МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

a, b, c - члены геом. прогрессии.

Тогда, пусть $b=aq \Rightarrow c=bq=aq^2$, Значит $a=a$, $b=aq$, $c=q^2a$

Уравнение $ax^2-2bx+c=0$

$ax^2-2aqx+aq^2=0$, разделим на a, $a\neq 0$, т.к это геом. прогрессия

$x^2-2qx+q^2=0$

$(x-q)^2=0$

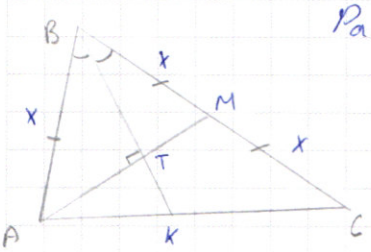
$x=q$, $x=d$, где d- четвертый член геом. прогрессии,

а значит $d=cq=aq^2\cdot q=aq^3 \Rightarrow d=aq^3=x=q \Rightarrow aq^3=q;\ aq^2=1$.

Заметим, что c - третий член прогрессии ~~c=q~~ $c=aq^2=1$.

Ответ: третий член прогрессии равен 1.

№2.



Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого 1 из медиан пересекает одну из биссектрисе под углом $90°$, $BK\perp AM$. Тогда, рассмотрим $\triangle BAT$ и $\triangle BMT$.

BT - общая сторона, $\angle ABT=\angle MBT$, т.к BK - биссектриса

$\angle ATB=\angle MTB$, т.к $\angle ATB=90° \Rightarrow \triangle ABT=\triangle MBT$ по 2 углам и стороне между ними $\Rightarrow AB=BM$, как соответственные стороны. $\Rightarrow AB=BM=\frac{1}{2}BC$.

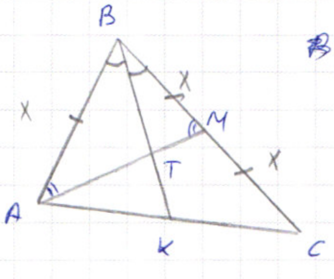
$\Rightarrow$ если $BC=2x \Rightarrow MC=BM=AB=x$. Значит, необходимо условие, чтобы 1 из сторон была в 2 раза меньше другой.

Докажем, что это и достаточное условие, если такой треугольник существует, то есть неравенство треугольника соблюдается

Также, угол $90°$ не может быть между биссектриссой и медианой, проведенной из одного угла, т.к тогда половина этого угла $>90° \Rightarrow$ угол >180, что невозможно

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



Для этого, рассмотрим $\triangle ABC$, у которого одна сторона в 2 раза больше другой. проведем, к этой стороне медиану, и из угла, заключенного сторонами x и $2x$ биссектрису. $\triangle ABM$ – р/б, т.к $BM=MC=\cancel{\frac{1}{2}AB}=\frac{1}{2}BC=AB=x$.

Тогда углы при основании равны $\Rightarrow \angle BAM=\angle BMA \Rightarrow$

$\triangle ABT=\triangle MBT$ по $\angle ABT=\angle MBT$, $AB=BM=x$, $\angle BAM=\angle BMT \Rightarrow$

$\angle BTA=\angle BTM$, при этом, это смежные углы $\Rightarrow \angle BTA=\angle BTM=180-\angle BTA \Rightarrow$

$2\angle BTA=180 \Rightarrow \angle BTA=90^0 \Rightarrow$ медиана $\perp$ биссектрисе.

Значит условие, что есть сторона в два раза большей другой достаточное, когда выполняется нер-во треугольников.

$$\begin{cases} a+b+c=900, \\ a<b+c \\ b<a+c \\ c<a+b \end{cases}$$ a,b,c – стороны $\triangle$, пусть $a=x$, $\Rightarrow b=2x$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2x+c=900 \\ x<2x+c \\ 2x<x+c \\ c<x+2x \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 3x+c=900 \\ -x<c \\ x<c \\ c<3x \end{cases} \Rightarrow x<c<3x.$$

$3x+c=900 \Rightarrow$ если мы подставим $c=x$ мы уменьшим выражение

$\Downarrow$

$\cancel{3x+c}$ $900=3x+c>3x+x$; $900>4x$; $\cancel{25}$ $225>x$.

если подставим $c=3x$ мы увеличим выражение

$\Downarrow$

$900=3x+c<3x+3x \Rightarrow 900<6x$; $x>150$.

Значит, $150<x<225 \Rightarrow$ $\cancel{b=2x}$ $300<2x<\cancel{225}\,450$, $b=2x \Rightarrow$

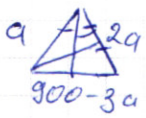
$300<b<450$. $\Rightarrow c=900-a-b>900-450-225=225 \Rightarrow c>225$,

$c=900-a-b=900-150-300=900-450=450 \Rightarrow c<450$.

$\Rightarrow \begin{cases} 150<a<225 \\ 300<b<450 \\ 225<c<450 \end{cases} \Rightarrow$ кол-во треугольников = кол-во целочисленных значений a, т.к ~~каждый~~ по значению a восстанавливаются значения b и c, при этом каждый $\triangle$ будет посчитан только 1 раз, т.к при любом значение a, b и $c>a$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда, $150 < a < 225 \Rightarrow$ всего есть $225 - 150 - 1 = 74$ варианта выбора длины $a \Rightarrow$ выбора треугольника.



Ответ: 74.

№6

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b$, при $x > \frac{1}{2}$

$8x - 12x + 6 \le ax + b$

$6 - 4x \le ax + b$

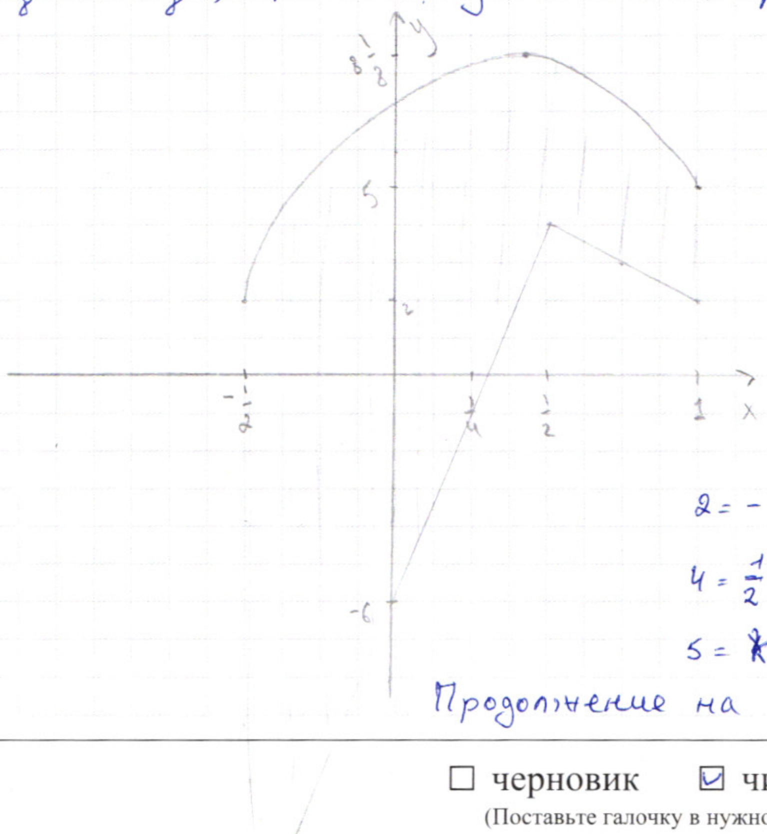
$6 - b \le (a+4)x$

$x \ge \frac{6-b}{a+4}$, при $x > \frac{1}{2}$

~~при $x < \frac{1}{2}$: $8x - 6|2x-1| \le ax+b$~~

$y = -8x^2 + 6x + 7$ — парабола, ветви вниз, $x_в = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, $y_в = -8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{18}{8} + 7 =$

$= \frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8}$, при $x = 1$. $y = -8 + 6 + 7 = 5$, при $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2 - 3 + 7 = 2$



$y = 8x - 6|2x-1|$

$y = \left[\begin{array}{l} 8x - 12x + 6 = 6 - 4x, \ x > \frac{1}{2} \\ 8x + 12x - 6 = 20x - 6, \ x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Заметим, что точки $(-\frac{1}{2}; 2)$; $(\frac{1}{2}; 4)$; $(1, 5)$ лежат на одной прямой

$2 = -\frac{1}{2}k + b$

$4 = \frac{1}{2}k + b$

$5 = k + b \Rightarrow b = 5 - k$

$2 = -\frac{1}{2}k + 5 - k$

$\frac{3}{2}k = 3$;

$k = 2$

$\Rightarrow y = 2x + 3$.

Продолжение на странице №5.

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$.

$8x-6|2x-1| \le ax+b$

1) $2x>1$; $x>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $8x-6|2x-1| \le ax+b$

$8x-12x+6 \le ax+b$

$6-4x \le ax+b$.

$6-b \le ax+4x$

$6-b \le x(a+4)$

$\frac{6-b}{a+4} \le x$., при $x>\frac{1}{2}$.

$8x+12x-6 \le ax+b$

$20x-6 \le ax+b$

$(20-a)x \le b+6$

$x \le \frac{b+6}{20-a}$, при $x<\frac{1}{2}$.

$(x-6)^2+(y-2)^2-20+y^2=0$.

$(x-6)^2+(y-2)^2=20-y^2$

$(x-6y)(x-6y)$

$ax+b \le -8x^2+6x+7$.

$8x^2+ax-6x+b-7 \le 0$.

$8x^2+x(a-6)+b-7 \le 0$.

$D=(a-6)^2-32(b-7)=$

$=a^2-12a+36-32b+32\cdot 7$.

$x=\frac{6-a \pm \sqrt{(a-6)^2-32(b-7)}}{16}$

$x_1+x_2=-\frac{a-6}{8}=\frac{6-a}{8}$ $\Rightarrow (x_1+x_2)^2=\left(\frac{6-a}{8}\right)^2$

$x_1x_2=\frac{b-7}{8}$

$x_в=\frac{6-a}{16}$

$x_1 \quad \frac{6-a}{16} \quad x_2$

$x_1=\frac{6-a}{8}-x_2$ $\quad \left(\frac{6-a}{8}-x_2\right)x_2=\frac{b-7}{8}$ $\quad$ ~~$x_1+x_1+2\left(\frac{6-a}{16}-x_1\right)$~~

$\frac{6-a}{8}x_2-x_2^2=\frac{b-7}{8}$; $-x_2^2+x_2\frac{6-a}{8}-\frac{b-7}{8}=0$.

$-8x_2^2+x_2(6-a)-(b-7)=0$.

$\frac{6-a \pm \sqrt{a^2-12a+36-32b+32\cdot 7}}{16}$.

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$.

$x(x-12y)+6y(6y+1)=x(y-1)+6$

$(x-6y)(x+6y)=13xy-6y-x+6$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

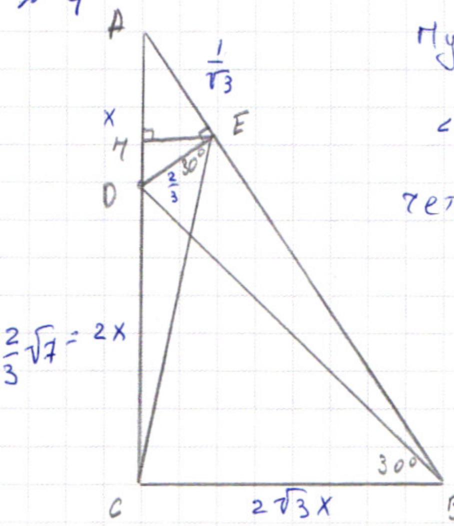
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Пусть $AD = x \Rightarrow AC = 3x \Rightarrow DC = 3x - x = 2x$

$\angle DEB = 90°$ т.к $DE \perp AB \Rightarrow CBED$ - вписанный четырёхугольник, т.к $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$

$CDEB$ - вписанный $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30°$, т.к опираются на дугу $\smile CD$

$\Rightarrow DB = 2 \cdot CD$ т.к CD - катет напротив угла в $30° \Rightarrow DB = 2 \cdot 2x = 4x$,

$CB^2 + CD^2 = DB^2$ по теореме Пифагора $\Rightarrow$

$CB^2 = DB^2 - CD^2 = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2 \Rightarrow CB = 2\sqrt3 x$.

$\Rightarrow tg\angle BAC = \frac{CB}{AC} = \frac{2\sqrt3 x}{3x} = \frac{2\sqrt3}{3} = \frac{2}{\sqrt3}$

Если $AC = \sqrt7 \Rightarrow x = \frac{\sqrt7}{3} \Rightarrow tg\angle BAC = \frac{DE}{AE}$; $\frac{2}{\sqrt3} = \frac{DE}{AE}$; $2AE = \sqrt3 DE$;

$AE = \frac{\sqrt3}{2} DE$, Тогда по теореме Пифагора для $\triangle ADE$

$AD^2 = AE^2 + DE^2$; $x^2 = \left(\frac{\sqrt3}{2} DE\right)^2 + DE^2$; $\frac{7}{9} = \frac{3}{4} DE^2 + DE^2 = \frac{7}{4} DE^2$

$DE^2 = \frac{4}{9}$; $DE = \frac{2}{3} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt3}{2} \cdot DE = \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt3}{3} = \frac{1}{\sqrt3}$; $AE = \frac{1}{\sqrt3}$

Проведем высоту EH, пусть $AH = a \Rightarrow HD = \frac{\sqrt7}{3} - a$. $\Rightarrow$

$\begin{cases} EH^2 = AE^2 - AH^2 \\ EH^2 = DE^2 - HD^2 \end{cases} \Rightarrow AE^2 - AH^2 = DE^2 - HD^2$

$\frac{1}{3} - a^2 = \frac{4}{9} - \left(\frac{\sqrt3}{3} - a\right)^2$

$\frac{1}{3} - a^2 = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} - a^2 + \frac{2\sqrt3}{3} a$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{9} + \frac{2}{\sqrt3} a$; $\frac{2}{\sqrt3} a = \frac{2}{9}$; $\frac{1}{\sqrt3} a = \frac{1}{9}$; $a = \frac{\sqrt3}{9} \Rightarrow EH^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{81} = \frac{27}{81} - \frac{3}{81} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$

$EH = \sqrt{\frac{8}{27}} = \sqrt{\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Тогда $S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot EH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt7 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}}{9\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{14}}{9\sqrt{3}}$$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $S_{\triangle DEC} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{14}{3}}$.

№6 Продолжение.

$y=2x+3$, значит три эти точки лежат на одной прямой.

Значит, если мы будем изменять a и b прямая будет повышаться, уменьшатьсяи или поворачиваться, но тогда она будет пересекать 1 из графиков но прямая должна лежать в заштрихованной области включая границы. Значит, $a=2$, $b=3$.

Ответ: $(2;3)$

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$\cancel{x^2}(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20=0$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-4-16=(x-6)^2+(y-2)^2+(y-2)(y+2)-16=0$

$(x-10)(x+2)+(y-2)(y-2+y+2)=(x-10)(x+2)+(y-2)\cdot 2y=0$

$(x-10)(x+2)=2y(2-y)$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$, $(x-6)(y-1)\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 6 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<6 \\ y<1 \end{cases} \end{array}\right.$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$ $\quad x>6y$

$\cancel{x^2-12xy+36y^2=}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

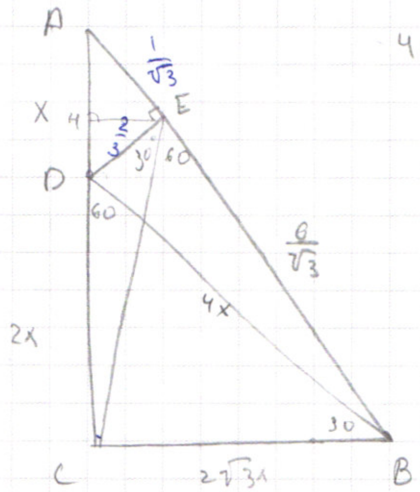
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$4x^2 + CB^2 = 16x^2$

$CB^2 = 12x^2$

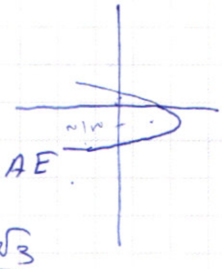
$CB = 2\sqrt{3}x$

$\Rightarrow tg\angle A = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \cdot \sin 30$

$DE = a \quad AE$

$\frac{DE}{AE} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ ~~если~~ $DE\sqrt{3} = 2AE$



$DE = a \Rightarrow a\sqrt{3} = 2AE \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \frac{a^2 \cdot 3}{4} + a^2 = x^2$

$\frac{7}{4}a^2 = x^2 \qquad , x = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$x^2 = \frac{1}{9} \cdot 7$

$\frac{7}{4}a^2 = \frac{7}{9}$

$\frac{a^2}{4} = \frac{1}{9} \quad a^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

$AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$(\sqrt{7})^2 + \left(2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 =$

$7 + \left(2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 =$

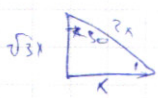
$7 + 4 \cdot \frac{7}{3} = 7 + \frac{28}{3} = \frac{21+28}{3} = \frac{49}{3}$

$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60} = \frac{\frac{6}{\sqrt{3}}}{\sin ECB}$

$\Rightarrow AB = \frac{7}{\sqrt{3}} \Rightarrow EB = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$\sin 60$

$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 = \frac{\frac{6}{\sqrt{3}}}{\sin ECB} = 2 = \frac{\frac{3}{\sqrt{3}}}{\sin ECB} = 2 = \frac{\sqrt{3}}{\sin E C} \quad \sin E C = \frac{\sqrt{3}}{2}$



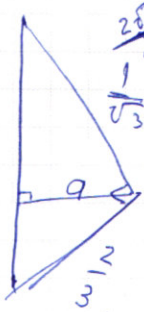
$\frac{3}{81} + \frac{1}{3}$

$\frac{3}{81} + \ldots = \frac{27}{81}$

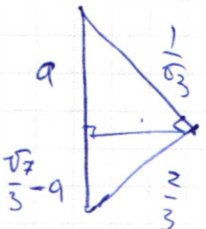
$\frac{24}{81} = H^2$

$\frac{2\sqrt{6}}{9} = H^2$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$



$\frac{\sqrt{7}}{3}$



$a = \frac{\sqrt{3}}{9}$

EH

$\frac{1}{3} - a^2 = \frac{4}{9} - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - a\right)^2$

$\frac{1}{3} - a^2 = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} - a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}a \qquad \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{\sqrt{3}}a \qquad \frac{2}{9} = \frac{2}{\sqrt{3}}a \qquad \frac{1}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}a$

$-8x^2 + 6x + 7$

$-(8x^2 - 6x + 7)$

$-8x^2 + 6x + 7 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 8 \cdot 7}}{-16}$

$-8 \cdot \frac{1}{4} + 3 + 7$

$-2 - 3 + 7$

$4 \cdot 65 = 2 \cdot 130 = 260$

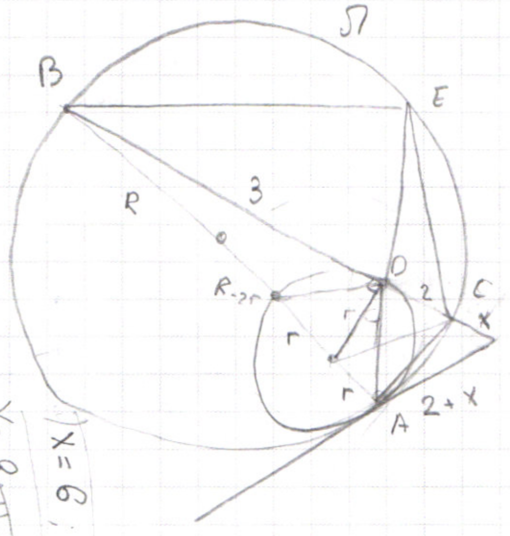
$4 \cdot 5 \cdot 13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$(2R-r)^2 = 9 + r^2$

$4R^2 + r^2 - 4rR = 9 + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 9$

$4R^2 - 9 = 4Rr$

$r = \frac{4R^2-9}{4R} = R - \frac{9}{4R}$

$x = 6;\ y = 1$

$(2R)^2 + (2+x)^2 = (5+x)^2$

$4R^2 + 4 + x^2 + 4x = 25 + x^2 + 10x$

$4R^2 + 4 + 4x = 25 + 10x$

$4R^2 = 21 + 6x$

$4R^2 - 21 = 6x;\quad \frac{4R^2-21}{6} = x.$

$f(23) = 11$

$f(22) = f(2) + f(11) = 1 +$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)$

$(x-6)^2 + (y-2)^2$

$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 + y^2 - 20$

$(x-6)^2 + (y-2)^2 + y^2 - 20 = 0.$

$(x-6)^2 = 20 - (y-2)^2 - y^2$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$1 + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$f(p) = \frac{p}{2}$: $f(2) = 1$

$f(3) = 1 \to f(6) = 2$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{9}\right) =$

$= 1 + f\left(\frac{1}{9}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) = 1.$, если $x > y \Rightarrow$

$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = f(2) + f(3) = 2.$

$f(7) = 3$

$\frac{x}{y} > 1 :\ f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x\ ?\ y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

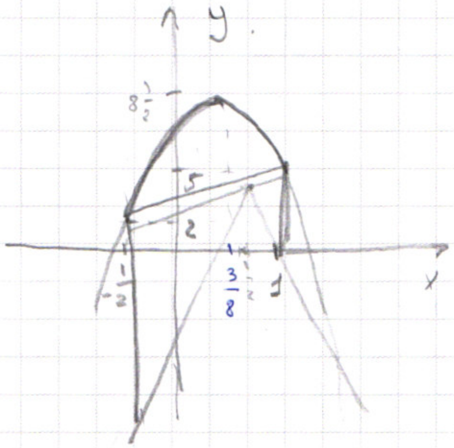
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-8x^2+6x+7-$

$x_в = \frac{-6}{-16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$

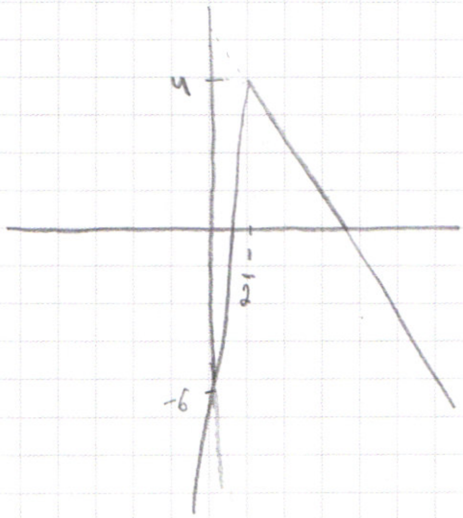
$-8+6+7=5$

$-8\cdot\frac{9}{8^2}+6\cdot\frac{3}{8}+7$

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7=-$

$-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=\frac{9}{8}+7=8\frac{1}{2}$

$8x-6|2x-1|$



$8x-12x+6,\ x>\frac{1}{2}$

$6-4x$

$8x+12x-6=20x-6,\ x=\frac{1}{2}$

4

$-8\cdot\frac{1}{4}-3+7$

$x=1,\ y=5.$

$x=\frac{1}{2};\ y=4.$

$5=kx+b$

$5=k+b.$

$4=\frac{1}{2}k+b$

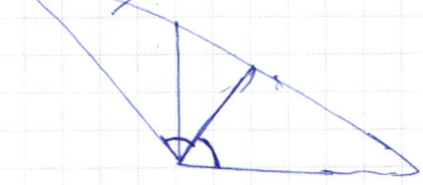
$5-k=4-\frac{1}{2}k$

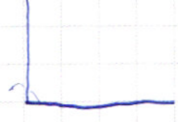
$1=\frac{1}{2}k$

$y=\cdot$

$b=3$

$2=k.$





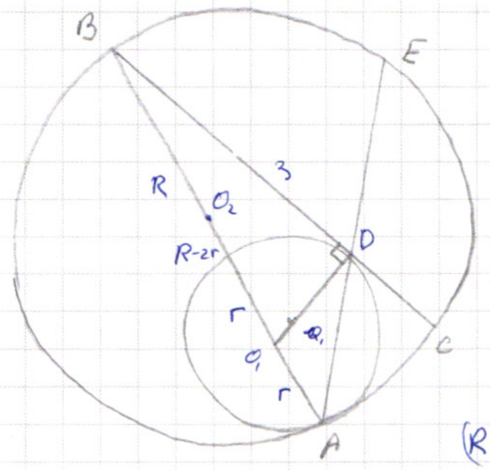
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 5



Заметим, что AB - отрезок, содержащий и диаметр окружности ω. BC касается окр ω. =>

$\angle O_1DB = 90^\circ$,

Пусть радиус окр ω равен r, Радиус окр Ω R. =>

$(R+r)^2 = 3^2 + r^2$

$R^2 + 2rR + r^2 = 9 + r^2$

$R^2 + 2rR = 9$; $R^2 - 9 = 2rR \Rightarrow r = \frac{R^2 - 9}{2R}$

Проведем касательную в точке A.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a; b; c$

$b=2q$ $\cancel{b=2a}$ $b=qa$

$c=q^2a$

$a=0.$

$ax^2-2bx+c=ax^2-2qax+q^2a=0.$

$ax^2-2aqx+q^2a=0.$

$x^2-2qx+q^2=0.$

$(x-q)^2=0$

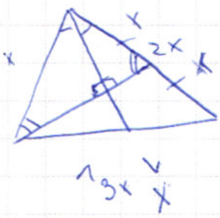
$x=q$

$0;0;0;0.$

$a; qa; aq^2; aq^3=q$

$aq^2=1$. => $c=1$.

№2.



$a+b+c=900$

$a+b>c$

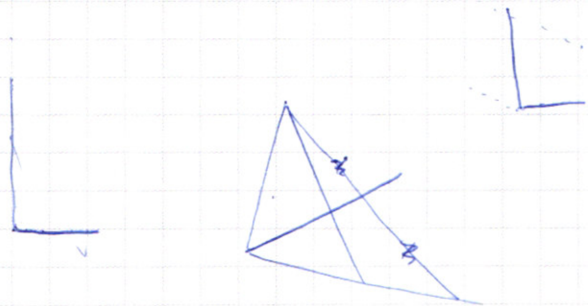
$900-c>c$

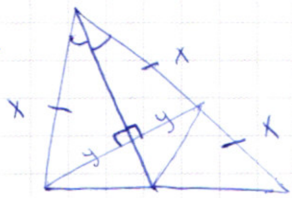
$900>2c$

$c<450$

$a<450$

$b<450.$





если a-

$a=x$

$b=2x$

$c=c$

⇓

$3x+c=900$

$3x>c$

$c+x>2x$

$c>x$

$3x+c=900$

$6x>900$

$x>\frac{900}{6}=\frac{450}{3}=150$

$x>150$

$3x+c=900$

$4x<900$

$x<\frac{450}{2}=225$ => $150<x<225.$

150 300

450 x.

225 450. 675 225

225 x.

=> $150<x<225$ => $300<2x<450.$

=> если $225-150-1=74$ варианта выбрать x => самое большое значение $x+2x=675$ => самое мал значит $c=225.$

$1<x<3$

$3-1-1=1$ в => все по 1 разу.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$\cancel{x^2}$ $x^2-12x+36$

y^2-4y+4

y^2

-20

$xy-6y-x+6$

$(x-6)(y-1)>0$.

$x(y-1)-6(y-1)=(x-6)(y-1)$

$(x-6)^2+(y-2)^2+y^2-20=0$.

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$x^2+36y^2-12xy=xy-x-6y+6$.

$x^2-12xy-xy+x+6y-6+36y^2=0$.

227

454

219

$454+227=681$

$900-681=219$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$.

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6y)^2=(x-6)(y-1)$

$x^2+36y^2-12xy=xy-x-6y+6$

227

454

$454+227=681$

$219+227=446$

$19+27=46$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$.

$\cancel{x^2-12x+36}$

$x^2-4x+4-8x$

$(x-2)^2-8x$.

$y^2-8y+16$

$+4y$

$36+2-18$

$2\cdot 2$

$(\sqrt{2}y)^2-4y+2$

$(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2=2y^2+2-4y$

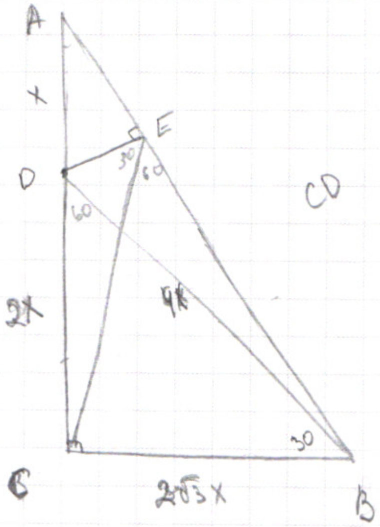
157

314

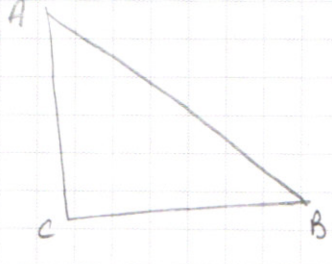
4

471

429



CD



$CD\cdot EB+DE\cdot BC=\overline{CE\cdot BD}$

$tg\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}x}{3x}$ $3\sqrt{3}x$

$9x^2+\sqcup=36x^2$

$27x^2$ $3\sqrt{3}x$

$4x^2+\sqcup=16x^2\Rightarrow 12x^2\Rightarrow 2\sqrt{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)