МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[2 балла]** Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. **[4 балла]** Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

b_n - геом. прогрессия, $b_1 = a$; $b_2 = b$; $b_3 = c$; =>

=> $b = aq$, $q \neq 0$

$c = aq^2$

$b_4 = aq^3$ – корень ур-я: $ax^2 + 2bx + c = 0$ $(x = aq^3)$

Подставим a, b, c и x в уравнение:

$a \cdot (aq^3)^2 + 2 \cdot aq \cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0$ $|: aq^2 \neq 0$

$a^2q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$

$(aq^2 + 1)^2 = 0$ => $aq^2 = -1$

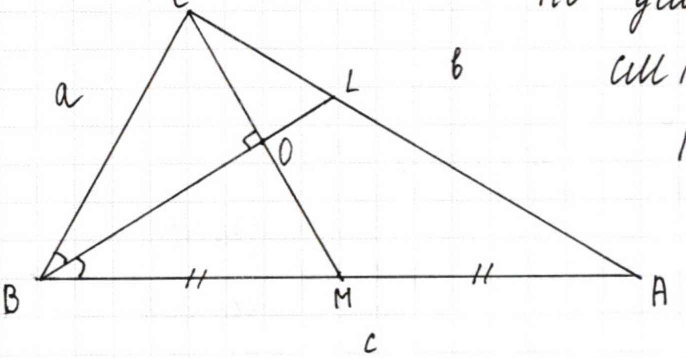
$aq^2 = c$ => $c = -1$; $b_3 = c = -1$

Ответ: -1

№ 2

$P = 1200$. Пусть стороны треугольника равны a, b и c, где $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$a + b + c = 1200$.



1) CM - медиана, BL - биссектриса $\triangle ABC$
По условию $CM \perp BL$.

$CM \cap BL \to O$

BO - высота и биссектриса $\triangle BCM$ =>

=> $\triangle BCM$ - равнобедр. $(BC = BM = a)$

2) $BM = MA$, т.к. CM - медиана => $BC = BM = MA = a$ => $c = 2a$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3) $a+b+c = a+b+2a = 3a+b = 1200$

$b = 1200 - 3a = 3(400-a)$

$b \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \vdots 3$

Заменим $b = 3k$, где ~~$k \in \mathbb{Z}$ и k-положит~~ $k \in \mathbb{N}$

$3a + 3k = 1200 \quad |:3$

$a + k = 400$

4) По теореме о существовании треугольника:

$b < a+c$, $a < b+c$, $c < a+b$

$$\begin{cases} b < 3a \\ a < b+2a \text{ верно всегда, т.к. } a, b \text{ и } c \text{ - положительные.} \\ 2a < a+b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b < 3a \\ a < b \end{cases} \Leftrightarrow a < b < 3a$$

5) $b < 3a$: $3k < 3a$

$$\begin{cases} k < a \\ k + a = 400 \end{cases} \Rightarrow$$

~~возможные значения:~~ ~~$k \in [1; 199]$~~ ~~$a \in [201; 399]$~~

$$\begin{cases} a = 400 - k \\ k < 400 - k \end{cases} \Rightarrow 2k < 400; \quad k < 200 \Rightarrow$$

$\Rightarrow k \in [1; 199]$

6) $b > a$: $\begin{cases} 3k > a \\ k + a = 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k > 400 - k \\ a = 400 - k \end{cases}$

$\Rightarrow 3k + k > 400$

$4k > 400$; $k > 100$

7) Получаем систему $\begin{cases} k > 100 \\ k < 200 \end{cases}$ $k \in [101; 199]$ –

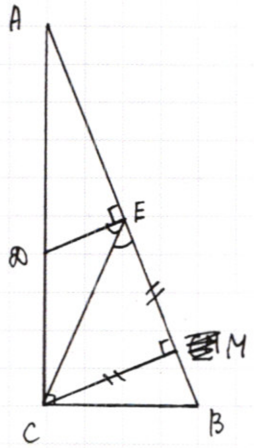
– 99 возможных значений (целочисленных)

Ответ: 99 треугольников

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$ - прямоуг., AB - гипотенуза
$D \in AC$, $E \in AB$
$AD : AC = 3:5$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 45°$
а) Найти $tg\angle BAC$
б) $AC = \sqrt{29}$
Найти S_{CED}

а)

1) $\angle DEB = 90°$; $\angle DEB = \angle CED + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$

2) Проведем $CM \parallel DE$, $CM \perp AB \Rightarrow \triangle CEM$ - прямоуг-ый, CE - гипотенуза; по св-ву прямоуг. тр-ка: $\angle MCE + \angle CEM = 90° \Rightarrow \angle ECM = 45° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ECM = \angle MEC$; $\triangle EMC$ - равнобедр., $CM = ME$

3) $\triangle ADE \sim \triangle ACM$ по 2-м углам ($\angle A$ - общ., $\angle E = \angle M = 90°$) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $AM = AE + EM$. Пусть $EM = MC = y$

$\frac{AE}{AE+y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3AE + 3y = 5AE$; $2AE = 3y$; $AE = \frac{3}{2}y$

4) $tg\angle BAC = \frac{CM}{MA} = \frac{CM}{AE+EM} = \frac{y}{\frac{3}{2}y+y} = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} = \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$

б) 1) ~~AC~~ по теореме Пифагора: $AC^2 = CM^2 + MA^2$

$AC = \sqrt{y^2 + \left(\frac{5}{2}y\right)^2} = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}y^2} = y\frac{\sqrt{29}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{29}}{2}y = \sqrt{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2$

2) $S_{CMA} = \frac{CM \cdot MA}{2} = \frac{y \cdot \frac{5}{2}y}{2} = \frac{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

3) Из подобия $\triangle DEA$ и $\triangle CMA$: $\frac{DE}{CM} = \frac{3}{5}$ (см. пункт а3)

$\frac{DE}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow DE = \frac{3}{5}y$

4) $S_{DEA} = \frac{DE \cdot EA}{2} = \frac{\frac{3}{5}y \cdot \frac{3}{2}y}{2} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2}{\cancel{2}} = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

5) ~~$S_{DEBC} = S$~~ $S_{DEMC} = S_{CAM} - S_{DEA} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{25-9}{5} = \frac{16}{5}$

6) $S_{CME} = \frac{CM \cdot ME}{2} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

7) $S_{CED} = S_{DEMC} - S_{CME} = \frac{16}{5} - 2 = \frac{16-10}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

Ответ: 1,2

Задача 3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1): ОДЗ: $\begin{cases} xy - 2x - y + 2 \geq 0 \\ y - 2x \geq 0 \end{cases}$

$(y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + y(1-5x) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = (1-5x)^2 - 4(4x^2 + 2x - 2) = 9x^2 - 18x + 9 = 9(x^2 - 2x + 1) = 9(x-1)^2$

$y = \frac{5x - 1 \pm 3|x-1|}{2}$; $y = \left[\begin{array}{l} 4x - 2 \\ x + 1 \end{array} \right.$

Подставим в (2):

1). $2x^2 + (4x-2)^2 - 4x - 4(4x-2) + 3 = 0$

$18x^2 - 36x + 15 = 0$ $\qquad 6x^2 - 12x + 5 = 0$

~~$D_1 = 18^2 - 18 \cdot 15 = 18(18-15) = 18 \cdot 3 = 9 \cdot 6$~~ $\qquad D_1 = 36 - 6 \cdot 5 = 6$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{6}}{6} = \left[\begin{array}{l} 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{6} \end{array} \right.$

$y = \left[\begin{array}{l} 4 + \frac{4\sqrt{6}}{6} - 2 \\ 4 - \frac{4\sqrt{6}}{6} - 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} \\ 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} \end{array} \right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $2x^2 + (x+1)^2 - 4x - 4(x+1) + 3 = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$x(x-2)=0 \Rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 0 \\ 2 \end{array}\right. \quad y = \left[\begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array}\right.$

Проверка ОДЗ:

1) $x = 0$, $y = 1$ $\left\{\begin{array}{l} 1-0 \geq 0 \\ 0-0-1+2 \geq 0 \end{array}\right.$ (+)

2) $x = 2$, $y = 3$ $3-4<0$ Не подходит

3) $x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\quad y-2x = 2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} - 2 - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} > 0$

$xy - 2x - y + 2 =$

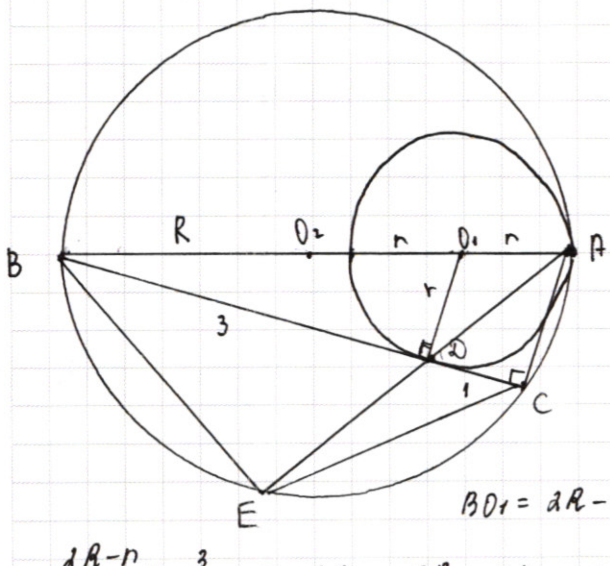
$= \left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) - 4 - \sqrt{6} + 2 =$

$= 2 + \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3} + \frac{2\cdot 6}{3\cdot 6} - \frac{3\sqrt{6}}{3} - 2 > 0$

4) $x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{6}$, $y = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3}$ $\quad y-2x = 2 - \frac{2\sqrt{6}}{3} - 2 + \frac{\sqrt{6}}{3} = -\frac{\sqrt{6}}{3} < 0$ НЕ подходит.

Ответ: $(0;1)$; $\left(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

Задача 5



Дано: $\omega \cap \Omega \to A$
AB - диаметр Ω
$BC \cap \omega \to D$, $AD \cap \Omega \to E$
$CD = 1$, $BD = 3$
Найти: R, r, S_{BACE}

1) т.к. окруж. ω и Ω касаются, то их центры O_1 и O_2 лежат на 1 прямой AB.
2) $\angle BCA = 90°$ как опир. на диаметр.
3) $O_1D \perp BC$, т.к. BC - касательная
4) $\triangle DO_1B \sim \triangle CAB$ по 2-м углам ($\angle B$-общ.; $\angle C = \angle D = 90°$) $\Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{3}{4}$

$BO_1 = 2R - r$; $BA = 2R$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Rightarrow 6R = 8R - 4r \Rightarrow 2R = 4r \Rightarrow R = 2r \Rightarrow O_2B = O_2A = 2r, O_1O_2 = r$

5) По т. Пифагора в $\triangle BO_1D$: $BO_1^2 = O_1D^2 + BD^2$; $BO_1 = 3r$, $BD = r$

$9r^2 = r^2 + 9 \Rightarrow 8r^2 = 9$; $r = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

б) $R = 2r = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Ответ: радиус большей окружности $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

радиус меньшей окружности $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

Задача 7

f определена на множестве положительных рац. чисел $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(x/y)$ не может быть <0.

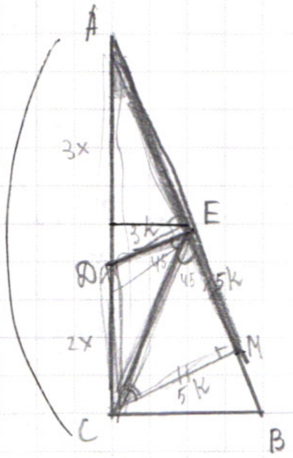
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{\frac{AE}{AB} = \frac{3}{5}}$

$\cancel{\frac{AE}{AE+5k} = 7}$

$\frac{AE}{AM} = \frac{3}{5}$

$\frac{AE}{AE+5k} = \frac{3}{5}$

$\cancel{5AE}$ $5AE = 3AE + 15k$

$2AE = 15k$

$AE = \frac{15}{2}k$

$AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4}y^2 + y^2} =$

$= y\sqrt{\frac{29}{4}} =$

$= y \cdot \frac{\sqrt{29}}{2}$

$\frac{\sqrt{29}}{2} y = \sqrt{29}$

$\frac{1}{2}y = 1$

$y = 2$

$tg = \frac{CM}{MA} = \frac{5k}{\frac{15}{2}k + 5k.}$

$\exists\ CM = y \Rightarrow \frac{DE}{y} = \frac{3}{5}$

$AM = \frac{5}{2}y$

$5DE = 3y \Rightarrow DE = \frac{3y}{5}$

$\frac{AE}{AM} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{AE}{AE+y} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5AE = 3AE + 3y$

$AE = \frac{3}{2}y$

$tg\alpha = \frac{CM}{MA} = \frac{y}{\frac{3}{2}y + y} = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} =$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{29}$

$S_{CED} = ?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

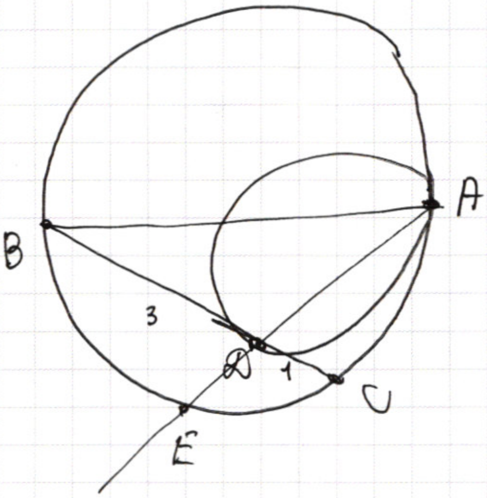
5

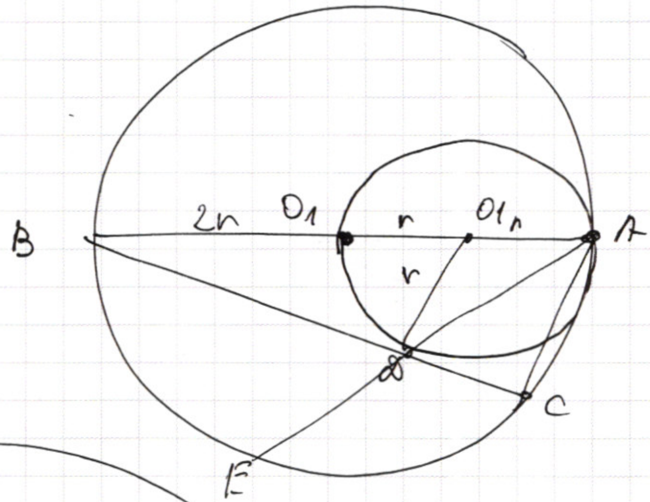
$CD = 1$
$BD = 3$

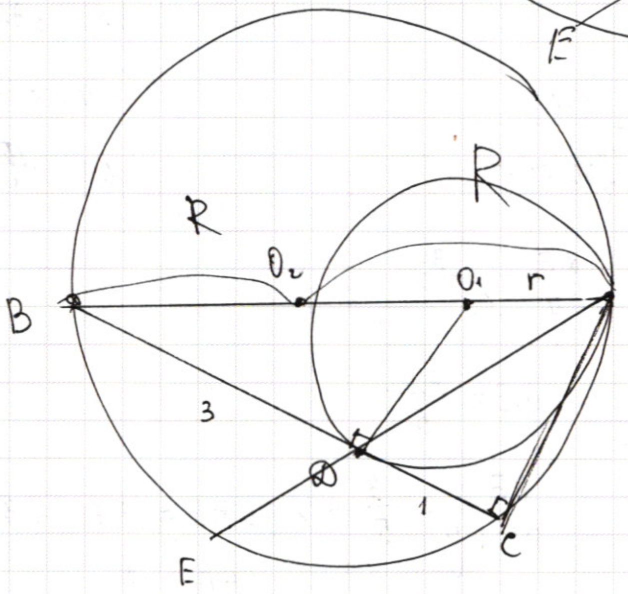
R - ?
r - ?

S_{BACE}

$CD = 1$
$BD = 3$





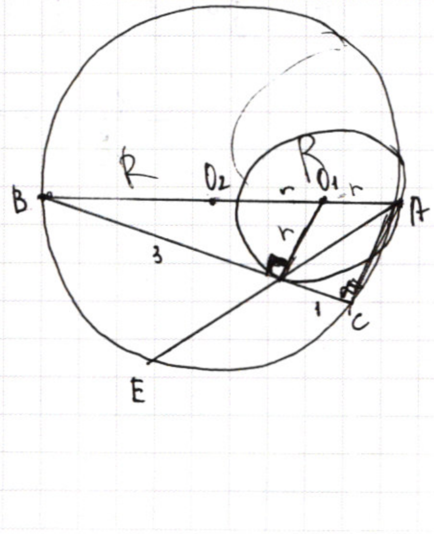


$AD \cdot DE = 3$

$$\frac{2R}{4} = \frac{2R-r}{3}$$

$AC = AB^2 - BC^2 =$
$= \sqrt{4R^2 - 16}$

$8 = 4 \cdot 2$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 3a+b=1200 \\ b>a \end{cases}$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$k=100$ ~~300~~ $\rightarrow$

100 — 300

~~300 — 100~~

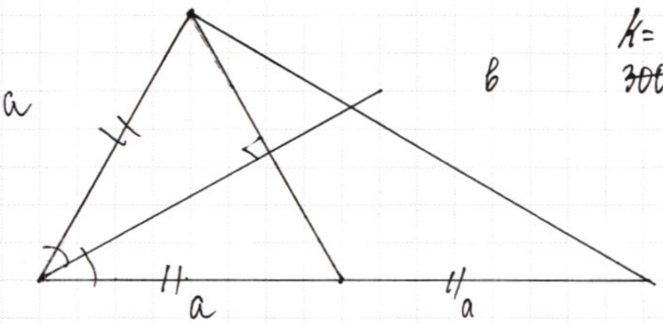
~~$b=1200-3a$~~

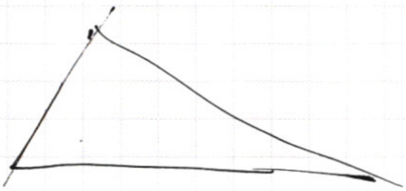
$k+a=400$

$3k>a$

$400:4=100.$

$3k$





$3a+b=1200$

$\vdots 3 \quad \vdots 3$

$3a=1200-b$

$b<3a$

~~$b=3k+r$~~

~~$3a=1200+3k+r$~~

~~$b \vdots 3$~~

$b=1200-3a \Rightarrow b \vdots 3$

$b=3k$

$3k+3a=1200$

$k+a=400.$

$k<a$

1 11 12 13 14

15 16

17

18

19

$3a+b=1200$

$b<3a.$

~~1 20~~

$199\cdot 3>201$

~~9+3~~

$3\cdot 3+3$

$3\cdot 2+$

1 — 399.

$3\cdot 4=12$

$3\cdot 40=120$

$3\cdot 400=1200.$

$1200 \vdots 3=$

1 2 3 4 5

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$k\in[1;199]$ — 199 треуг-ов.

$a\in[201;399]$

1 399

2 398

$\vdots$

199 201

~~200 200~~

$a<3k.$

$2a<a+b$

$k<a<3k$

$a<b$

$a<b$

$b<3a$

$a<b<3a$

$a<3k<3a$

$k+a=400.$

$3a+b$

~~$b\in[3;$~~

$3k$ ~~$k+a=400$~~ ~~$3k$~~

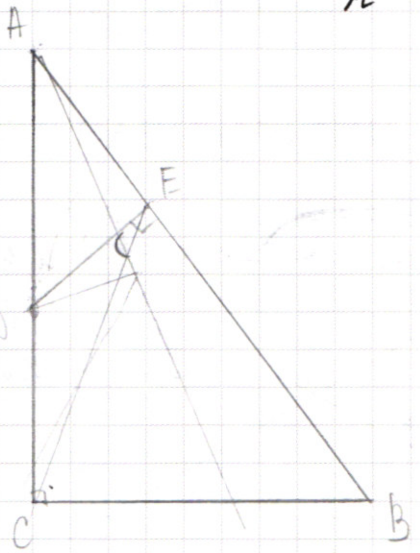
черновик

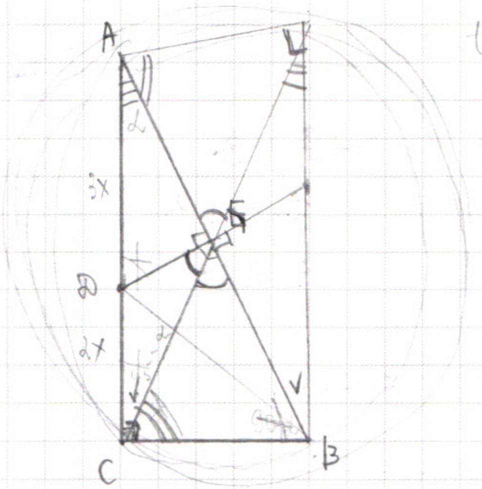
Дано: AC – кат.
AB – гип.
$D \in AC$
$E \in AB$
$AD : AC = 3:5$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 45^0$
$tg \angle BAC = ?$

(4)

$a = 400 - k$

k





$tg BAC = \frac{CB}{CA} = \frac{DE}{EA}$

$\triangle DEA \sim \triangle BCA$

$\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB}$

$\frac{AE}{5x} = \frac{3x}{AB}$

~~AE · AB = 5x · 3x~~

$90 + 45^0 =$

135

1) отношение

2) угол

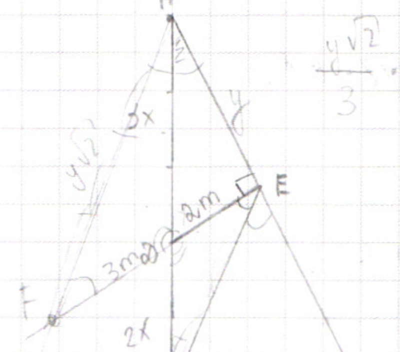
3) ⊥

~~135 + 45~~

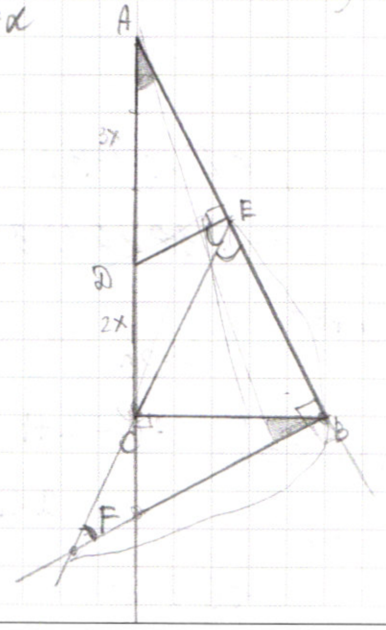
$180 - 135 = 45^0$

$45^0 - \alpha$

$90 - 45 + \alpha = 45^0 + \alpha$



$\frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 2k$



$BE = FB$

$BC = \frac{BA \cdot BF}{AF}$

$\frac{FB}{BA}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

из (1): 4

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$y^2 + y(1-5x) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$D = (1-5x)^2 - 4(4x^2 + 2x - 2) =$

МОД!

$= 1 - 10x + 25x^2 - 16x^2 - 8x + 8 =$

$= 9x^2 - 18x + 9 = 9(x^2 - 2x + 1) = \sqrt{9} \cdot (x-1)^2$

$\cancel{(3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = 3x - 3}$

$y = \frac{5x - 1 \pm 3(x-1)}{2} = \frac{5x - 1 + 3x - 3}{2} = \frac{8x-4}{2} = 4x - 2$

$\frac{5x - 1 - 3x + 3}{2} = \frac{2x+2}{2} = x + 1$

$y = \left[\begin{array}{l} 4x - 2 = 2(x-1) \\ x + 1 \end{array} \right.$

$16x^2 - 16x + 4$

$2 \cdot 2 \cdot 4$

$2x^2 + 16x^2 - 16x + 4 - 4x - 16x + 8 + 3 = 0$

18 -36 15

(2): $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2x^2 + (4x-2)^2 - 4x - 4(4x-2) + 3 = 0$

$\cancel{16}$
20

$2x^2 + 16x^2 - 16x + 4 - 4x - 16x + 8 + 3 = 0.$

$6 - 12 + 5$

$18x^2 - 32x + 15 = 0.$

$D_1 = 36 - 30 = 6$

$D_1 = 16^2 - 15 \cdot 18 = \cancel{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9 = 2(2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 \cdot 9)}$

~~< 0 не сущ.~~

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times 18 \\ \hline 120 \\ 15 \\ \hline 270 \end{array}$$

$18 \cdot 3 =$
$= 9 \cdot 6$

$\frac{12}{10}$

$x = \frac{18 \pm 3\sqrt{6}}{18} =$

$1 +$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$2x^2 + (x+1)^2 - 4x - 4(x+1) + 3 = 0$

$6x^2 - 12x + 5 = 0.$

$2x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 4x - 4 + 3 = 0$

$4x - 2.$

$3x^2 - 6x = 0$

$2 + \frac{2\sqrt{6}}{3} - 2 - \frac{2\sqrt{6}}{6}$

$3x(x-2) = 0$ $\quad x = 0 \longrightarrow y = 1$
$\quad x = 2 \longrightarrow y = 3$

$\Rightarrow$

Проверка ОДЗ: $1 \geq 0$ (+) $\qquad 3 \geq 4$ (−)

$xy - 2x - y + 2 = -1 + 2 = 1 \geq 0$ (+)

Ответ: $x = 0$
$y = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

1

$b_1 = a$

$b_2 = b$

$b_3 = c$ — ?

$b_4 = x$ $\qquad ax^2 + 2bx + c = 0$

$b_2 = a \cdot q^1$

$b_3 = a \cdot q^2$

$b = aq$

$c = aq^2$

$x = aq^3$

$$a \cdot (aq^3)^2 + 2 \cdot aq \cdot aq^3 + aq^2 =$$

$$= a \cdot a^2 q^6 + 2a^2 q^4 + aq^2 = 0$$

$$a^3 q^6 + 2a^2 q^4 + aq^2 = 0 \quad \Big| : aq^2$$

$$a^2 q^4 + 2aq^2 + 1 = 0$$

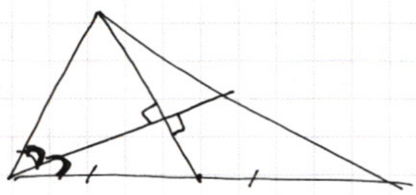
$$(aq^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow aq^2 = -1$$

$\boxed{c = -1}$ Ответ: -1

2

$P = 1200$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$



$a + b + c = 1200.$

3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy - 2x - y + 2 \geq 0$

$y - 2x \geq 0$

(1) $(y - 2x)^2 = xy - 2x - y + 2$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2 = 0$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

$4-1$
$2+1$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y^2-4yx+4x^2=xy-2x-y+2 \end{cases}$$

$y \geq 2x$

$xy-2x-y+2 \geq 0$

$\cancel{y^2}-4xy+4x^2-2x^2-\cancel{y^2}+4x+4y-3=xy-2x-y+2$

$-5y \quad +5x+x$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$x(2x-5y+5)-(-x-5y+5)=0$

$$\begin{cases} 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \\ y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0 \end{cases}$$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$5x+x$
$7x-x$
$4x+2x$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0$

$2\cdot 2$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)$

$2x^2-4x+2+y^2-4y+4-3$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$4x^2-4xy+y^2-xy+2x+y-2=0.$

$4x^2-5xy+y^2+2x+y-2=0$

$-2x^2-6x-5y+5+5xy=0.$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0.$

$\cancel{y^2-4y+5y+4}$

$y^2-4y+4+4x^2-4x+1-5xy+5y+6x-7=0$

$(y+2)^2+(2x-1)^2-5xy+5y+6x-7=0.$

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0.$

$D_1=4-2x^2+4x-3=$

$=-2x^2+4x+1$

$y=2\pm\sqrt{-2x^2+4x+1}$

$\underset{a}{2}x^2-\underset{b}{4}x+\underbrace{y^2-4y+3}_{c}=0$

$D_1=4-2(y^2-4y+3)=$

$=4-2y^2+8y-6=$

$=-2y^2+8y-2=-2(y^2+4y+1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4

⑥

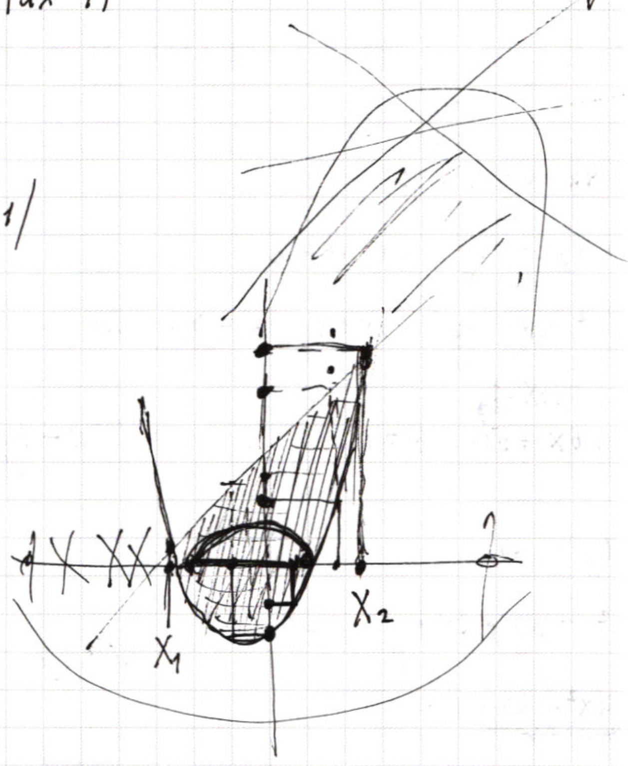
$(a;b)$ $\quad x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

~~$x \le a+b$~~

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax+b \\ x + |2x-1| \ge ax+b \end{cases}$

$2x^2 - x - 1 \le x + |2x-1|$



~~$x^2 \le ax$~~

$X_1 \le -\frac{1}{4}$

$X_2 \ge \frac{3}{2}$,

, где X_1 и X_2 – ~~корни~~ ~~$2x^2 - x - 1$~~

т. пересечения $2x^2 - x - 1$ и $ax+b$

$x + |2x-1|$

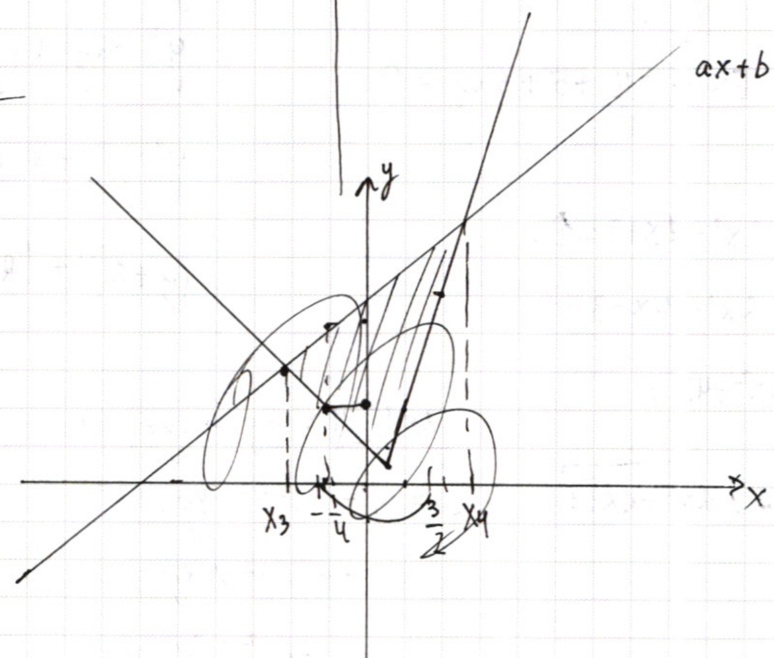
$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad$ 1: $x \ge \frac{1}{2}$:

$3x - 1$

x	1	2
y	2	5

$x < \frac{1}{2}$: $x - 2x + 1 = -x + 1$



$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$, $p \in$ простое

$(x;y) \in \mathbb{N}$

$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$f(x/y) < 0$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Rightarrow x \notin$ простому или y не простое.

пусть x — простое.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

$f(2) = 1$ $f(11) = 5$

$f(3) = 1$ $f(13) = 6$

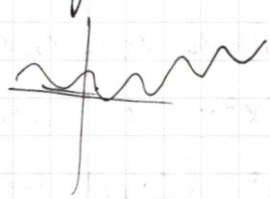
$f(5) = 2$ $f(17) = 8$

$f(7) = 3$ $f(19) = 9$

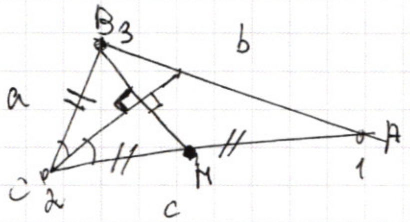
$f(1) = 1$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 3$
$f(7) = 3$
$f(8) = 4$
$f(9) = 4$

$f(x)$ — на мн. положительных рациональных чисел.

$f(x/y) < 0$



$P = 1200$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ нет.



2

$a + b + c = 1200$.

~~a =~~ $a = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$

$b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

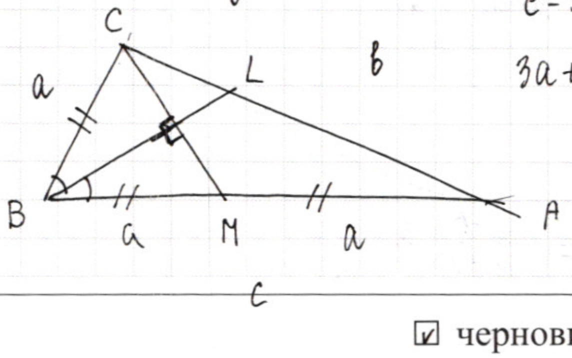
$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

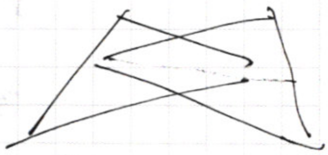
~~BM =~~ $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$

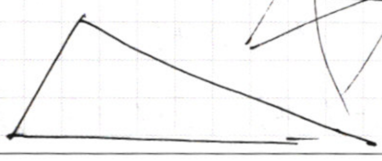
$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

$c = 2a$

$3a + b = 1200$







☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

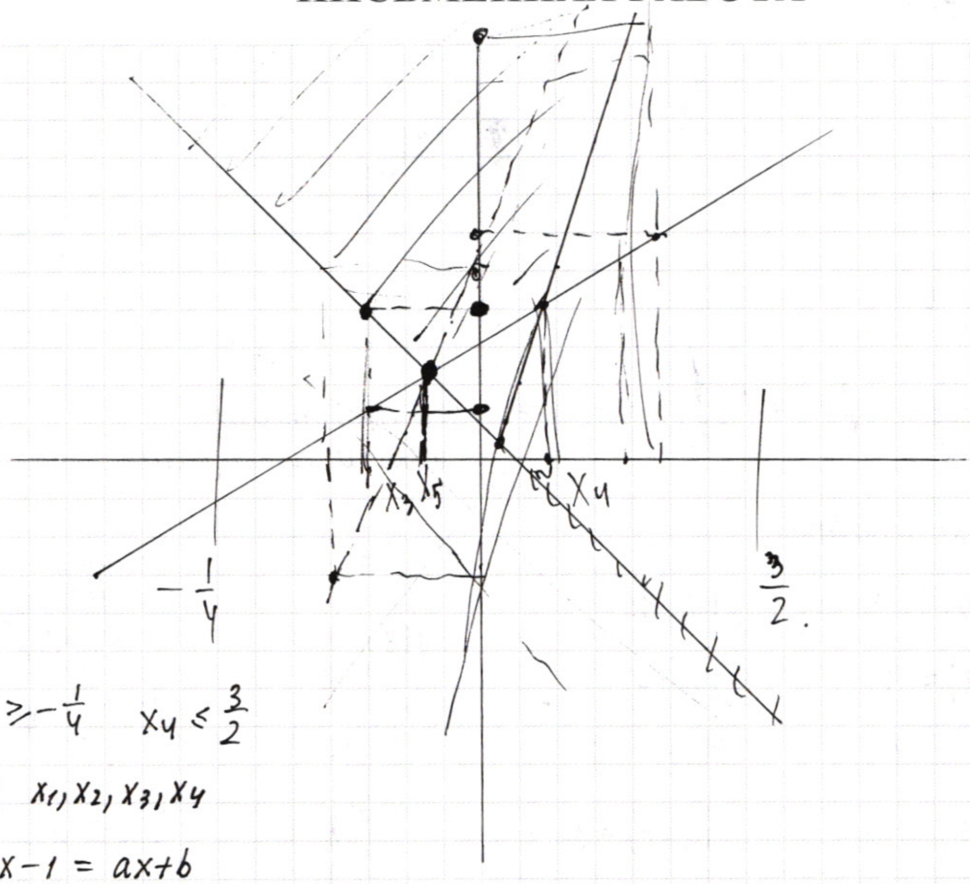
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$x_3 \geq -\frac{1}{4}$ $x_4 \leq \frac{3}{2}$

Найдем x_1, x_2, x_3, x_4

$2x^2 - x - 1 = ax + b$

$2x^2 - x(a+1) - 1 - b = 0$

$D = (a+1)^2 + 4 \cdot 2(b+1) = (a+1)^2 + 8(b+1)$

$x_{12} = \dfrac{a+1 \pm \sqrt{D}}{4}$

Найдем x_3 и x_4 $x + |2x-1| = ax+b$

1) $x \geq \frac{1}{2}$: $3x - 1 = ax + b$

$x(3-a) - 1 - b = 0$

$x_4(3-a) = b+1 \Rightarrow x_4 = \dfrac{b+1}{3-a} \leq \dfrac{3}{2}$

2) $x < \frac{1}{2}$: $x - 2x + 1 = ax + b$

$-x + 1 = ax + b$

$x(-1-a) = b - 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1-b}{a+1} \geq -\dfrac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)