# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

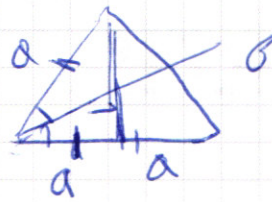
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$P = 3a + b = 1200$ $\quad b \neq a.$ $\quad b > a$ $\quad 3a > b.$

$a < 300$



$4b > 1200$ $\qquad b < 600$ $\qquad 2a < a + b$

$6a > 1200$ $\qquad \boxed{b > a}$

$\cancel{200} < a < 300$

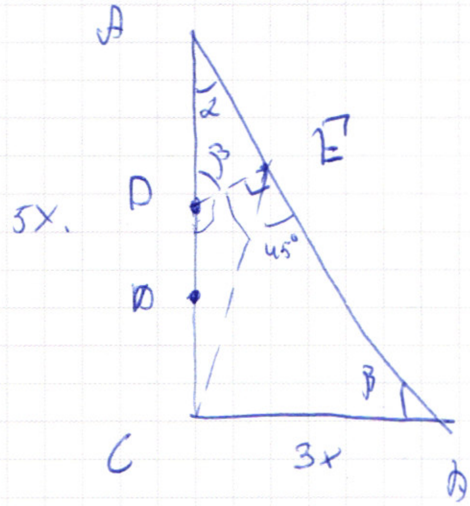
$300 < b < 600$

Отв: 99

№ 4

$tg\,\alpha - ?$ $\quad \angle CED = 45°$

$S_{CED}$ $\quad S_{tg\,\angle AC} = \sqrt{29}$



$\frac{CE}{\sin\beta} = \frac{CB}{\sin 45°} = \frac{CD}{\sin 45} \Rightarrow CB = CD$

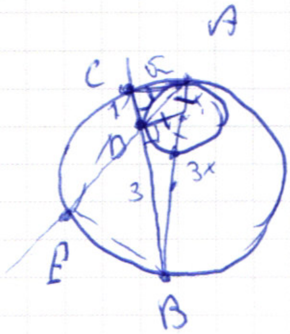
$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

$DC = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

№ 5

$r, R - ?$

$S_{BDEE}$, $\quad CD = 1$; $BD = 3$



$(2R - 2r)\,2R = 3^2$

$\frac{2R - r}{r} = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $r = \frac{R}{2}$ $\qquad 2R^2 = 3^2 \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$ ; $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$-\frac{5}{\cancel{10}} = -\frac{a}{4} + b$ $\qquad \frac{3}{4}a = \frac{9}{8}.$ $\qquad 18 - 16 = 2$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{2} + b.$ $\qquad a = \frac{3}{2}$ ; $b = \frac{1}{4},$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$f(7\cdot 3) = 1+\cancel{1}=2$

$f(3\cdot 5) = 1+2=3$

$f(10) = 2+1=3$

$f(x) = f(\frac{x}{y})+f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y) < 0$

$f(4)=2f(2)$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(3)=1$

$f(7)=7f(2)=2$

$f(5)=2$

$f(6)=2$

$f(7) = 3$

$f(8)=3f(2)=3$

$f(9)=2f(3)=2$

$f(10)=3$

$f(11)=5$

$f(12)=2f(2)+f(3)=1+2=3$

$f(13)=6$

$f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(15)=1+2=3$

1, 2, 3, 4, 5,

$\left[\begin{array}{l} -\frac{5}{4} = a\frac{1}{4}+b. \\ \frac{1}{2} = \frac{a}{2}+b \end{array}\right.$

$a=\frac{7}{3}$

$\frac{3}{4}a = \frac{2}{4}+\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$

$b = \frac{1}{2}-\frac{7}{3\cdot 2} =$

$= \frac{3}{6}-\frac{7}{6} = f(1) = f(x)-f(x)=0$

$= -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$

$f(x) < f(y)$

$y = \frac{7}{3}x-\frac{2}{3}$

$\frac{7}{2}-\frac{2}{3}=$

$=\frac{21-4}{6}=$

$f(16)=4f(2)=4$

$f(17)=8$

$f(18)=2f(3)+f(2)=$

$=3.$

$f(19)=9$

$f(20)=f(10)+f(2)=$

$=1+3=4$

$f(21)=f(3)+f(7)=4$

20+

+18+14+

+9+4+3+2+1=

$=\underline{70}$

0: 1

1: 2

2: 4

3: 6

4: 4

5: 1

6: 1

8: 1

9: 1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

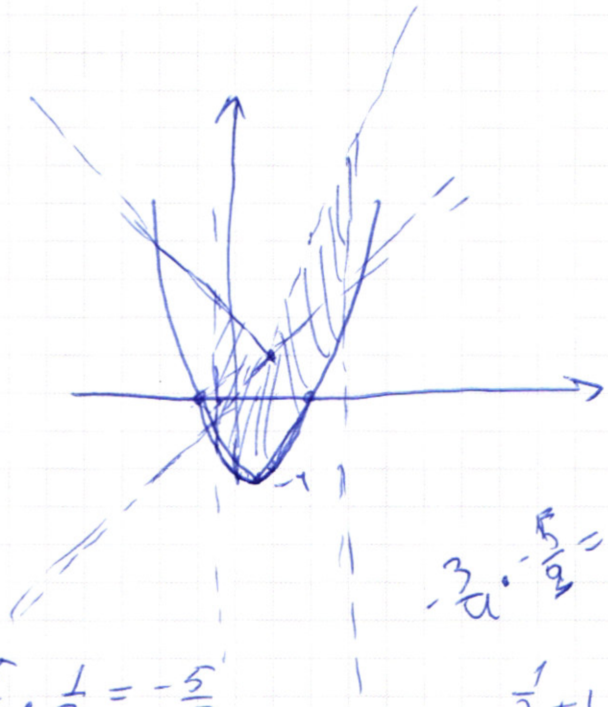
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1= \ = -\frac{9}{8}$ №6.

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6}{2}+1\right)=2 \quad (=4)$$

$$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1) \le ax+b \le x+|2x-1|$$



$$\frac{1}{2} \ge a\frac{1}{4}+b \qquad \frac{a}{2}+b \ge -1$$

$$-\frac{5}{8} \le -\frac{a}{4}+b \le \frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{2} \ge \frac{3}{2}a+b \ge 2$$

$$1 \ge b \ge -1$$

$$-\frac{3}{a}\cdot -\frac{5}{8}=$$

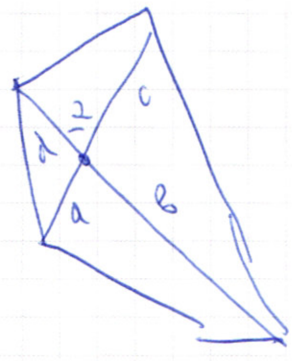
$$-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

$$-\frac{9}{8}$$

$$\frac{1}{2}\sin\alpha(ab+dc+cb+ad)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\,(a(b+d)+c(b+d))$$



$$3=+y \quad ;\cancel{(x+y)}x$$

$$\frac{5}{4} \ge -\frac{a}{4}+b \ge -\frac{5}{8} \qquad 3 \ge 2b \ge -\frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{2} \ge \frac{a}{2}+b \ge -1 \qquad 1 \ge 4b \ge -\frac{9}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \le -\frac{a}{2}-b \le 1$$

$$\frac{7}{2} \ge \frac{3}{2}a+b \ge \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}^{=2} \le -2b \le \frac{9}{2}$$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$$-1 \ge b \ge -\frac{9}{4}$$

$$\frac{15}{2}+\frac{7}{2}= \\ =11$$

$$-\frac{15}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{9}{4}.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b^2 = ac$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = -\frac{b}{a}$

$c^2 = b \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{a} =$

$a, b, \underline{c}, x$

$= -c$

$c(c+1) = 0 \iff \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=-1 \end{array}\right.$

---

№3

$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

$ab \geq 0$
$b - 2a \geq 0$

$2x^2 - 4x + (y^2 - 2)^2 - 1 = 0$

$y(x - 1) - 2(x-1) = (y-2)(x-1)$

$a = x - 1 \quad ; b = y - 2$

$y - 2 - 2(x-1) =$
$= y - 2x.$

$\begin{cases} 2a^2 + b^2 - 3 = 0 \\ b - 2a = \sqrt{ab} \end{cases}$

$\frac{3}{2}a \; \frac{1}{2} + b = \frac{1}{2}$

$= b = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$

$b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$

$a = \left[\begin{array}{l} +1 \\ -1 \end{array}\right.$

$b^2 - 5ab + 4a^2 = 0$

$\cancel{9a^2 - 5ab + 3c}$

$b = \cancel{2a^2 \; 2b}$

$b = 4a \; ; \; b = a.$

$\left[\begin{array}{l} 3a^2 = 3 \\ a = \pm\sqrt{6} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $f(a_i) = 5$, то есть 3 аргумента $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$.

Если $f(a_i) = 6$, то есть 2 аргумента $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$

Если $f(a_i) = 8$, то есть 1 аргумент $b_i$ при котором $f(a_i) < f(b_i)$

Если $f(a_i) = 9$, то нет аргументов $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$

Т.е всего пар $(x, y)$ при которых $f(x) < f(y)$

$20 + 18 + 14 + 8 + 4 + 3 + 2 + 1 = 10 + 20 + 26 + 14 =$
$= 70.$

Ответ: 70.

№8.

Построим графики $\begin{cases} y = 2x^2 - x - 1 \\ y \cancel{\leq 2x} \; x + 12x - 1) \end{cases}$ на

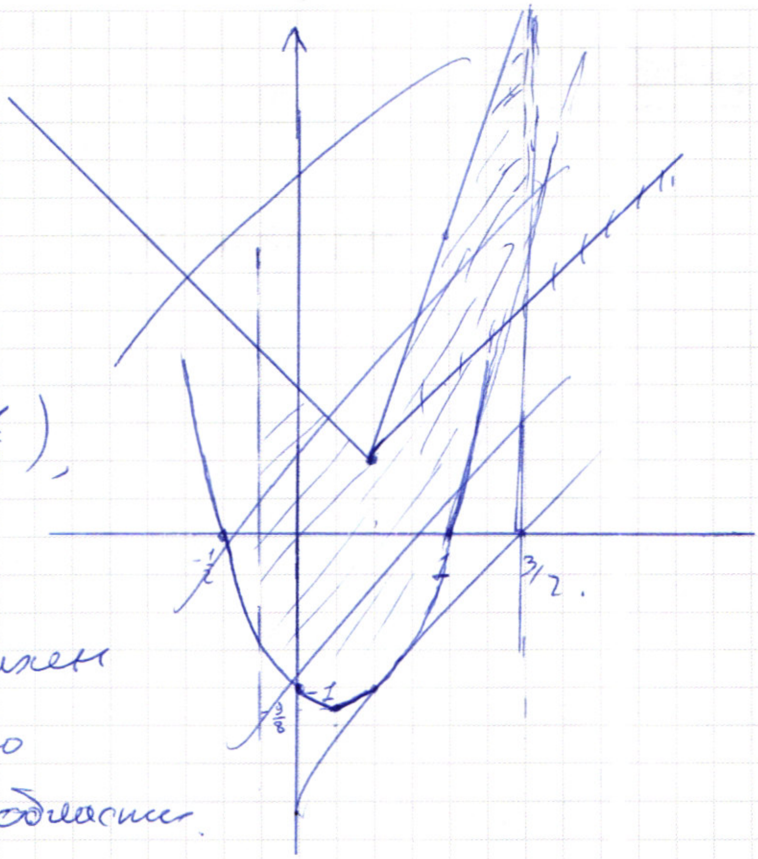
промежутке $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

$\Gamma y = 2x^2 - x - 1$ – парабола ветвями вверх пересекает $OX$ в точках $(-\frac{1}{2}; 0)$, $(1; 0)$, пересекает $OY$ в точке $(0; -1)$ проходит через точки $(\frac{3}{2}; 2)$, $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Gamma_{y=x+|2x-1|} \Leftrightarrow$

$$\Gamma_y = \begin{cases} 3x-1, & x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x, & x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$




Характерные точки:

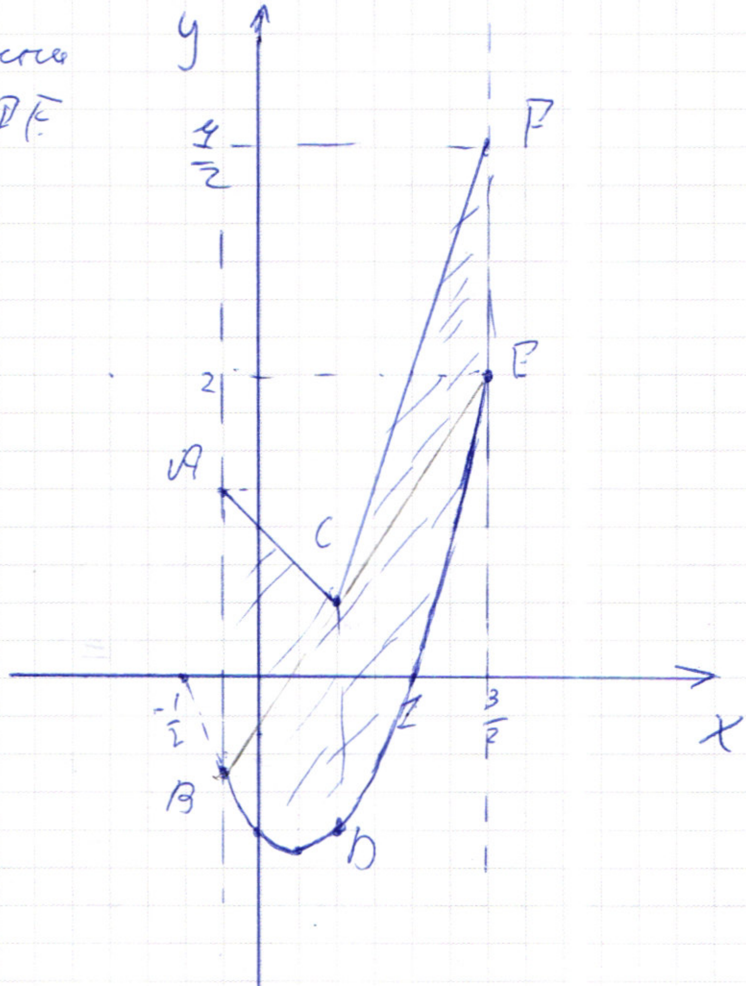
$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4}\right)$

Участок $\Gamma_{y=ax+b}$ должен на $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ находиться полностью в заштрихованной области.

~~точки пр~~ прямая $\Gamma_{y=ax+b}$ должна пересекать $AB$, $CD$, $PF$

т.е.

$$\begin{cases} \frac{5}{4} \geq -\frac{a}{2} + b \geq -\frac{5}{8} \\ \frac{1}{2} \geq \frac{a}{2} + b \geq -1 \\ \frac{7}{2} \geq \frac{3}{2}a + b \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$




Из которых следует.

$a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

причём это единственная ~~когда~~ ~~от~~ пара $a$ и $b$.

Ответ: ~~$(a, b)$~~.

$\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

~~Для~~ $f$

$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$ , ~~$x, y \in Q$, $y, x \neq 0$.~~

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$. $x, y \in Q$, $x, y > 0$.

~~Для выполнения условия $f(\frac{x}{y}) < 0$ нужно $\Leftrightarrow$~~

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Найдем значение $f$ при аргументах $a_i$ из множества чисел, где $1 \le a_i \le 21$, $a_i \in N$

$f(1) = f(2) - f(2) = 0.$

$f(2) = [\frac{2}{2}] = 1$

$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$

$f(4) = f(2) + f(2) = 2f(2) = 2$

$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 1+1 = 2$

$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$

$f(8) = f(2) + f(4) = 3f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 2+1 = 3$

$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$

$f(12) = f(4) + f(3) = 2f(2) + f(3) = 3$

$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$

$f(14) = f(2) + f(7) = 3+1 = 4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(2) + f(8) = 4$

$f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$

$f(18) = 2f(3) + f(2) = 3$

$f(19) = \left[\frac{19}{2}\right] = 9$

$f(20) = f(2) + f(10) = 3+1=4$

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$

$f(a_i) = 0$ — 1 шт.

$f(a_i) = 1$ — 2 шт

$f(a_i) = 2$ — 4 шт

$f(a_i) = 3$ — 6 шт

$f(a_i) = 4$ — 4 шт.

$f(a_i) = 6$ — 1 шт.

$f(a_i) = 8$ — 1 шт.

$f(a_i) = 9$ — 1 шт.

$f(a_i) = 5$ — 1 шт.

Остальные значение вообще не достигается при $1 \le a_i \le 21$, $a_i \in \mathbb{N}$.

Если $f(a_i) = 0$, то есть 20 аргументов $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$,

Если $f(a_i) = 1$, то есть 18 аргументов $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$,

Если $f(a_i) = 2$, то есть 14 аргументов $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$,

Если $f(a_i) = 3$, то есть 8 аргументов $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$

Если $f(a_i) = 21$, то есть 4 аргумента $b_i$ при которых $f(a_i) < f(b_i)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

BA – секущая ω, BD – касательная к ω, тогда.

$AB \cdot BF = BD^2$

$AB = 2R$, $BF = AB - AF = 2(R-r)$

$4R(R-r) = 3^2$

$O_\omega D \perp BD$, т.к. BD касательная

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. $\angle ACB$ – опирается на диаметр

$\triangle ABC \sim \triangle O_\omega BD$ (т.к. $\angle ACO = \angle O_\omega DB = 90^\circ$, $\angle B$ – общий)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{O_\omega B}{AB}$$

$$\frac{O_\omega B}{AB} = \frac{3}{4}; \quad O_\omega B = 2R - r$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2R - r = R\frac{3}{2} \Leftrightarrow r = \frac{R}{2}$$

тогда $4R\left(R - R/2\right) = 3^2$

$$\frac{R^2}{2} = 3^2 \Leftrightarrow R = 3\sqrt{2}; \quad r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

~~$\triangle ACD$ – прямоугольный, $\cos ADC = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{3\sqrt{2}/2}$~~

~~$= \frac{\sqrt{2}}{3}$, тогда $\sin ADC = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$~~

Пусть $\angle DO_\omega D = \alpha$; $\triangle DO_\omega B$ – прямоугольный.

$$\cos\alpha = \frac{DO_\omega}{BO_\omega} = \frac{r}{2R-r} = \frac{R/2}{2R - \frac{R}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\cos DO_\omega A = -\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Теорема косинусов для $\triangle DO_ш B$:

$AD^2 = DO_ш^2 + AO_ш^2 + 2\cos\alpha\, DO_ш * AO_ш \Leftarrow$

$* \; AD = r\sqrt{2+2\cos\alpha} = r\sqrt{2+\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{5}{3}}r =$

$= \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

по св-ву пересекающихся хорд $BC$ и $AE$ в $\Omega$

$AD \cdot DE = CD \cdot DB = 3$.

$ED = \frac{3}{\frac{\sqrt{30}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$

$\angle CDA = 90° - \angle ADO$; $\angle ADO = \frac{\alpha}{2}$ (т.к $AO_шD$-равнобедр внешний угол $\angle DO_ш B = \alpha$),

тогда $\angle CDA = 90 - \frac{\alpha}{2}$.

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} =$ для $\alpha \in (0; 180°)$

$= \sqrt{\frac{4/3}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

в 4-х угольник $BACE$ $S_{BACE} = AE \cdot BC \cdot \sin(DA)\frac{1}{2} =$

$= 4 \cdot \sqrt{30}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{7}{10} =$

$= \frac{7\sqrt{20}}{5}$

Ответ: $3\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{7\sqrt{20}}{5}$.

$CE = -\frac{3\sqrt{2}}{5} \pm \frac{\sqrt{98}}{5}$, $CE > 0 \Rightarrow$

$CE = \frac{-3\sqrt{2} + \sqrt{98}}{5} = \frac{\sqrt{98} - 3\sqrt{2}}{5}$

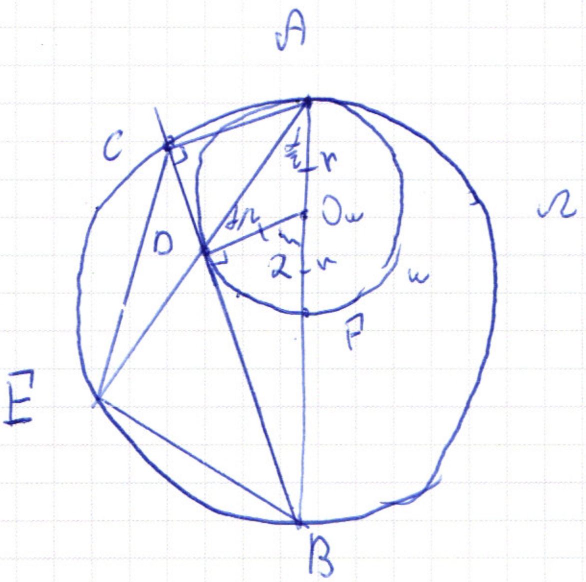
$S_{CED} = \frac{1}{2} \sin 45^\circ \cdot CE \cdot DE = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{98} - 3\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{6}{5} =$

$= \frac{14 - 6}{25 \cdot 4} 6 = \frac{12}{25}$

Ответ: $\frac{2}{5}$; $\frac{12}{25}$.

№5

Дано:




Окружности $\Omega, \omega$ касаются в точке $A$.
(внутренне)
$AB$ – диаметр $\Omega$
$BC$ касается $\omega$ в точке $D$
Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в $E$
$R$ - радиус $\Omega$
$r$ - радиус $\omega$
$R > r$
$CD = 1$, $BD = 3$.

Найти:

$R, r, S_{BACE}$

Решение:

$O_\omega$ - центр $\omega$, $O_\Omega$ - центр $\Omega$

$\left.\begin{array}{l} A, O_\omega, O_\Omega \text{ - лежат на одной прямой} \\ A, O_\Omega \in AB \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_\omega \in AB$, тогда $AB \cap \omega = P$, $AP$ - диаметр

☐ черновик ☑ чистовик Страница №5
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CEB = 90^\circ - \angle DEC = 45^\circ$.

Теорема синусов для $\triangle CEB$: $\frac{CE}{\sin\beta} = \frac{CB}{\sin 45^\circ}$

$\frac{CE}{\sin(180-\beta)} = \frac{CE}{\sin\beta}$, т.е. $\frac{CB}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 45}$ $\Leftrightarrow$ $CB = CD$.

$tg BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{CD}{AC} = \frac{AC-AD}{AC} = 1 - \frac{AD}{AC} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

$AC = \sqrt{29}$, тогда $BC = tg BAC \cdot AC = \frac{2}{5}\sqrt{29}$, $AD = \frac{3}{5}AC = \frac{3}{5}\sqrt{29}$

по теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB = \sqrt{29 + \frac{4}{25}\cdot 29} = \sqrt{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{29}{5}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (т.к. $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$, $\angle AB$ общий)

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} \Rightarrow DE = BC\frac{AD}{AB}$

$DE = \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{\frac{3}{5}\sqrt{29}}{29/5} = \frac{6}{5}$

Теорема косинусов для $\triangle CED$:

~~$CE^2 = DE^2 + CE$~~

$CD^2 = DE^2 + CE^2 - 2\,DE\,CE\cos 45^\circ$

$CE^2 - CE\frac{6\sqrt{2}}{5} + \frac{36}{25} - \frac{4}{25}\cdot 29 = 0$.

$CE^2 - CE\frac{6\sqrt{2}}{5} - \frac{80}{25} = 0$.

$D = \frac{18}{25} + \frac{80}{25} = \frac{98}{25}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2 = (x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0 \\ y-2x \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $a = x-1$ ; $b = y-2$, тогда получим систему.

$$\begin{cases} (b-2a)^2 = ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \\ b-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 2a^2+b^2-3=0 \\ b-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right. \\ 2a^2+b^2-3=0 \\ b-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 18a^2=3 \\ b=4a \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ 3a^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \\ b-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ b=\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{6}}{6} \\ b=-\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right. \\ b-2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ a=\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Выполним обратную замену, получим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=-1\\ y-2=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=\frac{\sqrt6}{6}\\ y-2=\frac{2}{3}\sqrt6\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=1+\frac{\sqrt6}{6}\\ y=2+\frac{2}{3}\sqrt6\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$, $\left(1+\frac{\sqrt6}{6};\ 2+\frac{2}{3}\sqrt6\right)$.

№4

Дано:

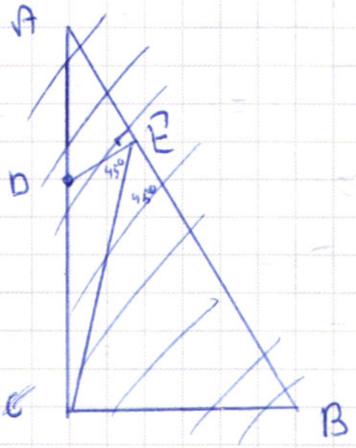
$\Delta ABC$ — прямоугольный, $\angle C=90^\circ$

$\frac{AD}{AC}=\frac{3}{3}$, $D\in AC$, $E\in AB$.

$DE\perp AB$.

$\angle CED=45^\circ$

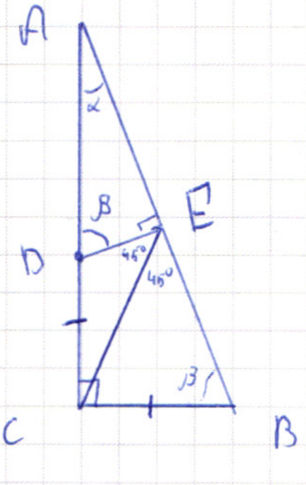
$AC=\sqrt{29}$




Найти:

а) $\operatorname{tg} BAC$

б) $S_{CED}$




Решение:

Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$.

$\Delta ADE$: $\angle ADE=180^\circ-90^\circ-\alpha=90^\circ-\alpha$

$\Delta ACB$: $\angle ABC=180^\circ-90^\circ-\alpha=90^\circ-\alpha=\beta$.

тогда $\angle ADE=\angle ABC=\beta$

$\angle CDE=180-\beta$

Теорема синусов для $\Delta DEC$: $\frac{CE}{\sin(180-\beta)}=\frac{DC}{\sin 45^\circ}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

По условию числа a, b, c три подряд идущих числа геом. прогрессии, т.е. $b^2 = ac$.

ур-е $ax^2+2bx+c=0$ имеет 1 корень x, т.к. $D = 4(b^2-ac)=0$ ; $x = -\frac{b}{a}$, x - 4-й член геом. прогрессии

Значит $c^2 = x\cdot b$ $\cancel{\ne (-\frac{b^2}{a})}$

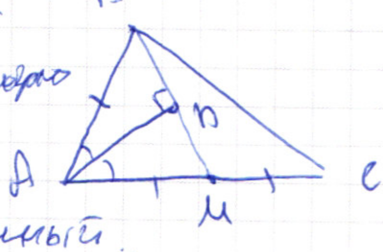
$c^2 = xb = -\frac{b^2}{a} = -\frac{ac}{a} = -c$.   $a \ne 0$, т.к ~~Если (a=0, то (b≠0, c=0)~~ 1, член геом. прогрессии

$c(c+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-1 \\ c=0 \end{array}\right.$ ; $c \ne 0$, т.к член геом. прогрессии.

т.е $c = -1$

Ответ: $-1$.

№2



Пусть △ABC в котором биссектриса AD пересекает медиану BM перпендикулярно

в △ABM : AD – высота и биссектриса => △ABM – равнобедренный,

т.е. AB = AM, также AM = MC, т.к BM – медиана △ABC.

Пусть AB = a, BC = b, тогда AB = AM = MC = a.

$P = 3a + b$.

Запишем условие нер-ва сторон △ABC.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} AC < AB + BC \\ BC < AB + AC \\ AB < AC + BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < a + b \\ b < 3a \\ a < 2a + b \end{cases}$$

$a, b > 0$, поэтому система тождественна.

$$\begin{cases} a < b \\ b < 3a \end{cases}$$

Если $P = 1200$, то

$3a + 3a > 3a + b = P = 1200 \Rightarrow a > 200$

$4a < 3a + b = P = 1200 \Leftrightarrow a < 300$

$2b < 3a + b = P = 1200 \Rightarrow b < 600$

$4b > 3a + b = P = 1200 \Rightarrow b > 300$.

Получим $a \in (200; 300)$; $b \in (300; 600)$, $a, b \in \mathbb{N}$

Очевидно, что более сильным ограничением будет ~~на~~ $a \in (200; 300)$, т.к. любое ~~натурал~~ $a$, подберется подходящий катет, но не на любое подберется $a \in \mathbb{N}$.

Всего возможно 99 вариантов выбора $a$, $b$ - подбирается однозначно $b = (1200 - 3a)$ см.

Тогда существует всего 99 треугольников.

Ответ: 99.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)