МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

a, b, c, d

1) По свойству геом. прогрессии имеем:

$$ac=b^2 \Rightarrow a=\frac{b^2}{c} \quad (1)$$

$$bd=c^2 \Rightarrow d=\frac{c^2}{b} \quad (2)$$

2) Т.к d – корень уравнение $ax^2-2bx+c=0$, то:

$$ad^2 - 2bd+c=0$$

Подставив (1) и (2): $\frac{b^2}{c}\cdot\left(\frac{c^2}{b}\right)^2-2c^2+c=0$

$$c^3-2c^2+c=0$$

$$c(c^2-2c+1)=0$$

$$c(c-1)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$$

Если $c=0$, то из (1) и (2) $b=0$, а т.к $d=c\cdot q$, где q – знаменатель этой прогрессии, то $d=0$. Также, т.к $b=a\cdot q=0$, то либо $a=0$ (нулевая геом. прогрессия), либо $q=0$ (не геом. прогрессия согласно определению.

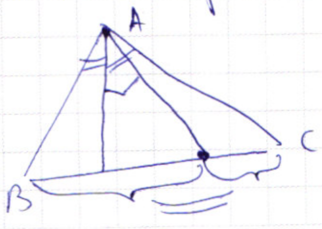
Ответ: $c=1$

$c=0$ (вырожденный случай, нулевая геометрическая прогрессия)

Задача 2

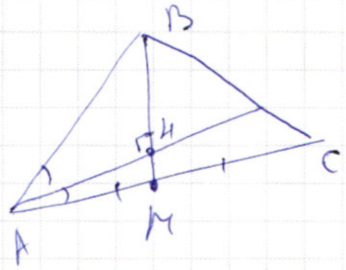
① Докажем некоторое свойство таких треугольников:

ⓐ



Тогда половина $\angle A$ хотя бы $90°$, т.е. $\angle A \geq 180°$, что невозможно.

(б)



AH - биссектрисса и высота в $\triangle ABM \Rightarrow$

$\Rightarrow AM = AB \Rightarrow \boxed{AB = \frac{AC}{2}}$

И обратно, если $2AB = AC$, то в $\triangle ABM$ $AB = AM$, и биссектрисса $AH \perp BM$. Осталось посчитать кол-во треугольников.

Пусть $AB = a$, тогда $AC = 2a$. Обозначим третью сторону $BC = x$.

$P = a + 2a + x = 3a + x = 900 \Rightarrow x = 900 - 3a$

Помимо этого, должно быть верно нер-во треугольника:

$3a > x \Rightarrow 3a - 1 \geq x$

$x + a > 2a \Rightarrow x \geq a + 1.$

в силу целочисленности сторон

Подставим $x = 900 - 3a$: (1) $900 - 3a \leq 3a - 1$

$6a \geq 901$

$a \geq \frac{901}{6} = 150 + \frac{1}{6} > 150 \Rightarrow$

$\underset{(a \in \mathbb{N})}{\Rightarrow} a \geq 151$

(2) $900 - 3a \geq a + 1$

$899 \geq 4a \Leftrightarrow a \leq \frac{899}{4} = 224 + \frac{3}{4} < 225 \underset{(a \in \mathbb{N})}{\Rightarrow} a \leq 224$

Тогда имеем: $a \in [151; 224] \Rightarrow 2a \in [302; 448]$

$900 - 3a \in [228; 447]$

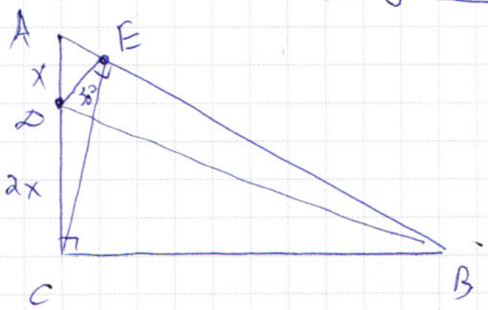
Треугольник однозначно задается тремя сторонами: $(a; 2a; 900-3a)$. Осталось проверить, что мы никакой треугольник не посчитали дважды. Действительно, пусть ~~у двух~~ при некотором a наборы $(a; 2a; 900-3a)$ совпали. Но множество значений a не пересекается с множествами значений $(2a)$ и $(900-3a)$, а значит у этих двух треугольников

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

совпал параметр a, ~~...~~ Осталось посчитать кол-во возможных значений a: $224 - 150 = 74$

Ответ: 74.

Задача 4

а) 

$tg\ \angle BAC$?

1. Заметим, что $\angle DEB = \angle DCB = 90^\circ \Rightarrow DEBC$ – вписанный.

Проведём BD.

$DEBC$ – вписанный $\Rightarrow \angle CED = \angle CBD = 30^\circ$.

Тогда в $\triangle BDC$: $BD = \frac{DC}{\sin\angle DBC} = \frac{2x}{\sin 30^\circ} = 4x$

По теореме Пифагора $BC^2 = BD^2 - DC^2 = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 2\sqrt{3}\cdot x$

$tg\ \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}\cdot x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) По теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 9x^2 + 12x^2 = 21x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{21}\cdot x$

$\triangle ADE \sim \triangle ACB$ ($\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A$ – общий) $\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$.

$\frac{AD}{AB} = \frac{x}{\sqrt{21}x} = \frac{1}{\sqrt{21}}$; $DE = \frac{BC}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{3}\cdot x}{\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt{7}}$

$AE = AC/\sqrt{21} = \frac{3x}{\sqrt{21}}$

$$S_{AED}=\frac{AE\cdot ED}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{\sqrt{21}}\cdot\frac{2x}{\sqrt{7}}=\frac{6x^2}{2\cdot 7\cdot\sqrt{3}}=\frac{3x^2}{7\sqrt{3}}$$

в $\triangle AEC$: $\frac{S_{CED}}{S_{AED}}=\frac{CD}{AD}=2$ (треугольники с общей высотой)

$$\Downarrow$$

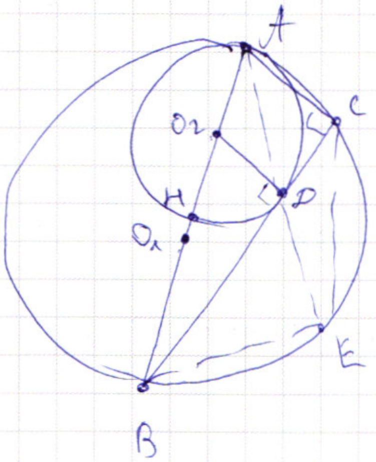
$$S_{CED}=2S_{AED}=\frac{6x^2}{7\sqrt{3}}$$

По условию $AC=3x=\sqrt{7}$: $S_{CED}=\frac{6\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2}{7\sqrt{3}}=\frac{6\cdot\frac{7}{9}}{7\sqrt{3}}=\frac{6\cdot 7}{9\cdot 7\cdot\sqrt{3}}=$

$=\frac{6}{9\sqrt{3}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

Задача 5



$CD=2$
$BD=3$.
R?
r?
S_{BACE}?

1) В силу касания окружностей, $O_2\in O_1A$.

Пусть радиус $\Omega=R$

радиус $w=r$

2) Т.к в Ω $\angle ACB$ опирается на диаметр AB, то $\angle ACB=90^\circ$

Т.к CD – касательная к w, то $\angle O_2DB=90^\circ$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow O_2D\parallel AC\Rightarrow\triangle BO_2D\sim\triangle BAC\Rightarrow\frac{BO_2}{BA}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{5}$.

В данном случае $BO_2=AB-AO_2=2R-r$, $BA=2R$, поэтому:

$10R-5r=6R\Rightarrow 4R=5r\Rightarrow\boxed{R=\frac{5}{4}r}$

3) Также применим теорему о секущей и касательной для w: $BD^2=BH\cdot BA$, где $H=AB\cap w$. $BH=AB-AH=2R-2r=$

$=\frac{5}{2}r-2r=\frac{1}{2}r$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

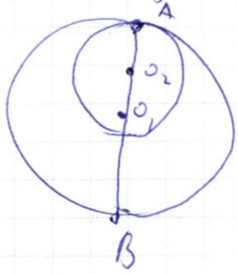
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $BD^2 = BH \cdot BA$: $\quad 9 = \frac{1}{2} r \cdot 2R = r \cdot R = r^2 \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{4 \cdot 9}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $R = \frac{5}{4} \cdot \frac{6\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Заметим, что если O_2 попало внутри ω, выкладки останутся теми же:



6) Теперь найдём S_{BACE}.

(а) Для начала найдём AC и AD из теоремы Пифагора:

$AC^2 = AB^2 - BC^2$; $(AB = 2R) \Rightarrow 9 \cdot 5 - 25 = 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 20 + 4 = 24 \Rightarrow AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

(б) Известный факт: произведение отрезков хорд одной окружности равны: $BD \cdot DC = AD \cdot DE$ (следует из $\triangle ABD \sim \triangle CDE$, т.к. $\angle BDA = \angle CDE$ как вертикальные, $\angle BAD = \angle DCE$ как опирающиеся на одну дугу). $DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{3 \cdot 2}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(в) Теперь вычислим S_{ACD} и S_{ABD}.

$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 2 = 2\sqrt{5}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5 = 5\sqrt{5}$; $S_{ABD} = S_{ABC} - S_{ACD} = 3\sqrt{5}$

⑦ $\frac{S_{BDE}}{S_{ABD}} = \frac{DE}{DA}$

$\frac{S_{CDE}}{S_{CDA}} = \frac{DE}{DA}$ } как треугольники с общей высотой.

$\frac{DE}{DA} = \frac{\sqrt{6}}{2 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{4}$. Тогда $S_{BDE} = \frac{1}{4} \cdot S_{ABD} = \frac{3}{4}\sqrt{5}$

$S_{CDE} = \frac{1}{4} \cdot S_{CDA} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

⑨ Итак, $S_{BACE} = S_{BAD} + S_{ACD} + S_{BDE} + S_{CDE} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} +$

$+ \frac{3}{4}\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}\left(5 + \frac{3}{4} + \frac{2}{4}\right) = \sqrt{5}\left(5 + \frac{5}{4}\right) = \frac{25}{4}\sqrt{5}$

Ответ: радиус $\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

радиус $w = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$S_{BACE} = \frac{25}{4}\sqrt{5}$

Задача 7

① Рассмотрим некоторое $y \in \mathbb{N}$. Заметим, что:

$$f(2) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(2) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)}$$

② Теперь для $x, y \in \mathbb{N}$:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

③ Осталось вычислить все $f(n)$ для $2 \le n \le 22$ и посчитать кол-во наборов, в которых $f(x) < f(y)$:

$f(2) = \left[\frac{2}{2}\right] = 1$ $\quad$ $f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$ $\quad$ $f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(3) = 1$ $\quad$ $f(6) = f(3) + f(2) = 2$ $\quad$ $f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$ $\quad$ $f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$ $\quad$ $f(10) = f(5) + f(2) = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$d(11) = \left[\frac{11}{2}\right] = 5$ $d(14) = d(2) + d(7) = 4$ $d(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$ $d(20) = d(2) + d(10) = 4$

$d(12) = d(3) + d(4) = 3$ $d(15) = d(3) + d(5) = 3$ $d(18) = d(9) + d(2) = 3$ $d(21) = d(3) + d(7) = 4$

$d(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$ $d(16) = d(4) \cdot 2 = 4$ $d(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$ $d(22) = d(2) + d(11) = 6$

n	2, 3	4, 5, 6, 9	7, 8, 10, 12, 15, 18	14, 16, 20, 21	11,	13, 22	17	19
$d(n)$	1	2	3	4	5	6	8	9

Итого 8 групп чисел. Будем следить за тем, у кого d меньше, т.е за x; тогда, закрепив x, мы можем выбрать любое число из старшей группы.

Итого: $19 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 =$

кол-во пар вида (2;a) (3;a)

(4;a) (5;a) (6;a) (9;a)

(7;a) (8;a) (10;a) (12;a) (15;a) (18;a)

(14;a) (16;a) (20;a) (21;a)

(11;a)

(13;a) (22;a)

(17;19)

$= 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 98 + 74 + 9 = 172 + 9 = 181$

Ответ: 181

Задача 6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

~~Изобразим примерный график правой и левой части.~~

Слева: $f(x) = 8x - 6|2x-1| = \begin{cases} -4x + 6, & x \ge \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$

Справа: парабола с точками $(0;7)$ $(1;5)$; $\left(\frac{1}{2};8\right)$; $\left(-\frac{1}{2};2\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Подставим некоторые x:

ⓐ $x = -\frac{1}{2}$: $\underset{-16}{\underbrace{-4 \cdot 6 \cdot 2}} \le -\frac{a}{2} + b \le 2$

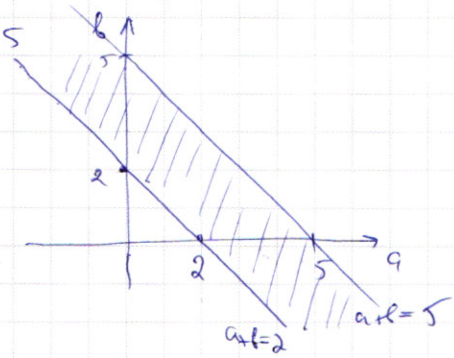
ⓑ $x = \frac{1}{2}$: $4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$

ⓒ $x = 1$: $2 \le a + b \le 5$.

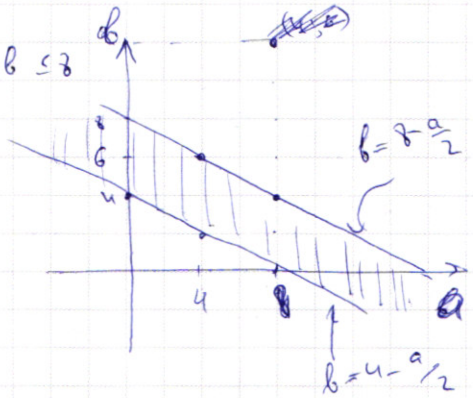
Получим систему неравенств относ. a и b: $\begin{cases} 2 \le a+b \le 5 \\ 4 \le \frac{a}{2} + b \le 8 \\ -16 \le -\frac{a}{2} + b \le 2 \end{cases}$

Решим её графически:

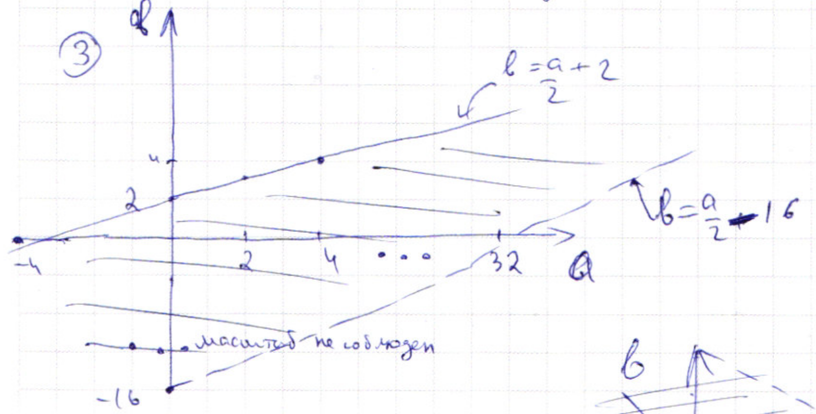
① $2 \le a + b \le 5$



② $4 \le \frac{a}{2} + b \le 8$



③



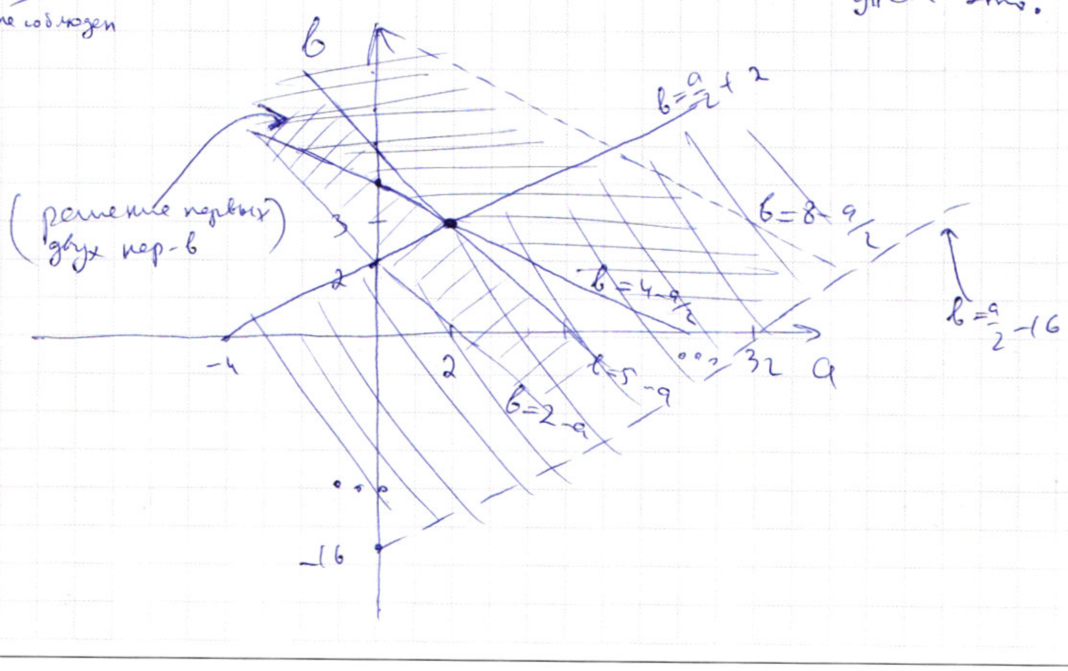
Заметим, что графики:

$b = 5 - a$

$b = 4 - \frac{a}{2}$ проходят через

$b = \frac{a}{2} + 2$ точку $(2; 3)$

учтём это.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Как хорошо видно из графика, единственным решением системы является точка (2; 3)! Проверим её;

1) $2x+3 \le -8x^2+6x+7$

$8x^2-4x-4 \le 0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1 \le 0 \Leftrightarrow 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) \le 0$

$D = 1+4\cdot 2\cdot 1 = 9$

$x_{1,2} = \frac{1\pm 3}{4} = \left[\begin{matrix}1\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$

$-\frac{1}{2}$ 1 x

нер-во верно для всех $x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

2) $8x-6|2x-1| \le 2x+3$

ⓐ $x \ge \frac{1}{2}$: $-4x+6 \le 2x+3$

$6x \ge 3$

$x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow$ верно для $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$

ⓑ $x \le \frac{1}{2}$: $20x-6 \le 2x+3$

$18x \le 9 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2} \Rightarrow$ верно для $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

$\Rightarrow$ верно для всех нужных x

Ответ: (2; 3)

Задача 3

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \Leftrightarrow (x-6)^2-36+2(y-1)^2-2+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

. Замена: $x-6=m$, $y-1=n$

$$\begin{cases} m-6n = \sqrt{mn} \\ m^2+2n^2=18 \end{cases} \xLeftrightarrow{m \ge 6n} \begin{cases} m^2+36n^2-12mn = mn \\ m^2+2n^2=18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2-13nm+36n^2=0 \ (1) \\ m^2+2n^2=18 \ (2) \end{cases}$$

$m^2-13nm+36n^2 = (m-9n)(m-4n) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m=9n \\ m=4n \end{matrix}\right.$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Подставим в (2): $81n^2+2n^2=18 \Leftrightarrow n^2=\frac{18}{83}$~~

~~Откуда две пары (m,n): $\left(9\cdot\frac{18}{83};\frac{18}{83}\right)\left(-9\frac{18}{83};-\frac{18}{83}\right)$~~

~~Но во вт. Но вторая~~ па

$9n \geq 6n \Leftrightarrow n \geq 0$.

$4n \geq 6n \Leftrightarrow n \leq 0$.

(а) При $m=9n$: $81n^2+2n^2=18 \Leftrightarrow n^2=\frac{18}{83} \overset{n\geq 0}{\Rightarrow} \boxed{n=\sqrt{\frac{18}{83}}}$

(б) При $m=4n$: $\cancel{16n^2+18n^2}$

$16n^2+2n^2=18n^2=18 \Rightarrow n^2=1 \overset{n\leq 0}{\Rightarrow} \boxed{n=-1}$

Отсюда две пары: $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}};\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$ и $(-4;-1)$

Обратная замена: (1) $\left.\begin{array}{l} x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$

$\left(\sqrt{\frac{18}{83}}=3\sqrt{\frac{2}{83}}\right)$

(2) $\left.\begin{array}{l} x-6=-4 \\ y-1=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$

Ответ: $(2;0)$; $\left(27\cdot\sqrt{\frac{2}{83}}+6;\ 3\sqrt{\frac{2}{83}}+1\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c, d $bd = c^2$

корень $ax^2 - 2bx + c = 0$

$ac = b^2$

$ad^2 - 2bd + c = 0$

$ad^2 - 2c^2 + c = 0$

$\frac{b^2}{c} d^2 - 2c^2 + c = 0$

$\frac{b^2}{c} \cdot \frac{c^4}{b^2}$ $\boxed{c^3 - 2c^2 + c = 0}$

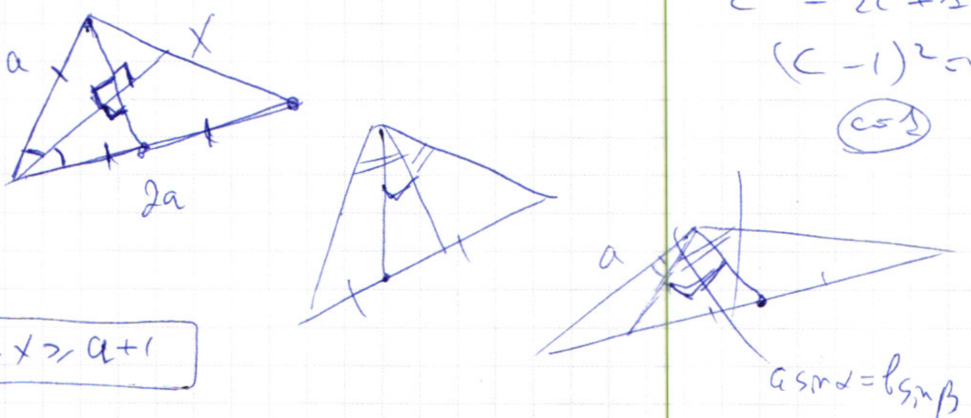
$c = 0$

$c^2 - 2c + 1 = 0$

$(c-1)^2 = 0$

$c = 1$

№2 $P = 900$



$a + x > 2a$

$3a > x > a$

$\boxed{3a - 1 \geq x \geq a + 1}$

$a \sin\alpha = b \sin\beta$

$3a + x = 900$

$x = 900 - 3a$

$900 - 3a \geq a + 1$

$899 \geq 4a$

$a \leq \frac{899}{4} = 224$

$900 - 3a \leq 3a - 1$

$6a \geq 901$

$a \geq 150$

$a \in [150; 224]$

$50 + 24 = 74$

$[450; 228]$

$(a; 2a; 900 - 3a)$

$[150; 224]$ $[300; 448]$

$3 \cdot 224 = 672$

$900 - 672 = 228$

№3 $\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$

$y(x-6) - (x-6) = (x-6)(y-1)$

$x - 6y = (x-6) - 6(y-1)$

$(x-6)^2 - 36 + 2(y-1)^2 - 2 + 20 = 0$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$ $\Rightarrow (x-6)^2 = 2(3-y+1)(3+y-1) = 2(4-y)(y+2)$

☑ черновик ☐ чистовик

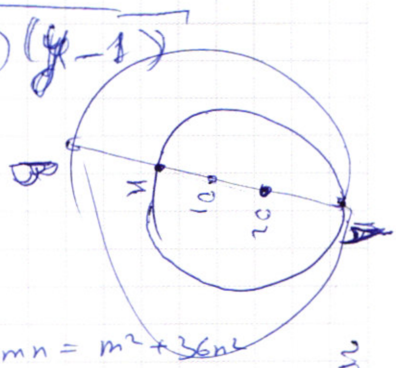
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-6)^2 + 36(y-1)^2 - 12(x-6)(y+1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$18 + 34(y-1)^2 - 12(x-6)(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$



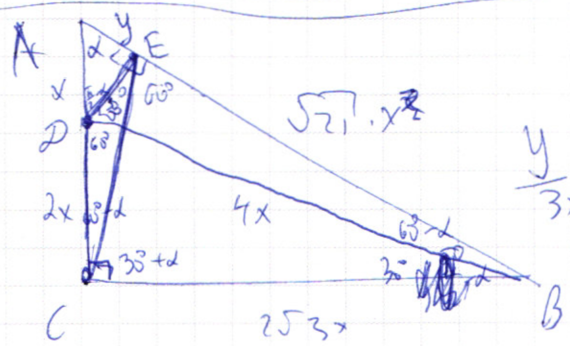
$\begin{cases} m-6n = \sqrt{mn} \\ m^2+2n^2=18 \end{cases}$ $\quad m^2 - 12nm + 36n^2 = mn$

$13mn = m^2 + 36n^2$

$34n^2 = 13mn - 18$

$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$ $\quad \sqrt{(x-6)(y-1)} = x-6y$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$



$\operatorname{tg}\angle BAC?$

$\frac{y}{3x} = \frac{x}{AB}$ $\quad AB = \frac{3x^2}{y}$

$\sqrt{16x^2-4x^2} = \sqrt{12}\,x = 2\sqrt{3}\,x$

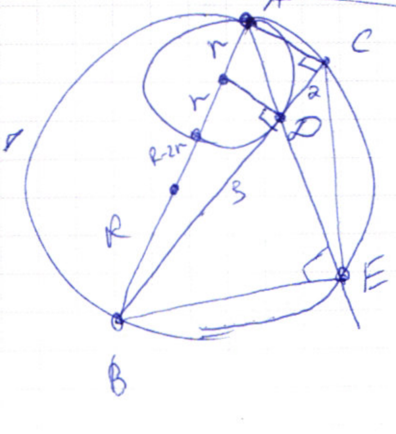
$\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}\,x}{3x} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$3x = \sqrt{7}$

$AB^2 = 9x^2 + 12x^2 = 21x^2$

$\frac{x}{\sqrt{21}\,x} = \frac{DE}{2\sqrt{3}\,x}$ $\quad \frac{2\sqrt{3}\,x}{\sqrt{21}} = DE$

№5



$R_1, R_2, S_{BACE}?$

$CD = 2$

$BD = 3$

$\frac{c}{\sin\alpha} = 2R$

$(2R-2r)2R = 9$ $\quad S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{abc}{2R} = \frac{abc}{4R}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{5}$ $\quad 6R = 10R - 5r$

$4R = 5r$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$ $\quad \forall x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$\frac{1}{2}$

$x=0$: $\boxed{-6 \le b \le 7}$ $\quad 6 \ge -b \ge -7$

$4 \le \frac{a}{2} + b \le -2+3+7 = 8$ $\quad -8+6+7 = 5$

$-3 \le \frac{a}{2} \le 14$ $\quad 8 - 6 \cdot 1 = 2$

$-6 \le a \le 28$ $\quad 2 \le a + b \le 5$

$-5 \le a \le 11$

№7 $f(x)$; $\quad D(f) = \mathbb{Q}(>0)$ $\quad 900 - 453 = 447$

$\forall a, b$; $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad 900 - 672 = 228$

$f(p) = [p/2]$ $\quad (\forall p)$

$(x; y)$?: $\quad 2 \le x \le 22$, $\quad 2 \le y \le 22$

$f(x/y) < 0$

$A \in \mathbb{N}$; $f(A) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) > 0$.

$A = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

$\frac{x}{y} \notin \mathbb{N}$

$f(\frac{2y}{y}) = f(2y) + f(\frac{1}{y}) = f(2) + f(y) + f(\frac{1}{y}) =$

1 $\quad = ?$

$\boxed{f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0}$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$\boxed{f(x) < f(y)}$

$f(2) = 1$; $\quad f(6) = 2$ $\quad f(14) = 4$ $\quad f(18) = 3$

$f(3) = 1$ $\quad f(7) = 3$ $\quad f(10) = 3$ $\quad f(15) = 3$ $\quad f(19) = 9$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$ $\quad f(8) = 3$ $\quad f(11) = 5$ $\quad f(16) = 4$ $\quad f(20) = 4$

$f(5) = 2$ $\quad f(9) = 2$ $\quad f(12) = 3$ $\quad f(17) = 8$ $\quad f(21) = 4$

$f(13) = 6$ $\quad f(22) = 6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$ $\quad \frac{-6}{-16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ $\quad -8\cdot\frac{1}{4} - 3 + 7 = 2$

$-(8x^2 - 6x - 7)$

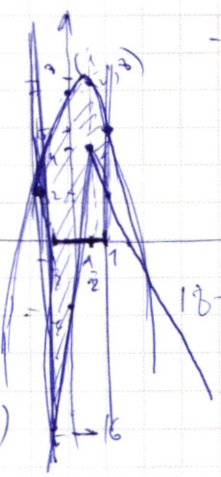
$8x - 6(2x-1) = -4x + 6, \; x \ge \frac{1}{2}$ $\quad 9 + 7\cdot 8 = 65$ $\quad -8\cdot\frac{1}{4} + 3 + 7 = 8$

$8x + 6(2x-1) = 20x - 6, \; x \le \frac{1}{2}$

$x + y - 7$

$A = (x-6) + (y-1)$

$A^2 = (x-6)^2 + (y-1)^2 + 2(x-6)(y-1) =$



$18 - (y-1)^2 + 2(x-6y)^2 =$

$y = 2(x-1) + 5 = 2x + 3$

$= 18 - (y-1)^2 + 2(x-6y)^2$

$+ 2(x-6)(y-1)$

$= 18 - y^2 + 2y - 1 +$

$+ 2x^2 + 72y^2 - 24y$

$ax + b = 20x - 6$ $\quad 18 - (y-1)((y-1) - 2(x-6))$

$(a-20)x + b + 6 = 0$ $\quad x = \frac{-b-6}{a-20} \notin \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

$\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ $\Rightarrow y = 2x + 3$

$(1; 5)$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$-16 \le -\frac{a}{2} + b \le 2$

$2 \le a + b \le 5$ $\quad \Rightarrow -5 \le -a - b \le -2 \Rightarrow -21 \le -\frac{3}{2}a \le 0$

$18 - (y-1)^2 + 2(x-6y)^2 = (x + y - 7)^2$

$\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$0 \le \frac{3}{2}a \le 21$

$-32 \le -a + 2b \le 4$

$2 \le a + b \le 5$ $\quad \Rightarrow 3b \le 9$ $\quad \boxed{0 \le a \le 14}$

$0 \le \frac{a}{2} \le 7$

$\boxed{-10 \le b \le 3}$

$-3 \le -b \le 10$ $\quad \boxed{-20 \le a - 20 \le -6}$

$\boxed{-9 \le -b - 6 \le 4}$

$\frac{4}{-20} = -\frac{1}{5}$

$\frac{-9}{-6} = -\frac{3}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{b+6}{a-20} \le -\frac{1}{2} \\ \frac{b+6}{a-20} \ge \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$(x-6)^2 = 2(4-y)(2+y)$

$m - 6n = \sqrt{mn}$ $\quad 4 \le \frac{a}{2} + b \le 7$

$m^2 + 2n^2 = 18$

$-10 \le \frac{a}{2} + b \le 10$

$\begin{cases} 2 \le a + b \le 5 \\ 4 \le \frac{a}{2} + b \le 8 \\ -16 \le -\frac{a}{2} + b \le 2 \end{cases}$

$\begin{cases} m^2 + 2n^2 = 18 \\ m^2 + 36n^2 - 13mn = 0 \end{cases}$

$\cancel{D = 13^2 \ldots}$

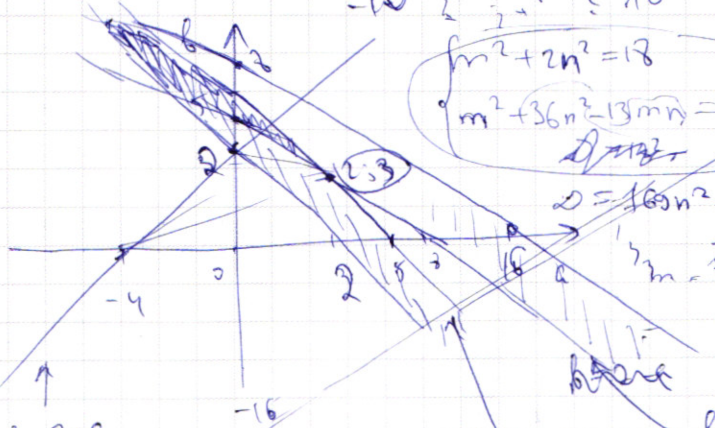
тогда

$D = 169n^2 - 4\cdot 36n^2 = 25n^2$

$m = \frac{13n \pm 5n}{2} = \left[\begin{array}{l} 9n \\ 4n \end{array}\right.$

$\frac{a}{2} + b = 8$

$b = 8 - \frac{a}{2}$



$b = 2 + \frac{a}{2}$ $\quad b = 5 - a$ $\quad b = 4 - \frac{a}{2}$

$81n^2 + 2n^2 = 18$

$83n^2 = 18$ $\quad n^2 = \frac{18}{83}$

$5 - a = 4 - \frac{a}{2}$ $\quad 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$4; 6$

$m - 6n = \sqrt{mn}$ $\quad m^2 + 36n^2 - 13mn = 0$

$m^2 + 2n^2 = 18$ $\quad 18 + 34n^2 - 13mn = 0$ $\quad m = \frac{34n^2 + 18}{13n}$

$(m + \sqrt{2}n)^2 - 2\sqrt{2}mn = 18$ $\quad 34n^2 - 13mn + 18 = 0$ $\quad 8 - \frac{a}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)