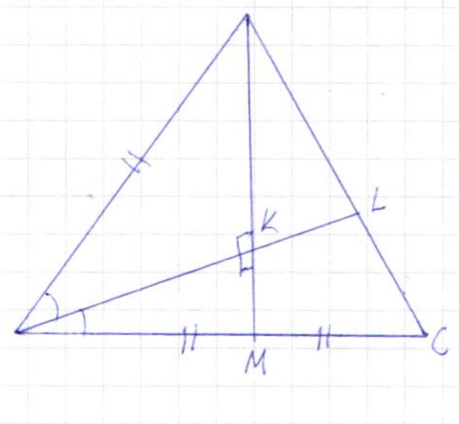
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Пусть $b=ay$, $c=ay^2$, $d=ay^3$ (d - 4-й член). Если $c=0$, то либо $a=0$, либо $y=0$ или $a=y=0$, в любом случае $d=ay^3=0$ и $b=ay=0$, т.е. $ax^2-2bx+c=ax^2=0$, т.к. d-корень и $d=0$, то $ad^2=0$ - условия выполняются.
Пусть $c\neq0 \Rightarrow a\neq0$ и $y\neq0$
Тогда т.к. d - корень ур-я, то
$ad^2-2bd+c=0 \Rightarrow a\cdot a^2\cdot y^6-2\cdot ay\cdot ay^3+ay^2=0 \Rightarrow a^3y^6-2a^2y^4+ay^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow ay^2(a^2y^4-2ay^2+1)=0 \Rightarrow ay^2((ay^2-1)^2)=0$, а т.к. $c=ay^2\neq0$, то
$c(c-1)^2=0 \Rightarrow (c-1)^2=0 \Rightarrow c=1$
Ответ: $c=0$ или $c=1$

2. Докажем, что биссектриса $\perp$ медиане тогда и только тогда, когда одна из прилежащих сторон к вершине, из которой проведена биссектриса, в 2 раза больше другой.



Пусть BL - биссектриса, AM - медиана и $BL\perp AM$. Тогда BK - биссектриса и высота в $\triangle ABM \Rightarrow AB=BM \Rightarrow$
$\Rightarrow AB=BM=\frac{BC}{2}$, т.к. AM - медиана, ч.т.д.
Пусть теперь $BC=2AB$, тогда проведём медиану AM и биссектрису BL и докажем, что $BL\perp AM$. Т.к. $BC=2AB$ и AM - медиана, то $BM=CM=\frac{BC}{2}=AB \Rightarrow BK$ - биссектриса и высота в $\triangle ABM \Rightarrow BL\perp AM$, ч.т.д.

Теперь найдём кол-во таких тр-ков. Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$ и $AC = 900 - 3x$; $x \in \mathbb{Z}$. По нер-ву тр-ка:

$3x > 900 - 3x$ $\quad$ $900 - x > x$ $\quad$ $900 - 2x > 2x$

$6x > 900$ $\quad$ $900 > 2x$ $\quad$ $900 > 4x$

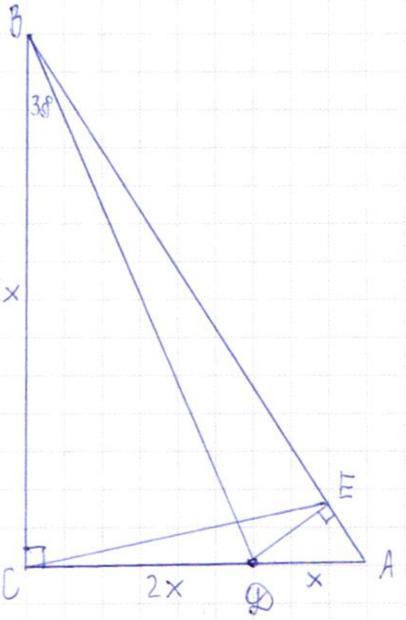
$x > 150$ $\quad$ $450 > x$ $\quad$ $225 > x$

Отсюда $150 < x < 225$, а т. к. $x \in \mathbb{Z}$, то $151 \leq x \leq 224$

Таких x $224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: 74

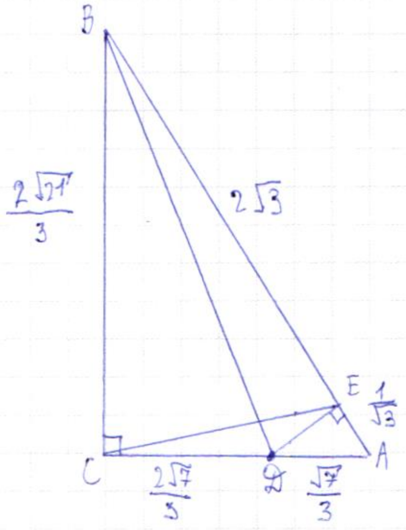
4. а)



Пусть $AD = x$, тогда т.к. $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, то $AC = 3x \Rightarrow CD = 2x$. Т. к. $\angle AED = \angle BCE = 90°$, то $CBED$ – вписанный $\Rightarrow \angle CBD = \angle CED = 30°$

$BC = CD \cdot ctg\, 30°$ т. к. $\angle C = 90° \Rightarrow BC = 2x \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}x$

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$



б) Если $AC = \sqrt{7}$, то $AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$, $CD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, $BC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\cancel{tg \angle BAC = tg \angle DAE = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \angle DAE} - 1} \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow \cos \angle DAE = \sqrt{\frac{1}{tg}}}$

$tg \angle BAC = tg \angle DAE = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $tg^2 \angle DAE + 1 = \frac{1}{\cos^2 \angle DAE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \angle DAE = \frac{1}{1 + tg^2 \angle DAE} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{3}{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \angle DAE = \sqrt{1 - \cos^2 \angle DAE} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$DE = AD \cdot \sin \angle DAE = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{3}$

$\cos \angle CBE = \sin \angle BAC = \sin \angle DAE = \frac{2}{\sqrt{7}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AE = AD \cdot \cos\angle DAE = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ по т. Пифагора $AB = \sqrt{7 + \frac{84}{9}} = \sqrt{\frac{147}{9}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 49}{\cancel{9}3}} = 7 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$BE = AB - AE = \frac{7}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

По т. косинусов $CE = \sqrt{BC^2 + BE^2 - 2 \cdot BC \cdot BE \cdot \cos\angle CBE} = \sqrt{\frac{84}{9} + 12 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{21}}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}} =$

$= \sqrt{\frac{28}{3} + \frac{36}{3} - \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{7}}{3\sqrt{7}}} = \sqrt{\frac{64-48}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin\angle CED = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CE \cdot \sin 30° = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

7. Заметим, что т.к. $f(x) = f(x) + f(1)$, то $f(1) = 0$, а также что $f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(1) = 0 = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$. Отсюда т.к. $f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y})$, то найдя все $f(y)$ мы найдём все $f(\frac{1}{y}) = -f(y)$.

Рассмотрим все $x \in \mathbb{Z}$ от 2 до 22. Т.к. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 – простые, то $f(2) = 1$, $f(3) = 1$, $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$, $f(17) = 8$, $f(19) = 9$. Тогда $f(4) = f(2) + f(2) = 1$, $f(6) = f(2) + f(3) = 2$, $f(8) = f(4) + f(2) = 2$, $f(9) = f(3) + f(3) = 2$, $f(10) = f(2) + f(5) = 3$, $f(12) = f(2) + f(6) = 3$, $f(14) = f(2) + f(7) = 4$, $f(15) = f(5) + f(3) = 3$, $f(16) = f(2) + f(8) = 3$, $f(18) = f(2) + f(9) = 3$, $f(20) = f(2) + f(10) = 4$, $f(21) = f(3) + f(7) = 4$, $f(22) = f(2) + f(11) = 6$

Тогда среди $f(x)$, $2 \le x \le 22$, $x \in \mathbb{Z}$:

две 1, четыре 2, шесть 3, четыре 4, одна 5, две 6, одна 8 и одна 9

и среди $f(\frac{1}{y})$, $2 \le y \le 22$, $y \in \mathbb{Z}$:

две −1, четыре −2, шесть −3, четыре −4, одна −5, две −6, одна −8 и одна −9

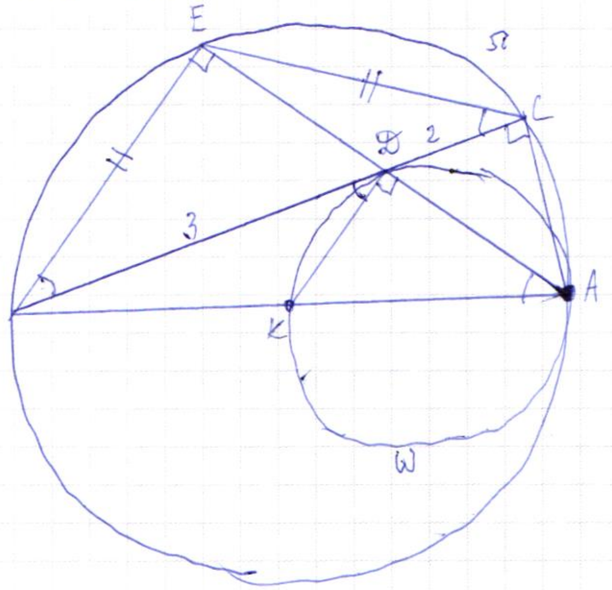
Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то $f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$. Для каждого $f(x) = a$, где $f(x) = a$ ~~в штук~~ при в значениях x нужно поставить в соответствие

y такое, чтобы $|f(\frac{1}{y})| \geq |f(x)|$, пусть таких $f(\frac{1}{y})$ c штук, причём $|f(\frac{1}{y})| > |f(x)|$ при d значениях y. Тогда для $f(x)=a$ таких пар ~~x-y~~ (x,y) $b\cdot d$, т.к. при b значениях x $f(x)=a$ и при d значениях y $|f(\frac{1}{y})| > |f(x)|$. d равняется кол-ву значений y, при которых $|f(\frac{1}{y})| > |f(x)|$, например, при $f(x)=6$ нам подойдут $f(\frac{1}{y})=-8$ и $f(\frac{1}{y})=-9$, т.к. $f(\frac{1}{y})=-8$ встреч. 1 раз и $f(\frac{1}{y})=-9$ тоже 1, то $d=1+1=2$. Отсюда итоговое кол-во пар:

$2\cdot19+4\cdot15+6\cdot9+4\cdot5+1\cdot4+2\cdot2+1\cdot1+1\cdot0=38+60+54+20+4+4+1=181$

Ответ: 181

5.



Решение:

Т.к. AB-диаметр Ω и ω и Ω касаются в т. A, то AK-диаметр ω, где $K = AB \cap \omega$.

$\angle ADK = \angle AEB = \angle ACB = 90^\circ$ т.к. AK и AB-диаметры $\Rightarrow DK \parallel BE$ т.к. $\angle ADK = \angle AEB$. $\angle DAK = \angle BDK$ т.к. BC- касательная к ω и $\angle KDB = \angle EBD$ как накрест лежащие, $\angle EAB = \angle ECB$ как опирающиеся на одну дугу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ECB = \angle EAB = \angle BDK = \angle EBD \Rightarrow \angle ECB = \angle EBC \Rightarrow EB = EC$.

Пусть $AD = x$, тогда т.к. $AD\cdot DE = CD\cdot BD = 6$ по св-ву окр-ти, то $ED = \frac{6}{x}$, по т. Пифагора $BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{9 - \frac{36}{x^2}} = \sqrt{\frac{9x^2-36}{x^2}} = CE$

По т. Пифагора $AB = \sqrt{BE^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{9x^2-36}{x^2} + \frac{x^4+12x^2+36}{x^2}} = \sqrt{x^2+21}$

Т.к. $\triangle ADB \sim \triangle CDE$, т.к. $\angle ADB = \angle CDE$ и $\angle ECD = \angle DAB$, то $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CE} \Rightarrow x\cdot\sqrt{\frac{9x^2-36}{x^2}} = \sqrt{x^2+21}\cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 - 36 = 4x^2 + 84 \Rightarrow 5x^2 = 120 \Rightarrow x^2 = 60 \Rightarrow x = 2\sqrt{15} \Rightarrow AB = \sqrt{60+21} = \sqrt{81} = 9$,

а т.к. AB-диаметр, то радиус $\Omega = 4{,}5$. Из того, что $\triangle ADK \sim \triangle AEB$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $\angle ADK = \angle AEB = 90°$ и $\angle A$ - общий $\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AK = \frac{x^2}{6+x^2} \cdot 9 = \cancel{\frac{60\cdot 9}{66}} = \cancel{\frac{90}{11}}$.

$= \frac{x^2}{x^2+6} \cdot 9 = \frac{90}{11}$

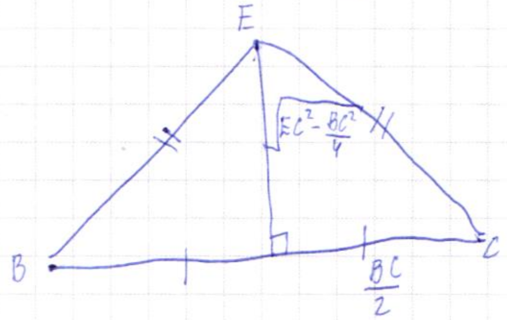
Т.к. AK - диаметр, то радиус $\omega = \frac{90}{22}$.

$S_{ABEC} = S_{ABC} + S_{BEC}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot \sqrt{AB^2 - BC^2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{81-25} = \frac{5\cdot\sqrt{56}}{2} = 5\cdot\sqrt{14}$

$S_{BEC} = \frac{BC}{2} \cdot \sqrt{EC^2 - \frac{BC^2}{4}} =$

$= 2{,}5 \cdot \sqrt{CE^2 - \frac{25}{4}}$



$CE = \sqrt{\frac{9x^2 - 36}{x^2}} =$

$= \sqrt{\frac{9\cdot 60 - 36}{60}} =$

$= \sqrt{\frac{540-36}{60}} = \sqrt{\frac{504}{60}} = \sqrt{\frac{252}{30}} = \sqrt{\frac{126}{15}} = \sqrt{\frac{42}{5}}$

$S_{BEC} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{42}{5} - \frac{25}{4}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{168-125}{20}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{\frac{43}{20}} = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{43}{5}}$

$S_{ABEC} = 5\sqrt{14} + \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{43}{5}}$

Ответ: $r_v = 9$, $r_\omega = \frac{90}{11}$, $S_{ABEC} = 5\sqrt{14} + \frac{5}{4} \cdot \sqrt{\frac{43}{5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f(x)}$

$f(1)=0$	$f(\frac{2}{1})=1$	$f(\frac{1}{1})=0$
$f(2)=1$	$f(\frac{3}{2})=0$	$f(\frac{1}{2})=-1$
$f(3)=1$	$f(\frac{4}{3})=1$	$f(\frac{1}{3})=-1$
$f(4)=2$	$f(\frac{5}{4})=0$	$f(\frac{1}{4})=-2$
$f(5)=2$	$f(\frac{6}{5})=0$	$f(\frac{1}{5})=-2$
$f(6)=2$	$f(\frac{7}{6})=1$	$f(\frac{1}{6})=-2$
$f(7)=3$	$f(\frac{8}{7})=0$	$f(\frac{1}{7})=-3$
$f(8)=3$	$f(\frac{9}{8})=-1$	$f(\frac{1}{8})=-3$
$f(9)=2$	$f(\frac{10}{9})=1$	$f(\frac{1}{9})=-2$
$f(10)=3$	$f(\frac{11}{10})=1$	$f(\frac{1}{10})=-3$
$f(11)=5$	$f(\frac{12}{11})=-2$	$f(\frac{1}{11})=-5$
$f(12)=3$	$f(\frac{13}{12})=3$	$f(\frac{1}{12})=-3$
$f(13)=6$	$f(\frac{14}{13})=-2$	$f(\frac{1}{13})=-6$
$f(14)=4$	$f(\frac{15}{14})=-1$	$f(\frac{1}{14})=-4$
$f(15)=3$	$f(\frac{16}{15})=1$	$f(\frac{1}{15})=-3$
$f(16)=4$	$f(\frac{17}{16})=4$	$f(\frac{1}{16})=-4$
$f(17)=8$	$f(\frac{18}{17})=-5$	$f(\frac{1}{17})=-8$
$f(18)=3$	$f(\frac{19}{18})=6$	$f(\frac{1}{18})=-3$
$f(19)=9$	$f(\frac{20}{19})=-5$	$f(\frac{1}{19})=-9$
$f(20)=4$	$f(\frac{21}{20})=0$	$f(\frac{1}{20})=-4$
$f(21)=4$	$f(\frac{22}{21})=2$	$f(\frac{1}{21})=-4$
$f(22)=6$	$f(\frac{23}{22})=5$	$f(\frac{1}{22})=-6$
$f(23)=11$		

$1\cdot 20+1\cdot 19+2\cdot 17+$
$+1\cdot 16+4\cdot 12+6\cdot 6+4\cdot 2=$
$=20+19+34+16+48+$
$+36+8=$

1 – 2 шт.
2 – 4 шт.
3 – 6 шт.
4 – 4 шт.
5 – 1 шт.
6 – 2 шт.
8 – 1 шт.
9 – 1 шт.

$1\cdot 21+1\cdot 20+2\cdot 18+1\cdot 16+4\cdot 12+$
$+6\cdot 6+4\cdot 2=21+20+36+16+48+$
$+36+8=77+64+44=108+77=\underline{185}$

$8x^2+(a-6)x+b-7\le 0 \quad x\in[-\frac{1}{2};1]$

$\begin{cases} 8x+12x-6-ax-b\le 0 & x\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}] \\ (20-a)x-(b+6)\le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8x-12x+6\le ax+b & x\in[\frac{1}{2};1] \\ (a+4)x+b-6\ge 0 \end{cases}$

$a+4+b-6\ge 0 \Rightarrow a+b\ge 2$

$-6\le b\le 7 \qquad a\ge -5$

$10-\frac{a}{2}-b-6\le 0 \qquad \frac{a}{2}+4\le b$

$b+\frac{a}{2}\ge 4 \qquad a\le 6$

$2b+a\ge 8$

$b\ge 6 \qquad 6\le b\le 7$

$2+\frac{a}{2}-3+b-7\le 0 \quad b+\frac{a}{2}\le 8 \quad a\ge 4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$6 \le b \le 7$

$4 \le a \le 6$

$ax + b \le -2 - 3 + 7$

$b - \frac{a}{2} \le 2$

$b \le 2 + \frac{a}{2}$

$8x^2 + (a-6)x + b - 7 \le 0$

$b \le 7$ $\quad a + b \ge 2$

$-6 \le b$ $\quad 20 \ge a \ge -5$

$4 \le \frac{a}{2} + b$

$$\begin{cases} 8x - 12x + 6 \le ax + b \quad x \in [\frac{1}{2}; 1] \\ (4+a)x + (b-6) \ge 0 \end{cases}$$

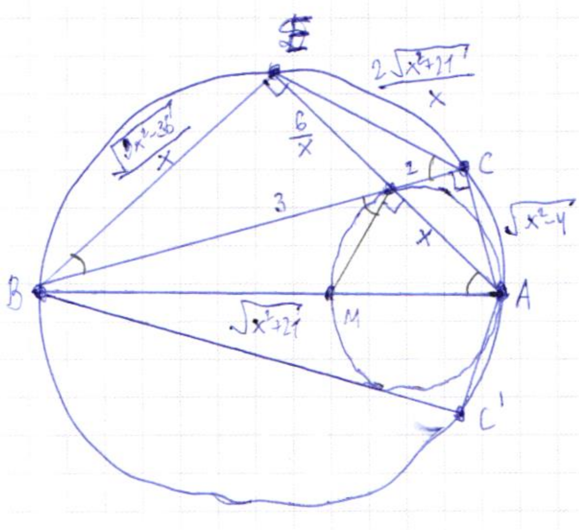
$8x + 12x - 6 \le ax + b \quad x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\underbrace{(20-a)}_{\ge 0} x - (b+6) \le 0$

$9 - \frac{36}{x^2} = \frac{\sqrt{9x^2 - 36}}{x}$

$\frac{9x^2 - 36}{x^2} + \frac{(x^2+6)^2}{x^2} = \frac{9x^2 - 36 + x^4 + 12x^2 + 36}{x^2}$

$\frac{x^4 + 21x^2}{x^2} = x^2 + 21$



$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow BM = \frac{BD^2}{AB} = \frac{9}{\sqrt{x^2+21}} \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = \frac{x^2 + 21 - 9}{\sqrt{x^2+21}} = \frac{x^2+12}{\sqrt{x^2+21}}$

$9x^2 - 36 = 4x^2 + 84$

$\frac{x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{9x^2-36}} = \frac{x}{3}$

$13x^2 = 120$

$x = 2\sqrt{\frac{30}{13}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a=a$

$b=ay$

$c=ay^2$?

$d=ay^3 = \cancel{ax^2-2bx+c} = ax^2-2ayx+ay^2=0$

$x=d=ay^3$ - корень

$a^3y^6-2a^2y^4+ay^2=0$

$a^2y^6-2ay^4+y^2=0$

$(ay^3)^2-2\cdot ay^3\cdot y+(y)^2=0$

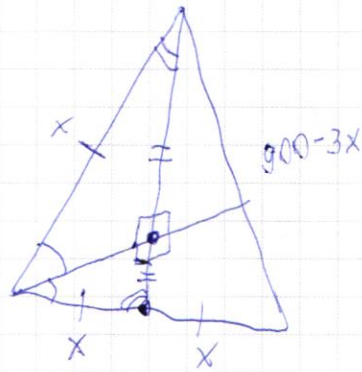
$(ay^3-y)^2=0$

$ay^3-y=0$

$y(ay^2-1)=0$

$ay^2=1$ или $ay^2=0$

2.



$3x > 900-3x$

$6x > 900$

$x > 150$

$900-2x > 2x$

$900 > 4x$

$x < 225$

$x \in [151; 224]$

$900-x > x$

$900 > 2x$

$450 > x$

$$\begin{array}{r} 224 \\ -\ 150 \\ \hline 74 \end{array}$$

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6 \\ x-6y\geq 0 \end{cases}$

$x^2-13xy+36y^2+x+6y-6=0$

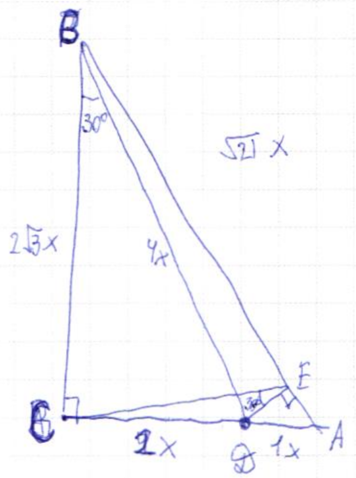
$x\geq 6y$

$x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$



$tg^2\angle BAC + 1 = \frac{1}{\cos^2\angle BAC}$

$\cos^2\angle BAC = \frac{1}{tg^2+1} = \frac{1}{\frac{12}{9}+1} = \frac{1}{\frac{21}{9}} = \frac{9}{21} =$

$= \left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)^2$

$\cos\angle BAC = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$\sin\angle BAC = \sqrt{1-\frac{9}{21}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

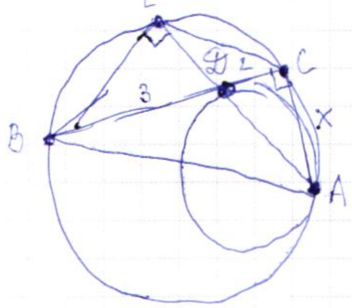
$DE = AD\cdot\sin\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{7}}x$

$\cos\angle CBA = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$CE^2 = BC^2 + EB^2 - 2\cdot BC\cdot EB\cdot\cos\angle CBA =$

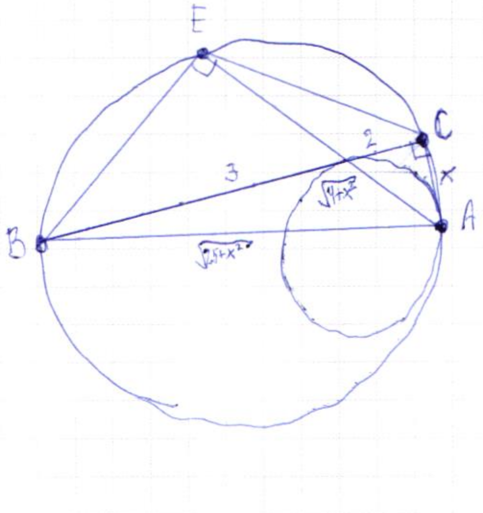
$= 12x^2 + 21x^2 - 2\cdot 2\sqrt{3}x\cdot \cancel{\sqrt{21}}^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{7}}} =$

$= 33x^2 - 24x^2 = 9x^2 \Rightarrow CE = 3x$



$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot CE\cdot\sin\angle DEC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}x\cdot 3x\cdot\frac{1}{2} =$

$= \frac{3x^2}{2\sqrt{7}} = \frac{3\cdot\sqrt{7}}{2}$



$f(1)=0$

$f(2)=1$ $\quad f(x\cdot 1) = f(x)+f(1)$

$f(3)=1$ $\quad f(\frac{6}{5}) = f(6\cdot\frac{1}{5}) = f(6)+f(\frac{1}{5})$

$f(6)=2$ $\quad f(\frac{1}{5}) = -2$

$f(5)=2$ $\quad f(4)=2$

$\cancel{f(1/2)=0}$ $\quad f(\frac{6}{5})=0$

$\cancel{f(1\frac{2}{3})=}$