МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Пусть q – знаменатель данной геом. прогрессии. Тогда $b = aq$, $c = bq = aq^2$ и $d = cq = aq^3$, где d – 4ый член данной геом прогрессии. Т.к. d – корень у-я $ax^2 + 2bx + c = 0$, то верно:

$ad^2 + 2bd + c = 0 \Leftrightarrow$

$a(aq^3)^2 + 2b(aq^3) + c = 0 \Leftrightarrow$

$a(aq^3)^2 + 2(aq)(aq^3) + (aq^2) = 0 \Leftrightarrow$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \Leftrightarrow$

$aq^2(a^2q^4 + 2aq^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$aq^2(aq^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$c(c+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

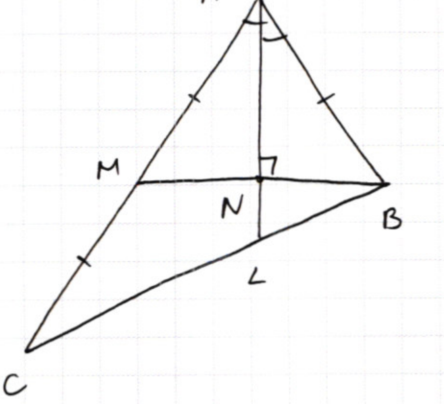
$\left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -1 \end{array}\right.$

Значит 3ий член данной прогрессии может равняться только 0 или −1 (в первом случае это достигается при $a = b = c = d = 0$, во втором при $a = b = c = d = -1$, эти посл. действительно явл. геом. прогрессиями и $0 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0 = 0$ и $(-1)\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1) = 0$).

Ответ: $c \in \{0; -1\}$

Задача №2

Заметим, что медиана и бис-са исходящие из одного угла не могут быть перпендикулярны, т.к. угол м/у бис-сой и медианой меньше угла м/у бис-сой и стороной, который в свою очередь равен 1/2 угла т-ка, т.е. меньше $1/2 \cdot 180° = 90°$. Значит $\perp$ могут быть медиана и бис-са исходящие только из разл. вершин. Рассмотрим этот вариант. Пусть в т-ке ABC медиана $BM \perp$ бис-се AL. Пусть $AL \cap BM = N$.



Тогда в т-ке MAB AN – бис-са и высота одновр., а значит этот т-к р-б с осн. BM и $BA = MA$. Т.к. BM – медиана $\triangle ABC$, то $MA = MC$. Тогда $AC = MA + MC = 2MA = 2AB$. Значит чтобы в т-ке одна из бис-с была $\perp$ одной из медиан, нам необходимо и достаточно того, чтобы одна из его сторон была в 2 раза больше др. (достаточность ясна, если проделать более ранние рассуждения в обр. порядке: т.е. если $BA = AC/2 = AM$, то т-к MAB р-б с осн. BM и его бис-са $AN \perp$ осн. BM). Найдем возможные значения стороны AB такого т-ка, если $AC = 2AB$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

По нер-ву т-ка: $AB + AC > BC$ и $AB + BC > AC$. Т.к. $AB + AC + BC = 1200$, то значит $AB + 2AB > 1200 - AB - 2AB$ и $AB + 1200 - AB - 2AB > 2AB$, т.е. $6AB > 1200$ и $4AB < 1200$, откуда $200 < AB < 300$. Т.к. длина стороны должна быть целочисленной, то всего возм. знач. 99 шт. Поймем, что каждое из этих знач. AB задает невырожденный т-к. с целочисленными ст. и периметром 1200 такой, что в нем $AC = 2AB$ и бис-са $\angle A \perp$ медиане $\angle B$. Теперь поймем, почему никакой т-к не получился дважды разными способами. Если такое случилось, то в т-ке есть др. пара сторон, отл. от AB и AC, такая, что их длины отл. в 2 раза. ~~Такой парой сторон~~ Такое возможно, если $BC = 2AC$ или $AB = 2BC$ (в случаях $AC = 2BC$ и $BC = 2AB$ эта пара даст нам те же знач. длин сторон, что и пара AB и BC, т.е. мы не получим этот т-к 2 разными способами). Но тогда в 1ом случае $BC = 4AB > AB + 2AB = AB + AC$, а во 2ом $AC = 4BC > BC + 2BC = BC + AB$. Значит каждый возм. т-к. посчитан, причем ровно 1 раз.

Ответ: 99 шт.

* Пояснение: т-ки считаются одинаковыми, если мн-ва длин их сторон совпадают

Задача №3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \end{cases}$$

Пусть $a = x - 1$ и $b = y - 2$. Тогда:

$$\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ b^2 + 4a^2 - 4ab = ab \\ 2a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ 2a^2 = 5ab - 3 \\ b^2 = 6 - 5ab \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ 2a^2 = 5ab - 3 \\ b^2 = 6 - 5ab \\ 2(ab)^2 = (5ab - 3)(6 - 5ab) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ 2a^2 = 5ab - 3 \\ b^2 = 6 - 5ab \\ 27(ab)^2 - 45ab + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b - 2a \geq 0 \\ 2a^2 = 5ab - 3 \\ b^2 = 6 - 5ab \\ \left[\begin{array}{l} ab = 1 \\ ab = 2/3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Подставим возможные значения a и b в усл. b-2a≥0:~~
~~1) (a;b) =~~

$$\begin{cases} b-2a \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=1 \\ a^2=1 \\ b^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} ab=2/3 \\ a^2=1/6 \\ b^2=8/3 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} b-2a \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1/\sqrt{6} \\ b=2\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1/\sqrt{6} \\ b=-2\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

В каждом из случаев проверим, что $b-2a \ge 0$:

1) $(a;b)=(1;1)$
   $b-2a = 1-2\cdot 1 = -1 < 0 \Rightarrow (1;1)$ - не корень
2) $(a;b)=(-1;-1)$
   $b-2a = (-1)-2\cdot(-1) = 1 > 0 \Rightarrow (-1;-1)$ - корень
3) $(a;b)=(1/\sqrt{6};\ 2\sqrt{2}/\sqrt{3})$
   $\cancel{b-2a = 4\sqrt{2}/\sqrt{3} - 2/\sqrt{6} > 4\cdot 1/2 = 4 > 0}$ $\Rightarrow (1/\sqrt{6};\ 2\sqrt{2}/\sqrt{3})$ - корень
   $\nwarrow b-2a>0$
4) $(a;b)=(-1/\sqrt{6};\ -2\sqrt{2}/\sqrt{3})$
   $b-2a < 0 \Rightarrow (-1/\sqrt{6};\ -2\sqrt{2}/\sqrt{3})$ - не корень

К п. 3 и 4:

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \overset{>}{\vee} \frac{2}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{2}{9} \vee \frac{1}{6} \Leftrightarrow 12 \vee 9$$

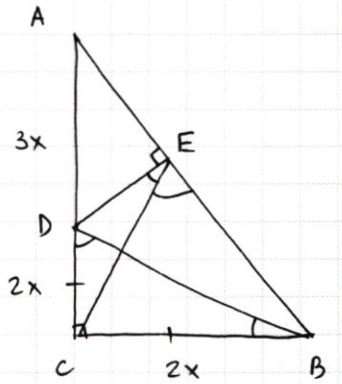
Итого:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1/\sqrt{6} \\ b=2\sqrt{2}/\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1/\sqrt{6}+1 \\ y=2\sqrt{2}/\sqrt{3}+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x;y) \in \{(0;1);\ (1/\sqrt{6}+1;\ 2\sqrt{2}/\sqrt{3}+2)\}$

Задача №4

Пусть $AC=5x$, тогда $AD=3x$ и $CD=AC-AD=2x$. Т.к. $DE \perp AB$, то $\angle DEB = 90°$, откуда $\angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90° - 45° = 45°$. Т.к. $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$, то 4-уг-к $CDEB$ - впис. и $\angle CED = \angle CBD$, $\angle CEB = \angle CDB$. Значит $\angle CBD = \angle CDB = 45°$, откуда т-к CDB - р-б с осн. BD и $CB=CD=2x$. Тогда $tg \angle BAC = BC/AC =$



$= 2x/5x = 2/5$.

Если же $AC = \sqrt{29}$, то $5x = \sqrt{29}$. Заметим, что по т. Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(5x)^2 + (2x)^2} = \sqrt{29}x$. Найдем DE: $DE = AD \cdot \sin\angle DAE = 3x \cdot \sin\angle BAC = 3x \cdot BC/AB = 3x \cdot 2x/\sqrt{29}x = 6x/\sqrt{29}$ (т.к. $\angle DEA = 90°$). Найдем CE по т. син. в т-ке CEB:

$$CE = \frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle CEB} \cdot BC = \frac{\sin\angle ABC}{\sin 45°} \cdot 2x = \frac{AC/AB}{\sqrt{2}/2} \cdot 2x = \frac{5x/\sqrt{29}x}{\sqrt{2}/2} \cdot 2x = \frac{10\sqrt{2}x}{\sqrt{29}}$$

Тогда найдем площадь т-ка CED:

$$S_{CED} = \frac{EC \cdot ED}{2} \cdot \sin\angle CED = \frac{10\sqrt{2}x}{\sqrt{29}} \cdot \frac{6x}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 45° = \frac{60\sqrt{2}x^2}{2 \cdot 29} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{30x^2}{29} = \frac{30 \cdot (\sqrt{29}/5)^2}{29} = \frac{6}{5}$$

Ответ: а) $2/5$
б) $6/5$

Задача №6

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$ для всех $x \in [-0,25; 1,5]$

Тогда в частности это должно выполняться для $x = -0,25$, $x = 0,5$ и $x = 1,5$, т.е. верна сис-ма:

$$\cancel{\begin{cases} 2(-0,25)^2 - (-0,25) - 1 \le ax + b \le (-0,25) + |2(-0,25) - 1| \\ 2(0,5)^2 - (0,5) - 1 \le ax + b \le 0,5 + |2(0,5) - 1| \\ 2(1,5)^2 - 1,5 - 1 \le ax + b \le 1,5 + |2(1,5) - 1| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5/8 \le a \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot (-0,25)^2 - (-0,25) - 1 \le a(-0,25) + b \\ a(0,5) + b \le 0,5 + |2(0,5) - 1| \\ 2 \cdot (1,5)^2 - (1,5) - 1 \le a(1,5) + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -5/8 \le -a/4 + b \\ a/2 + b \le 1/2 \\ 2 \le 3a/2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5/8 + a/2 + b \le -a/4 + b + 1/2 \\ 3a/2 + 3b + 2 \le 3a/2 + b + 3/2 \\ a/2 + b \le 1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\cancel{\begin{cases} -5/8 + a/2 + b \le -a/4 + b \\ a/2 + b \le 1/2 \\ 2 \le 3a/2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le 5/6 \\ a/2 + b \end{cases}} \qquad \begin{cases} a \le 3/2 \\ b \le -1/4 \\ \cancel{a/2 + b \le 1/2}\ 3a/2 + b \ge 2 \end{cases}$$

Заметим, что при $a = 3/2$ и $b = -1/4$ $3a/2 + b = 3/2 \cdot 3/2 - 1/4 = 2$, т.е. если $a < 3/2$ или $b < -1/4$, то $3a/2 + b < 2$, а значит единственная пара, которая может нам подойти, это $(a; b) = (3/2; -1/4)$. Осталось понять, действительно ли она подходит. Покажем это:

1) $2x^2 - x - 1 \le 3x/2 - 1/4 \iff$
$8x^2 - 10x - 3 \le 0 \iff$
$(4x + 1)(2x - 3) \le 0 \iff$
$-1/4 \le x \le 3/2$ – верно при всех $x \in [-0,25; 1,5]$

2) $3x/2 - 1/4 \le x + |2x - 1| \iff$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 1/2 \\ 3x/2 - 1/4 \le x + 2x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1/2 \\ 3x/2 - 1/4 \le x - 2x + 1 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 1/2 \\ x \ge 1/2 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le 1/2 \\ x \le 1/2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$x \in \mathbb{R}$ – верно при всех $x \in [-0{,}25; 1{,}5]$

Мы показали, что пара $(a; b) = (3/2; -1/4)$ – ед, которая могла бы подойти а также то, что она действительно подходит.

Ответ: $(a; b) \in \{(3/2; -1/4)\}$

Задача №7

Заметим, что $f(2) = f(2\cdot 1) = f(2) + f(1)$, откуда $f(1) = 0$. Заметим, что для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $f(1) = f(n \cdot 1/n) = f(n) + f(1/n) = 0$, т.е. $f(1/n) = -f(n)$. Тогда $f(x/y) = f(x \cdot 1/y) = f(x) + f(1/y) = f(x) - f(y)$ при $x, y \in \mathbb{N}$. Вычислим $f(n)$ для $n = 1, 2, \dots 21$:

$f(1) = 0$
$f(2) = [2/2] = 1$
$f(3) = [3/2] = 1$
$f(4) = f(2\cdot 2) = f(2) + f(2) = 2$
$f(5) = [5/2] = 2$
$f(6) = f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 2$
$f(7) = [7/2] = 3$
$f(8) = f(2\cdot 4) = f(2) + f(4) = 3$
$f(9) = f(3\cdot 3) = f(3) + f(3) = 2$
$f(10) = f(2\cdot 5) = f(2) + f(5) = 3$
$f(11) = [11/2] = 5$
$f(12) = f(2\cdot 6) = f(2) + f(6) = 3$
$f(13) = [13/2] = 6$
$f(14) = f(2\cdot 7) = f(2) + f(7) = 4$
$f(15) = f(3\cdot 5) = f(3) + f(5) = 3$
$f(16) = f(2\cdot 8) = f(2) + f(8) = 4$
$f(17) = [17/2] = 8$
$f(18) = f(2\cdot 9) = f(2) + f(9) = 3$
$f(19) = [19/2] = 9$
$f(20) = f(2\cdot 10) = f(2) + f(10) = 4$
$f(21) = f(3\cdot 7) = f(3) + f(7) = 4$

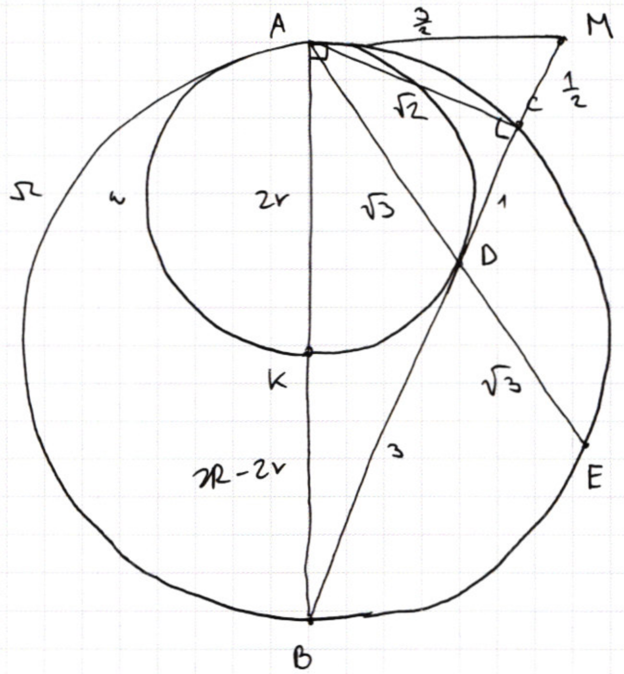
Итого:

$f(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
кол-во n, при кот. достигается	1	2	4	6	4	1	1	0	1	1	0

Заметим, что для $\forall$ ~~каждой~~ пары $(x; y)$ при $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x, y \le 21$ возм. 2 варианта: $f(x) = f(y)$ или $f(x) \ne f(y)$. В первом случае $f(x/y) = f(y/x) = 0$, во втором ровно одно из $f(x/y)$ и $f(y/x)$ отрицательно. Т.е. если исключить все пары $(x; y)$ такие, что $f(x) = f(y)$, то из ост. ровно половина будет давать $f(x/y) < 0$. Найдем такие пары, что $f(x) = f(y)$. Для каждого знач. $f(n)$ таких пар k^2 (где k – кол-во n, при кот. достигается это $f(n)$) – каждое можно поставить в упоряд. пару с $\forall$ др, даже с собой. Тогда

таких пар $1^2+2^2+4^2+6^2+4^2+1^2+1^2+1^2+1^2=77$. Всего возм. пар при $1\le x,y\le 21$ $21^2=441$ шт. Значит таких пар, что $f(x/y)<0$, будет $1/2$ от ост: $(441-77)/2=182$.
Ответ: 182

Задача №5 Пусть радиусы окр. ω и Ω – r и R соотв.

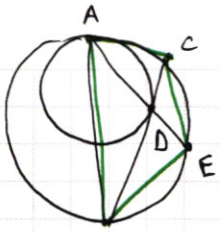


Пусть $AB\cap\omega=K$ и BC пер. общ. кас. ω и Ω (в т. A) в т. M. Тогда:
1) $\deg_\omega B=BK\cdot BA=BD^2\Rightarrow$ $(AB-AK)\cdot AB=3^2\Rightarrow$ $(2R-2r)\cdot 2R=9$ (т.к. AK – диам. ω и Ω)
2) $\deg_\Omega M=MC\cdot MB=MA^2\Rightarrow$ $\deg_\omega M=MA^2=MD^2$
$MC\cdot MB=MD^2\Rightarrow$
$MC(MC+BD+DC)=(MC+CD)^2\Rightarrow$
$MC(MC+4)=(MC+1)^2\Rightarrow$
$MC=1/2\Rightarrow AM=CD+MC=\frac{3}{2}$
3) Т.к. $MA\perp AB$, то по т. Пифагора:
$AB=\sqrt{BM^2-AM^2}=$
$=\sqrt{(BD+DC+CM)^2-\cancel{AM^2}\,MD^2}=$
$=\sqrt{(3+1+1/2)^2-(1+1/2)^2}=$
$=3\sqrt{2}=2R\Rightarrow$
$R=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4) $(2R-2r)\cdot 2R=9\Rightarrow$
$2R-2r=\frac{9}{2R}\Rightarrow r=R-\frac{9}{4R}=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{9}{6\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$
5) Т.к. AB – диам. Ω, то $\angle ACB=90°$. Тогда по т. Карно (т.к. $AC\perp MD$):
$AD^2-AM^2=DC^2-CM^2\Rightarrow AD=\sqrt{AM^2+DC^2-CM^2}=\sqrt{(3/2)^2+1^2-(1/2)^2}=\sqrt{3}$
6) $\deg_\Omega D=DB\cdot DC=DA\cdot DE\Rightarrow DE=DB\cdot DC/DA=3\cdot 1/\sqrt{3}=\sqrt{3}$
7) По т. Пифагора для $\triangle ADC$: $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$
8) $S_{ACEB}=\frac{AE\cdot BC}{2}\cdot\sin\angle ADC=\frac{(AD+DE)(BD+DC)}{2}\cdot\frac{AC}{AD}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})(3+1)}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=4\sqrt{2}$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $4\sqrt{2}$

$\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}$



$CD = 1$

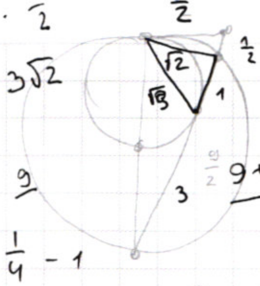
$BD = 3$

$2R(2R-2r) = 9$

$R(R-r) = \frac{9}{4}$

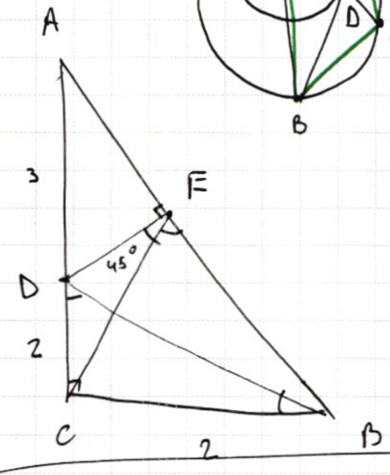
$\sqrt{8} \cdot \frac{3}{2}$

$\| \; 3\sqrt{2}$



$\frac{12}{4} = 3$

$\frac{9+4-1}{4}$



$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$tg(\angle BAC) = \frac{2}{5}$

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1$

$4R^2 + \frac{9}{4} = \frac{81}{4}$

$-\frac{1}{8}$

$4 + 25 = 29$

$S = \frac{2 \cdot 5}{2} = 5$

$4R^2 = \frac{72}{4}$ $8 \cdot 9$

$\frac{18}{16} - \frac{12}{16} - \frac{16}{16}$

$R^2 = \frac{9}{2}$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$18 - 28$

$R - r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$-\frac{5}{8}$

$r = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$(1+x)^2 = x(x+4)$

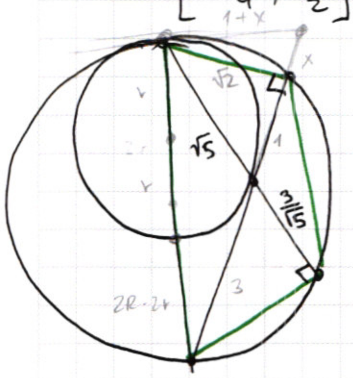
$x^2 + 2x + 1 \quad x^2 + 4x$

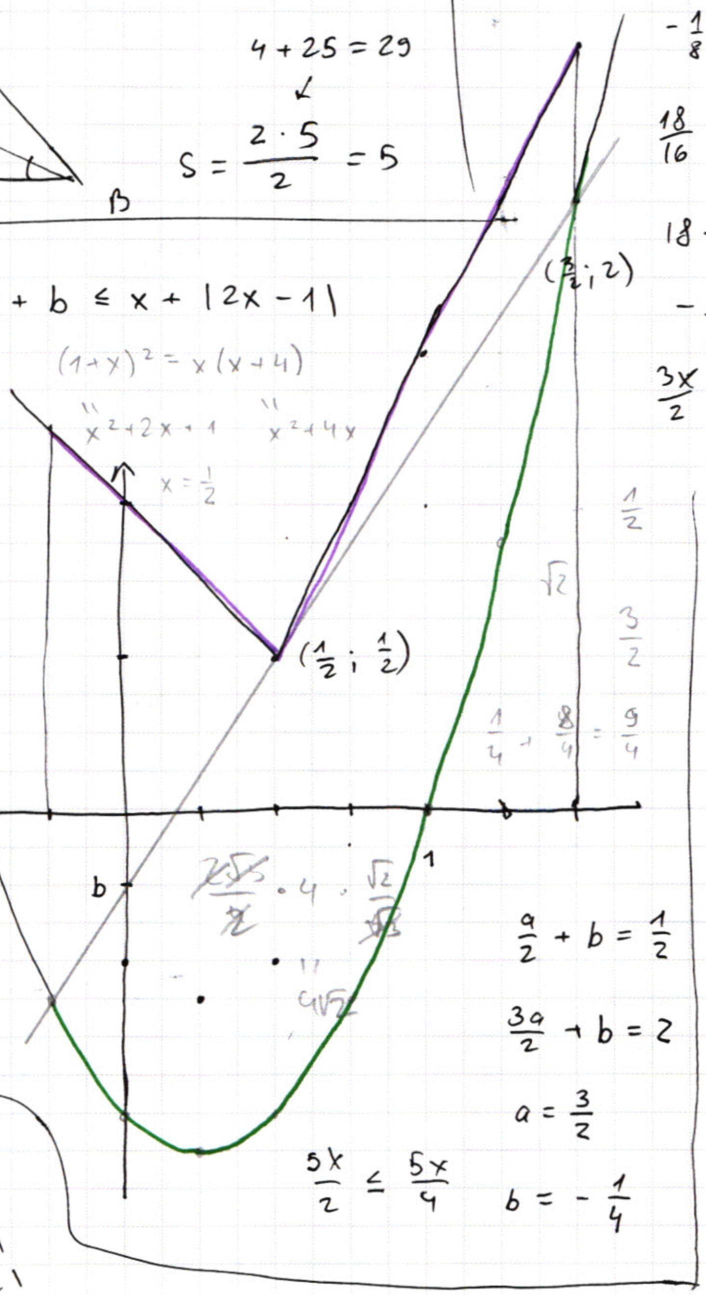
$x = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{2} \ge \frac{3}{4}$

$\frac{18}{4} - \frac{6}{4} - \frac{4}{4}$

$\frac{3}{2\sqrt{2}}$





$\frac{8}{4} \quad \frac{9}{2}$ $18 - 16 = 2$

$\frac{1}{2}$

$\sqrt{2}$

$\frac{3}{2}$

$\frac{18}{4}$ $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{21 \cdot 20}{2} = 210$ 2

$\frac{4}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$

$\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$4\sqrt{2}$

$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8}$

$\frac{9}{2} + b = \frac{1}{2}$

$1 + 6 + 15 + 6$

28

$\frac{3a}{2} + b = 2$

$210 - 28 = 182$

6

$a = \frac{3}{2}$

$50 - 16 = 34$ -8

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$

$\frac{5x}{2} \le \frac{5x}{4}$

$b = -\frac{1}{4}$

-4

$\frac{3}{4} a \le \frac{3}{2}$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}$

21
21
21

$\frac{9}{4}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4

42 44 16

441

77

364

182

$f(1) = 0$

$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) < f(y)$

0	1		
1	2	5	1
2	4	6	1
3	6	7	0
4	4	8	1
		9	1

$\frac{3}{4} a \le \frac{5}{8}$

$a \le \frac{5}{6}$

$5 + 12 + 4 = 21$

40

$5 + 4 + 32 + 36$

37

$\frac{3}{2\sqrt{2}}$

-8^4

$\frac{2\sqrt{3} \cdot 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\frac{6\sqrt{2}}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{8}$

$-\frac{1}{}$

$a=a$

$b=aq$

$c=aq^2$

$d=aq^3$

$ax^2+2bx+c=0$

$a(aq^3)^2+2aq(aq^3)+aq^2=0$

$a^3q^6+2a^2q^4+aq^2=0$

$aq^2(a^2q^4+2aq^2+1)=0$

$(aq^2+1)^2$

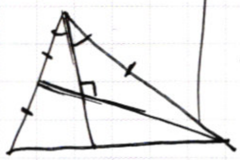
$c(c+1)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1 \end{array}\right.$

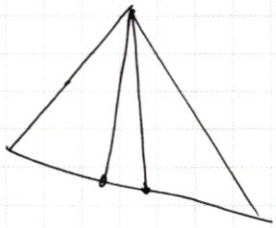
$\frac{5\cdot 2}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{2}}$

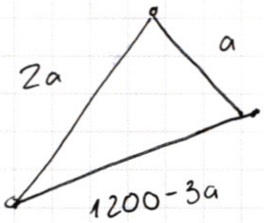
$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{29}}$

$p=1200$



$\cancel{a\neq 0}$





$3a \geq 1200-3a$

$a>200$

$2a<1200-2a$

$a<300$

99

$t=1 \to a^2=\frac{5t-3}{2}=1$

$b^2=6-5t=1$

$(a,b)=(1,1)$

$(-1,-1)$

$t=\frac{2}{3} \to a^2=\frac{\frac{10}{3}-3}{2}=\frac{1}{6}$

$b^2=6-\frac{10}{3}=\frac{8}{3}$

$(a,b)=\left(\sqrt{\frac{1}{6}};\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

$\left(-\sqrt{\frac{1}{6}};-\sqrt{\frac{8}{3}}\right)$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$-1+2$

$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=3$

$(x-1)^2 \qquad (y-2)^2$

$a=x-1$

$b=y-2$

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \to b^2+4a^2-4ab=ab$

$4a^2+b^2=5ab \longrightarrow 2a^2=5ab-3$

$b^2=6-5ab$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

t

$2a^2b^2=(5ab-3)(6-5ab)$

$2t^2=(t-3)(6-t)$

$-t^2+9t-18$

$t^2-3t+6=0$

$2a^2+b^2=3$

$2a^2+2b^2=9-5ab$ $\cancel{(t-3)(t+2)}$

$2(a+b)^2=9-ab$

$(t-1)(3t-2)=0$

$2t^2=(5t-3)(6-5t) \to 2t^2=-25t^2+45t-18 \to 3t^2-5t+2=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

0 1

$1 = \sqrt{0-0-1+2}$

$0+1-0-4+3=0$

1747

$5+4+32+36$

70

77

$\frac{9}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}$

$\frac{9}{4} = \frac{1}{4}+2$

$\frac{1}{\sqrt6}+1$ $\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}+2$

$\frac{6+\sqrt6}{6}$ $\frac{2\sqrt6+6}{3}$

$\frac{21^2-77}{2}$

441

77

220 − 38

182

$\frac{\cancel{2\sqrt3}\cdot 4}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{\sqrt3}} = 4\sqrt2$

$\sqrt5$

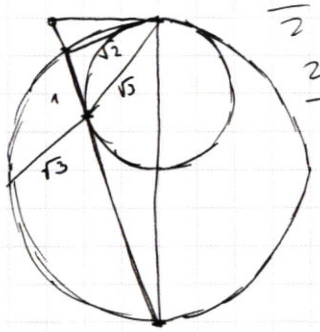
$\frac{2\sqrt6+6}{3} - \frac{\sqrt6+6}{3} = \sqrt{\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{2\sqrt2}{\sqrt3}}$

'' ''

$\frac{\sqrt6}{3}$ $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3} = \frac{\sqrt6}{3}$

$\frac{2}{2}\cdot 1$

$\frac{2\cancel{\sqrt2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt2}}$



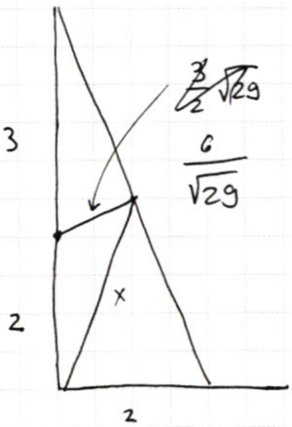
87

$\frac{1}{6}+\frac{4}{3}=3$

$\frac{1}{3}+\frac{8}{3}=3$

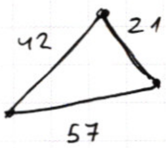
$\frac{15}{2}\cdot\frac{29}{25}$

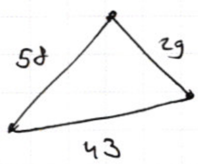
$\frac{30}{29}\cdot\frac{29}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$



$\frac{x\sqrt{29}}{5} = 2\sqrt2$

$x = \frac{10\sqrt2}{\sqrt{29}}$





3

$3\sqrt2$ 9

$\cancel{\frac{3}{2}\sqrt{29}}\cdot\frac{\cancel{10}^{5}\sqrt2}{\cancel{\sqrt{29}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt2} = \cancel{\frac{15}{2}}$ $\frac{30}{\sqrt{29}}$

$\frac{6}{\sqrt{29}}$

1

$2\sqrt2$

3

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)