МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x-1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

a, b, c явл. 1,2,3 членом геом прогрессии, тогда $b=aq$, $c=aq^2$

Тогда $b^2=ac$

$ax^2-2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=4ac-4ac=0$

$x=\frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}a}=\frac{b}{a}$

Тогда $c^2=b\cdot\frac{b}{a}$ (произведение двух соседних членов геом. прогрессии)

$c^2=\frac{b^2}{a}$

Но $b^2=ac \Rightarrow c=\frac{b^2}{a}$ (очевидно $a\neq 0$, иначе геом прогрессия состоит из одних нулей)

Тогда $c^2=c$

$c(c-1)=0$ (c очевидно не 0, т.к тогда либо a, либо q равно 0)

$c-1=0$

$c=1$

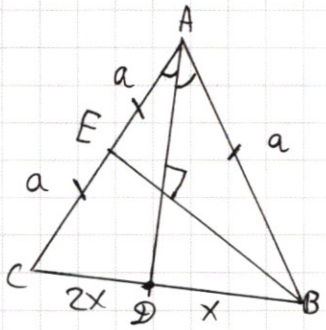
Ответ: 1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2



Пусть в $\triangle ABC$ проведена биссектриса AD, перпендикулярная медиане BE.
Тогда $\triangle ABE$ – равнобедренный, т.к биссектриса совпадает с высотой. Пусть $AE = a$, тогда $AB = a$, $CE = a$ (т.к $AE = EC$)

Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{2a}{a} = 2$. Но AD биссектриса, тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{2a}{a} = 2$

Пусть $CD = 2x$, $DB = x$

Итого стороны треугольника $2a$, a, $3x$. Периметр треугольника 900, значит
$3a + 3x = 900 \Rightarrow a + x = 300$

Но наш треугольник должен существовать, тогда:

$$\begin{cases} 2a + a > 3x \\ 2a + 3x > a \\ a + 3x > 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a > 3x \\ 3x > a \\ a + 3x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x > \frac{a}{3} \\ a + 3x \end{cases}$$

Ясно, что $a, x > 0 \Rightarrow a + 3x > 0$

Тогда $a > x > \frac{a}{3}$.

Наши стороны целые, тогда переберем значение сторон:

1 и 299, ..., 150 и 150 (первое число a, второе x) не подходят, ведь тогда $a \leq x$.

151 и 149 подходит, 152 и 148 подходит, ...

Заметим, что т.к $3x > a$, то $a + x = 300$, $a + x < 3x + x = 4x$

$4x > 300 \Leftrightarrow x > 75$

Т.е подходят 151 и 149, 152 и 148, ..., 224 и 76

Т.е всего 74 пары a и x. Тогда треугольников всего 74

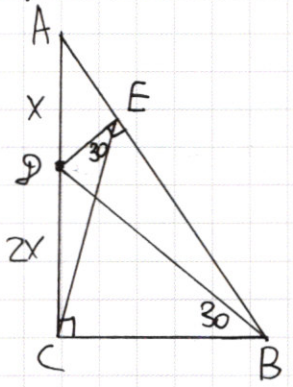
Ответ: 74

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

а)



$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$, тогда пусть $AD=x \Rightarrow AC=3x$, тогда

$CD=2x$

$BCDE$ вписанный, т.к $\angle BCD+\angle BED=180$

$\angle CED=30$ (по условию), тогда $\angle CBD=\angle CED=30$ (из вписанности)

Рассмотрим $\triangle BCD$:

$\sin CBD=\sin 30=\frac{1}{2}=\frac{CD}{BD}=\frac{2x}{BD} \Rightarrow BD=4x$

$BC^2=DB^2-DC^2=16x^2-4x^2=12x^2 \Rightarrow BC=2x\sqrt{3}$

Т.е $BC=2x\sqrt{3}$, $AC=3x$

$tg BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2\cancel{x}\sqrt{3}}{3\cancel{x}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC=\sqrt{7}$, тогда $x=\frac{\sqrt{7}}{3}$ (т.к $AC=3x$)

$\triangle ADE\sim\triangle ABC$, тогда $\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}$

$AB^2=(3x)^2+(2x\sqrt{3})^2=9x^2+12x^2=21x^2=21\cdot\frac{7}{9}=\frac{49}{3}$

$AB=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$, $BC=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$

$DE=\frac{BC\cdot AD}{AB}=\frac{\frac{2\sqrt{21}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}{\frac{7\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{14\sqrt{3}}{9}}{\frac{21\sqrt{3}}{9}}=\frac{14\sqrt{3}}{21\sqrt{3}}=\frac{14}{21}=\frac{2}{3}$

Имеем, что $DE = \frac{2}{3}$, $CD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$\sin CDE = \sin(180 - CDE) = \sin CBE$ (т.к $BCDE$ вписанный)

$\sin CBE = \frac{CA}{AB} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{2\sqrt{21}}{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{21}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DE \cdot \sin CDE = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{7}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{21}}{36} = \frac{\sqrt{21}}{9}$

Ответ: а) $\operatorname{tg} BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ б) $S_{CED} = \frac{\sqrt{21}}{9}$

№ 3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x - 6y \geq 0 \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6y \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases}$

Пусть $x - 6 = a$, $y - 1 = b$

$x - 6y = a - 6b$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

Сделаем не равносильный переход, возведя (1) в квадрат

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 + 36b^2 = 13ab$

Очевидно, что $ab \neq 0$, иначе $(a)^2 + (6b)^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$, но $a^2 + 2b^2$ тогда равно 0, а должно быть равно 18 (?!)

Сократим на ab

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{a}{b} + 36\frac{b}{a} = 13$

Пусть $\frac{a}{b} = t$

$t + \frac{36}{t} = 13$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = 9 \end{array}\right.$

1) $a = 4b$

$\begin{cases} 4b - 6b = \sqrt{4b^2} = |2b| \\ 16b^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$-2b = |2b|$ верно, если $b \leq 0$

$18b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 1$, но т.к система имеет решения только при $b \leq 0$, (в рассматр. случае)

то $b = -1 \Rightarrow a = -4$

$b = y - 1 = -1$

$y = 0$

$a = -4 \Rightarrow x = 2$

Легко проверить, что $(2;0)$ является решением исходной системы (удв. ОДЗ)

2) $a = 9b$

$\begin{cases} 9b - 6b = \sqrt{9b^2} = |3b| \\ 81b^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$

$3b = |3b|$ верно, если $b \geq 0$

$83b^2=18$

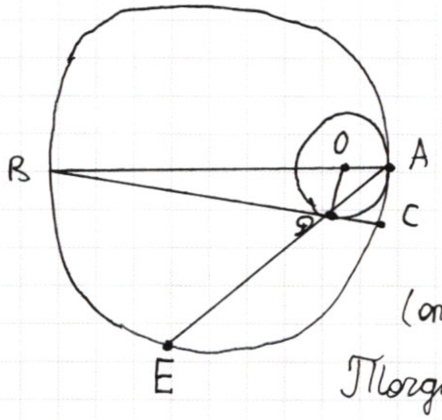
$b=\pm\sqrt{\frac{18}{83}}$, но т.к система имеет решения только при $b\geq 0$ (в рассматриваемом случае), то $b=\sqrt{\frac{18}{83}}=\cancel{3\sqrt{\frac{2}{83}}}=3\sqrt{\frac{2}{83}}$

$a=9b=27\sqrt{\frac{2}{83}}$

Тогда $x=27\sqrt{\frac{2}{83}}+6$, $y=3\sqrt{\frac{2}{83}}+1$. (они удовлетворяют, очевидно, ОДЗ)

Ответ: $(2;0)$, $\left(27\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

№5



$CD=2$

$BD=3$

Т.к Ω и ω касаются в A, то центр Ω, центр ω, A на 1 прямой

Пусть центр ω это O, тогда т.к BC касается ω в точке D, то $OD\perp BC$. $\angle BCA=90$ (опирается на диаметр)

Тогда $\Delta BDO\sim\Delta BCA$ (по 2 углам) и $OD\parallel AC$

Тогда из т. Фалеса $\frac{BD}{DC}=\frac{BO}{OA}=\frac{3}{2}$. Пусть $BO=3x$, тогда $OA=2x$

$BO^2=OD^2+BD^2=OA^2+BD^2=4x^2+9$

$9x^2=4x^2+9$

$5x^2=9$

$x=\frac{3}{\sqrt5}=\frac{3\sqrt5}{5}$, тогда радиус Ω это $\frac{5x}{2}=\frac{3\sqrt5}{2}$

радиус ω это $\cancel{3x}$ $2x=\frac{6\sqrt5}{5}$

$AD^2=AC^2+CD^2$

$AC^2=AB^2-BC^2=45-25=20$ $\cancel{\Rightarrow A}$

$AD^2=AC^2+CD^2=20+4=24\Rightarrow AD=2\sqrt6$

$AD\cdot DE=BD\cdot DC$ (теорема о пересекающихся хордах)

$AD\cdot DE=6\Rightarrow DE=\frac{6}{2\sqrt6}=\frac{3}{\sqrt6}=\frac{3\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{BACE} = S_{BAC} + S_{BED} + S_{CED}$$

$$S_{BAC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{20} = \frac{5\sqrt{20}}{2} = 5\sqrt{5}$$

$$\sin BDE = \sin ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DE \cdot \sin BDE = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\cancel{\sqrt{6}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot ED \cdot DC \cdot \sin EDC$$

$\sin EDC = \sin ADC$ (синусы смежных углов равны)

$$S_{DEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{6}}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\cancel{\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{BACE} = 5\sqrt{5} + \frac{3\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{20\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$$

Ответ: $R_\Omega = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $R_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$ при любых $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

Подставим $x = 0$

$-6 \le b \le 7$

Подставим $x = -\frac{1}{2}$

$-12 \le -\frac{a}{2} + b \le 2$

Подставим $x = 1$

$2 \le a + b \le 5$

Подставим $x = \frac{1}{2}$

$4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$

$$\begin{cases} 4 \leq \frac{a}{2} + b \leq 8 \\ -12 \leq \frac{-a}{2} + b \leq 2 \end{cases}$$

Тогда $2b \leq 10 \Rightarrow b \leq 5$

$2b \geq -8 \Rightarrow b \geq -4$

И т.к $-6 \leq b \leq 7$, то $b \in [-4; 5]$

№7

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(19) = 9$

$f(1 \cdot 1) = f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$

$f(8) = f(2) + f(4) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(12) = f(2) + f(6) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(4) + f(4) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$

$f(20) = f(4) + f(5) = 4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(22) = f(2) + f(11) = 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (дополнение к решению)

Понятно, что из условия стороны целые: $2a, a, 3x \in \mathbb{Z}$
Но т.к. $a \in \mathbb{Z}$, $a+x=300$, то и $x \in \mathbb{Z}$, поэтому несмотря на то, что из того что $3x \in \mathbb{Z}$ НЕ следует что $x \in \mathbb{Z}$, это все равно следует из того что $a \in \mathbb{Z}$

(В условии также не сказано, что РОВНО одна биссектриса перпендикулярна РОВНО одной медиане. Возможно, что в каком-то из 74 случаев будет так, что биссектриса перпендикулярна двум медианам, или какой-то похожий случай, а может и нет, но в любом случае будет выполнено, что найдется хотя бы 1 биссектриса, перпендикулярная медиане)

№6 (новое решение)

$8x - 6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$ при любом $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$-8x^2 + (6-a)x + 7 - b \geq 0$

$8x - 6|2x-1| - ax - b \leq 0$

1) Пусть $x \geq \frac{1}{2}$ (и ≤ 1)

Тогда $\cancel{-8x^2+(6-a)x+7-b}$ $-4x+6-ax-b \leq 0$

$(-4-a)x + 6 - b \leq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a, b, c,$ корень $ax^2 - 2bx + c = 0$ (1 2 3 4)

b^2

a, aq, aq^2

$b^2 = ac$

$4b^2 - 4ac = 0$ корень единственный

$\frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$

$x - 6 = a$ $\quad x \geq 6$

$y - 1 = b$

$a^2 + 2b^2 = 18$

$a^2 = ab$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$x - 6y =$

$(x-6)(y-1)$

$xy - x - 6y + 6$

$a + 6 - 6b + 6$

$-b = -y + 1$

$-6b = -6y + 6$ $\quad 74$

$-6y = -6b - 6$

$(x-6)^2 - 36 + 2y^2 - 4y + 20 = 0$

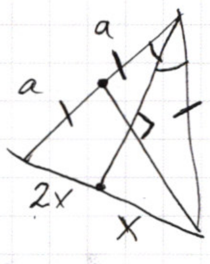
$(x-6)^2 + 2(y^2 - 2y - 8) = 0$

$(x-6)^2 + 2(y^2 - 2y + 1 - 9)$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$x - 6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$

$a > x > \frac{a}{3}$



$2a + 3x > a$

$3a > 3x$

$3x + a > 2a$

$3x > a$

$a > x > \frac{a}{3}$

$2a, a, 3x$

$3a + 3x = 900$

$a + x = 300$

151 149

152 148

⋮

299 1

151 до 224

$151 + 73 = 224$

200 100

~~250~~ 50

~~210~~ 90

~~220~~ 80

~~2100~~

~~2110~~ ~~160~~

$3x > a$

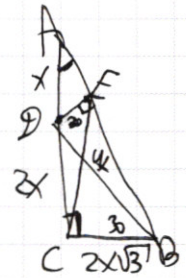
$a + x = 300$

$300 > 4x$

223 77 $x < 75$

224 76

225 75



$16x^2-4x^2$

$\sqrt{12x^2}$

$2x\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a^2+2b^2=18 \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2+36b^2=13ab$

$a^2+2b^2=18$

$\cancel{\frac{2x\sqrt{3}}{3x}}$

$\cancel{AK=\sqrt{7}}$

$\cancel{BC=2\sqrt{21}}$

$\cancel{7+4\cdot 21}$

$AC=\sqrt{7}$

$x=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

$\frac{84}{9}+7$

$84+63$

$\frac{a}{b}+36\frac{b}{a}=13$

$t+\frac{1}{t}36=13$

$t^2-13t+36=0$

$4 \quad 9$

$$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b \end{array}\right.$$

$a^2=\frac{45}{25}$

$AD^2=4+AC^2=4+\frac{100a^2}{9}=4+\frac{\overset{4}{\cancel{100}}\cdot\overset{5}{\cancel{45}}}{25\cdot 9}$

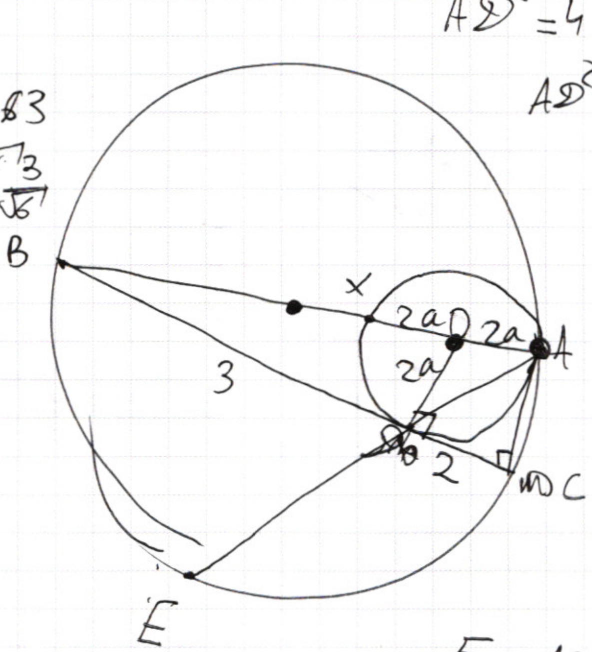
$AD^2=24 \Rightarrow AD=2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6}\cdot DE=\cancel{6}3$

$DE=\frac{\cancel{3\sqrt{}}3}{\sqrt{6}}$

$\frac{3\sqrt{6}}{6}$

$\frac{\sqrt{6}}{2}$



$BX\cdot BA=9$

$BO=3a$

$OA=2a$

$\frac{2a}{AC}=\frac{3}{5}$

$AC=\frac{10a}{3}$

$5,\ \frac{10a}{3},\ 5a$

$25a^2=45$

$5a=3\sqrt{5}$

$a=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$25+\frac{100a^2}{9}=25a^2$

$225+100a^2=225a^2$

$125a^2=225$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)