

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a , b , c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a , b , c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

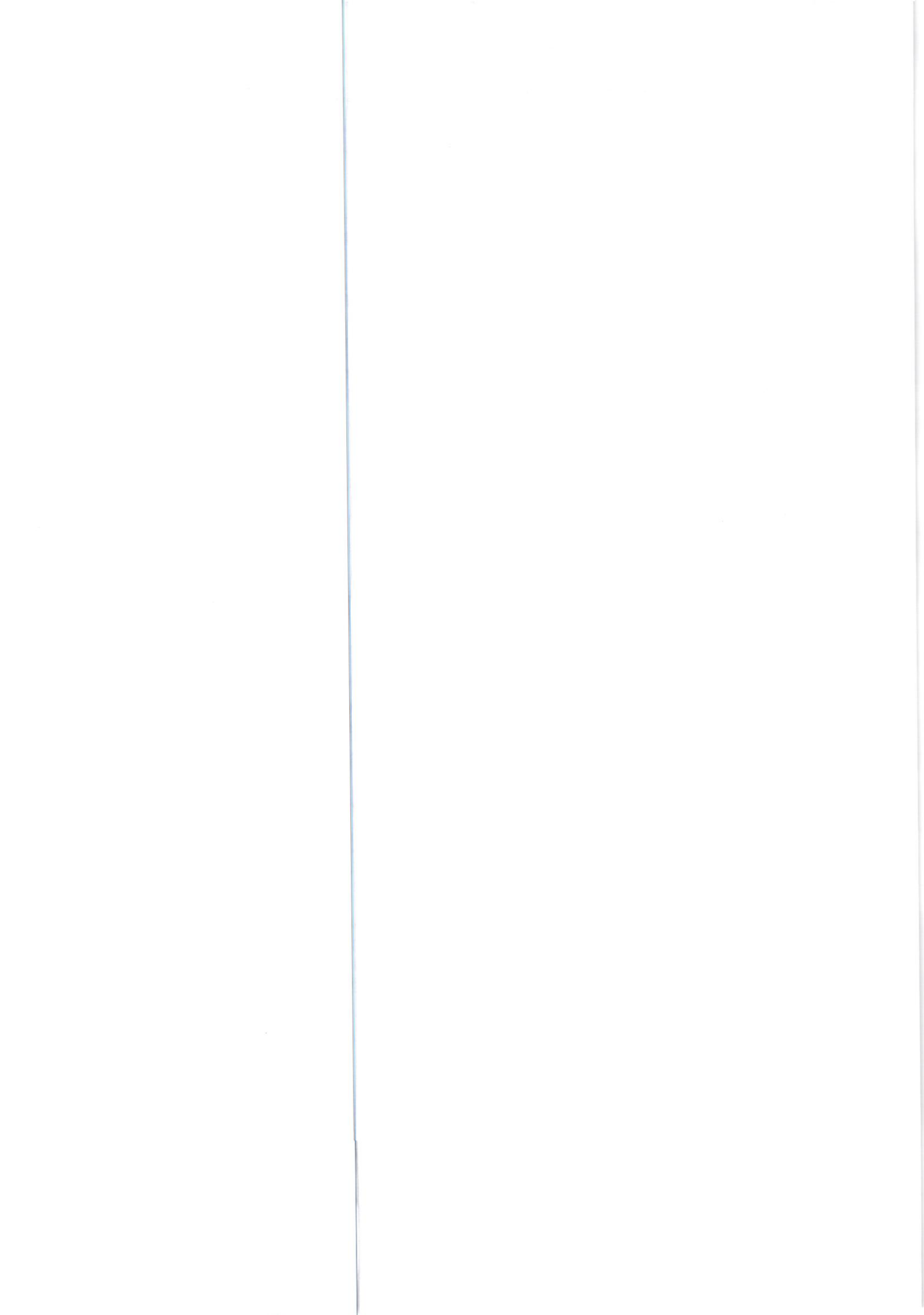
4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22$, $2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 (продолж-е).

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CH} \Rightarrow \frac{DE}{CH} = \frac{1}{3} \Rightarrow CH = 3DE$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC} = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{3AD}{AB} = \frac{3AE}{AC} = \frac{3DE}{BC}$$

$$2EH = CE = 4y$$

~~$$4y^2 + CH^2 = 16y^2 \Rightarrow CH^2 = 12y^2 \Rightarrow 2y\sqrt{3} = CH$$~~

$$CH^2 = AH \cdot BH$$

$$12y^2 = 3y \cdot BH \Rightarrow BH = 4y = CE$$

$$BC^2 = 16y^2 + 12y^2 = 28y^2 \Rightarrow BC = 2y\sqrt{7}$$

$$AE = \frac{3}{AD} = \frac{3}{AH+BH} = \frac{3}{3y+4y} = \frac{3}{7y}$$

$$DE = \frac{CH}{3} = \frac{2y\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 = y^2 + \frac{4y^2 \cdot 3}{9} = y^2 + \frac{4y^2}{3} = \frac{7y^2}{3} \Rightarrow x = y\sqrt{\frac{7}{3}}$$

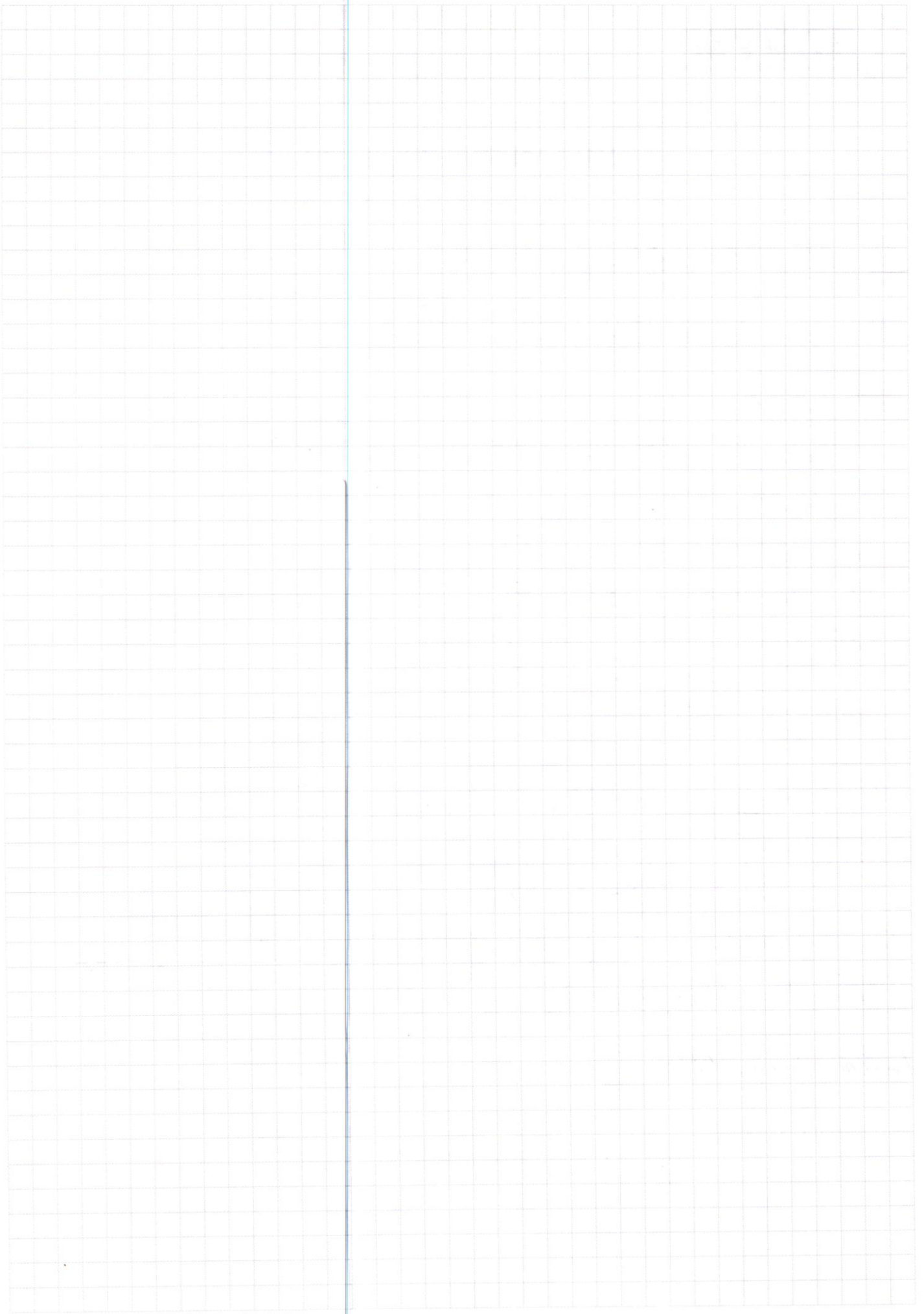
$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2y\sqrt{7}}{3y\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} DE \cdot CE \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{9} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

~~$$AC = \sqrt{7} = 3y\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow \frac{3y}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$~~

Ответ: а) $\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) $S_{\triangle CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 (продолжение)

$$D = 169y^2 - 26y + 1 - 4(36y^2 + 6y - 6) = 169y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 =$$

$$= 25y^2 - 50y + 25 = 25(y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{13y-1 + 5(y-1)}{2} = \frac{18y-6}{2} = 9y-3 \quad (!)$$

$$x_2 = \frac{13y-1 - 5y + 5}{2} = \frac{8y+4}{2} = 4y+2$$

$$(2) x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \quad (\text{относительно } x \text{ решаем})$$

$$\frac{D}{4} = 36 - (2y^2 - 4y + 20) = 36 - 2y^2 + 4y - 20 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$x_1 = 6 + \sqrt{-2y^2 + 4y + 16}$$

$$x_2 = 6 - \sqrt{-2y^2 + 4y + 16} \quad (*)$$

$$(*) -2y^2 + 4y + 16 \geq 0$$



$$(!) \text{ П.к. } x \geq 6y : 1) 9y-3 \geq 6y \Leftrightarrow y \geq 1$$

$$2) 4y+2 \geq 6y \Leftrightarrow y \leq 1$$

Рассмотрим в совокупности:

$$1) 6 + \sqrt{-2y^2 + 4y + 16} = 9y - 3, \text{ при этом } y \in [1; 4]$$

$$\sqrt{-2y^2 + 4y + 16} = 9y - 9, \text{ ДУ: } y \geq 1$$

$$-2y^2 + 4y + 16 = 81y^2 - 162y + 81$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1494$$

$$y = \frac{83 \pm \sqrt{1494}}{83}; \quad y_1 = \frac{83 + \sqrt{1494}}{83} = 1 + \frac{\sqrt{1494}}{83} \approx 1 + \frac{38}{83} < 1 \text{ - не подходит}$$

$$y_2 = \frac{83 - \sqrt{1494}}{83} < 1 \text{ - не подходит}$$

$$2) 6 + \sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 4v + 2, \text{ при } v \in [-2; 1]$$

$$\sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 4v - 4, \text{ ДУ: } v \geq 1 \rightarrow \text{тогда равен-во и.б. только при } v=1.$$

$$\sqrt{-2 + 4 + 16} \neq 0.$$

$$3) 6 - \sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 9v - 3, \text{ при } v \in [1; 4]$$

$$\sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 9 - 9v, \text{ ДУ: } v \leq 1 \rightarrow \text{тогда равен-во и.б. только при } v=1.$$

$$\sqrt{18} \neq 0 - \text{ не подходит}$$

$$4) 6 - \sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 4v + 2, v \in [-2; 1]$$

$$\sqrt{-2v^2 + 4v + 16} = 4 - 4v, \text{ ДУ: } v \leq 1$$

$$-2v^2 + 4v + 16 = 16 - 32v + 16v^2$$

$$18v^2 - 36v = 0$$

$$v(18v - 36) = 0 \Rightarrow v \in \{0; 2\}, \text{ но } v \in [-2; 1] \Rightarrow v = 0$$

Тогда:

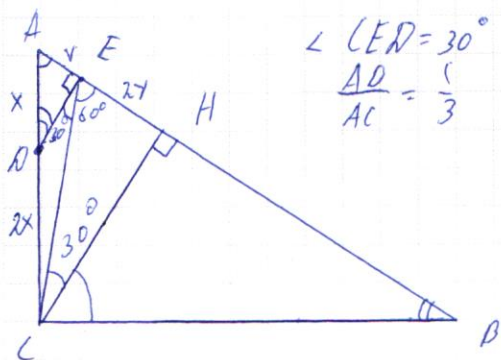
$$\text{при } v = 0: x = 2$$

$$\text{при } v = 1 + \frac{\sqrt{1494}}{83}: x = 9 \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{1494}}{83}\right) - 3 = 9 + \frac{9\sqrt{1494}}{83} - 3 = 6 + \frac{9\sqrt{1494}}{83} = 3 \left(2 + \frac{3\sqrt{1494}}{83}\right)$$

$$\text{Ответ: 1) } v = 0, x = 2$$

$$2) v = 1 + \frac{\sqrt{1494}}{83}, x = 3 \left(2 + \frac{3\sqrt{1494}}{83}\right)$$

Задача 4.



$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{5}{3}$$

Проведем высоту CH к стороне AB .

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle AED \sim \triangle ACH \sim \triangle CHB$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \angle BAC &= \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \angle DAE = \frac{DE}{AE} = \operatorname{tg} \angle CAH = \\ &= \frac{CH}{AH}, \quad (DE) \parallel (CH) \text{ по св-ву 2-х паралл. в к-й стороне.} \end{aligned}$$

Тогда по т. Паллеса $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH}$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{1}{AB} = \frac{AE}{3} \Rightarrow AE = \frac{3}{AB}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

a - пер-й член геом-й прогр-ии (b_1)

b - 2-й член геом-й прогр-ии (b_2)

c - 3-й член геом-й прогр-ии (b_3)

b_1, b_2, b_3, b_4 - обобщ-я чл-в геом-й прогр-ии.

$b_2 = b_1 q$, где q - знамен-ль геом-й прогр-ии.

$b_3 = b_1 q^2$, $b_4 = b_1 q^3$

$b_3 = ?$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4 \cdot b_2^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_3 = 4 \cdot (b_1 q)^2 - 4 \cdot b_1 \cdot b_1 q^2 = 0$$

$$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} = \frac{b_2}{b_1} = q = b_4$$

Тогда $b_1 q^3 = q \Leftrightarrow b_1 q^2 = 1 = b_3$ ($q \neq 0$ по опред-ю геом-й прогр-ии)

Ответ: $b_3 = 1$.

$f(x)$

Задача 6.

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

" $f(x)$ " " $g(x)$ "

на $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 6, & \text{при } x \geq \frac{1}{2} \\ 20x - 6, & \text{при } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

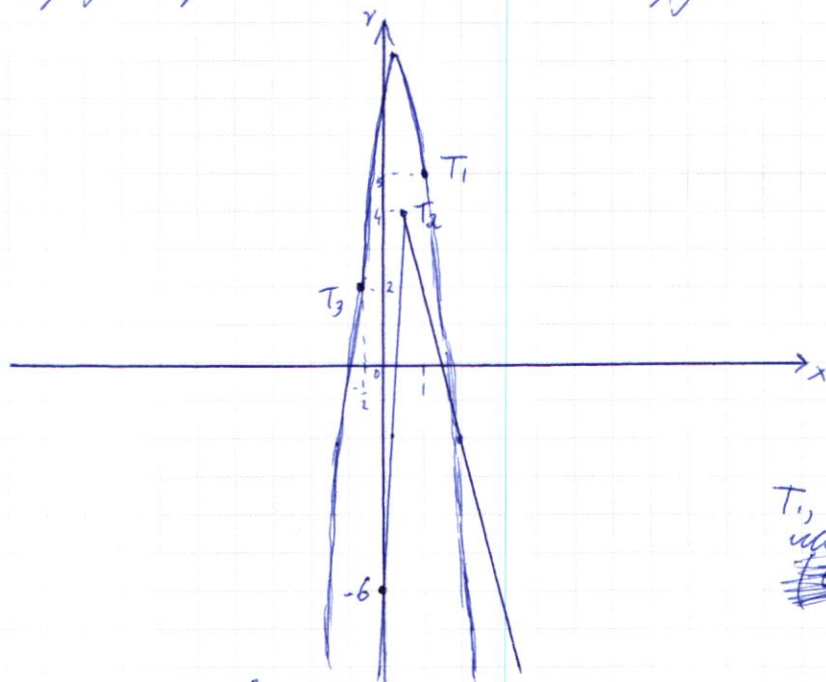
$$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$$

$$x_0 = \frac{-6}{2 \cdot (-8)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = g(x_0) = -8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$$

Ответ: $\frac{65}{8}$

Изобразим графики $f(x)$ и $g(x)$ на координатной плоскости.



$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -16 \\ f(1) &= 2 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) &= 2 \\ g(1) &= 5 \\ g(0) &= 7 \\ f(0) &= -6 \end{aligned}$$

Заметим, что если $(.)$ -ки T_1, T_2 и T_3 лежат на 1-й прямой, то решение единственно.
~~Если~~

$$y(x) = ax + b$$

Найдем прямую $(T_2 T_1)$:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} + b = 4 \\ y(1) = a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$y = 2x + 3$$

Тогда проверим ~~находим~~ лежит ли $(.)$ -ка T_3 на прямой $(T_2 T_1)$.

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 + 3 = 2 = g\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Таким образом, $(.)$ -ки T_1, T_2 и T_3 лежат на 1-й прямой.

Три числа a и b $y(x) = ax + b$ пересекают или $f(x)$, или $g(x)$, или одновременно обе, а это не соответствует неравенству.

Ответ: $a = 2, b = 3$

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $x \geq 6y$ — доказано

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 6y + x + 36y^2 - 6 = 0$$

$$x^2 - x(13y - 1) + 36y^2 + 6y - 6 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x \geq \frac{1}{2}$$

$$8x - 6(2x - 1) = 8x - 12x + 6 = -4x + 6$$

$$x < \frac{1}{2}: 8x - 6(1 - 2x) = 8x - 6 + 12x = 20x - 6$$

$$x^2 - 166y + 65 \cdot 83 = 0$$

$$x - 166y + 5395 = 0$$

$$D = 6889 - 5395 =$$

$$= 1494$$

$$x = \frac{83 + \sqrt{1494}}{83}$$

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{AB} =$$

$$\frac{SAE}{AC} = \frac{3 \cdot DE}{BC}$$

$$\frac{AE}{DE} = \frac{AC}{BC}$$

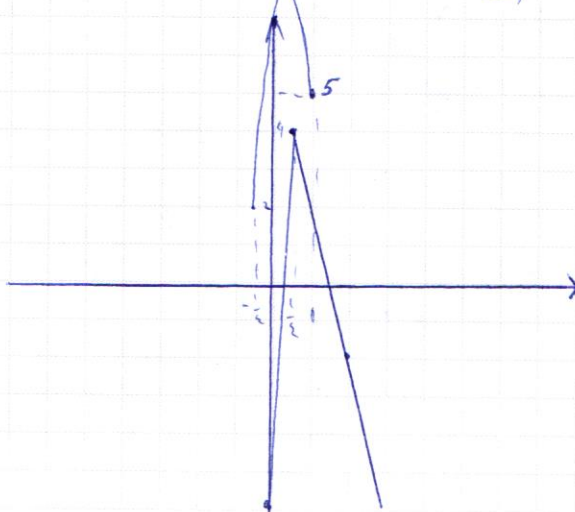
$$-\frac{a}{2} + b = 2$$

$$a + b = 5$$

$$a + \frac{a}{2} = 3 \Rightarrow \frac{3a}{2} = 3$$

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$20x - 6 = -16 \quad (x = -\frac{1}{2})$$



$$\frac{a}{2} + b = 4$$

$$a + b = 5$$

$$a - \frac{a}{2} = 1$$

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 3$$

$$y = 2x + 3$$

$$y(-\frac{1}{2}) = -1 + 3 = 2$$

$$-8x^2 + 6x + 7$$

$$-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$$

$$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

$$= -8 \cdot \frac{9}{64} + 6 \cdot \frac{3}{8} + 7$$

$$= -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$$

$$D = 9 + 8 \cdot 7 = 65$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{-8}$$

$$\cancel{(30+6)} \cancel{(30+6)}$$

$$(30+7)(30+7)$$

$$= 900 + 2 \cdot 210 + 49 =$$

$$= 900 + 420 + 49 =$$

$$= 1369$$

$$38 \cdot 38 =$$

$$(30+8)(30+8) =$$

$$= 900 + 240 \cdot 2 + 64 =$$

$$= 900 + 480 + 64 =$$

$$= 1444$$

$$X - 6Y = \sqrt{XY - 6Y - X + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$x \geq 6y$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = x^2 - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 13xy + 6y + x + 36y^2 - 6 = 0$$

$$x^2 - x(13y - 1) + 36y^2 + 6y - 6 = 0$$

$$D = 169y^2 - 26y + 1 - 4(36y^2 + 6y - 6) =$$

$$= 169y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 =$$

$$= 25y^2 - 50y + 25 = 25(y^2 - 2y + 1) = 25(y - 1)^2$$

$$x = \frac{13y - 1 \pm 5(y - 1)}{2} ; x_1 = \frac{13y - 1 + 5y - 5}{2} = \frac{18y - 6}{2} = 9y - 3$$

$$x_2 = \frac{13y - 1 - 5y + 5}{2} = \frac{8y + 4}{2} = 4y + 2$$

$$x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$D = 36 - 2y^2 + 4y - 20 = -2y^2 + 4y + 16$$

$$x_1 = 6 + \sqrt{-2y^2 + 4y + 16}$$

$$x_2 = 6 - \sqrt{-2y^2 + 4y + 16} \geq 0$$

$$D = 4 + 16 \cdot 2 = 36$$

$$y_1 = \frac{-2 + 6}{-2} = -2$$

$$y_2 = \frac{-2 - 6}{-2} = 4$$

$$y \in [-2; 4]$$



$$144 - 4(2y^2 - 4y + 20) =$$

$$= 144 - 8y^2 + 16y - 80 =$$

$$= -8y^2 + 16y + 64 =$$

$$= -8(y^2 - 2y - 8)$$

$$x = \frac{12 + \sqrt{-8(y^2 - 2y - 8)}}{2} = 6 \pm$$

$$(80+3)(60+5) = 4800 + 400 + 180 + 15 = 5200 + 195 = 5395$$

$$(80+3)(80+3) = 6400 + 240 + 240 + 9 = 800 + 640 + 24 = 83 \cdot 18 = 83 \cdot 10 + 83 \cdot 8 = 830 + 640 + 24 = 1494$$

$$83(80+3) = 80 \cdot 80 + 80 \cdot 3 + 83 \cdot 3 = 8400 + 163 \cdot 3 =$$

$$= 6400 + 300 + 189 =$$

$$83 \cdot 65 = (80+3)(60+5) = 4800 + 400 + 180 + 15 =$$

$$= 5200 + 195 = 5395$$

$$= 6889$$

$$38 \cdot 38 = 30(10) + 30(8) =$$

$$= 605 + 889 =$$

$$= 900 + 240 + 240 + 64 =$$

$$36 \cdot 36 = 1080 + 30 \cdot 6 + 6 \cdot 6 =$$

$$= 894 + 600 =$$

$$= 1300 + 144 = 1444$$

$$= 1080 + 180 + 36 =$$

$$= 1494$$

$$= 1296$$

$$6889 \overline{)1494}$$

$$1494 \cdot 5 =$$

$$= 5000 + 494 \cdot 5$$

$$1494 \cdot 4$$

$$9y - 3 \geq 6y$$

$$3y \geq 3$$

$$y \geq 1$$

$$4y + 2 \geq 6y$$

$$-2y \geq -2$$

$$y \leq 1$$

$$83^2 - 83 \cdot 65 =$$

$$83(83 - 65) =$$

$$= 83 \cdot 18 =$$

$$= 800 + 83 \cdot 8 =$$

$$= 800 + 640 + 24 =$$

$$83 \cdot 18 =$$

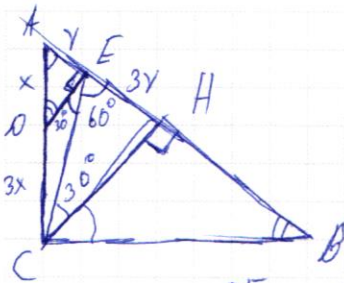
$$83 \cdot 10 + 83 \cdot 8 =$$

$$= 830 + 640 + 24 =$$

$$= 1470 + 24 =$$

$$= 1494$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$$

$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\begin{aligned} \triangle AED &\sim \triangle ABC \\ \triangle ABC &\sim \triangle CHB \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle CHB$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{BC}{CH}$$

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AE}{CH} = \frac{DE}{BH}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{BH}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BC \cdot AC}{CH} = \frac{BC \cdot AC}{3DE}$$

$$2EH = CE$$

$$\frac{CH}{AC} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BC}{CH}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

$$\frac{AB}{3} = \frac{1}{AE} \Rightarrow AE = \frac{3}{AB}$$

$$= \frac{3 \cdot 3DE}{BC \cdot AC} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{9}{BC \cdot AC}$$

$$\frac{9}{BC \cdot AC} = \frac{BC \cdot AC}{9} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = 9$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{DC}{AC}$$

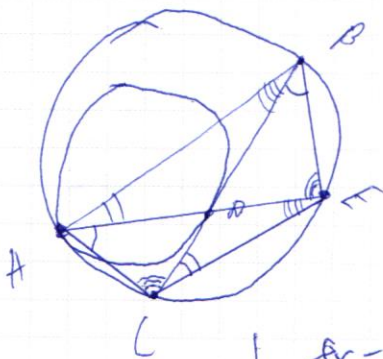
$$\triangle ACH \sim \triangle BCH \sim \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AH}{CH} = \frac{CH}{BH}$$

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CH}$$

$$\frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH} = \frac{1}{3} \Rightarrow CH = 3DE$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} = \frac{DH}{CH} = \frac{CH}{AH}$$

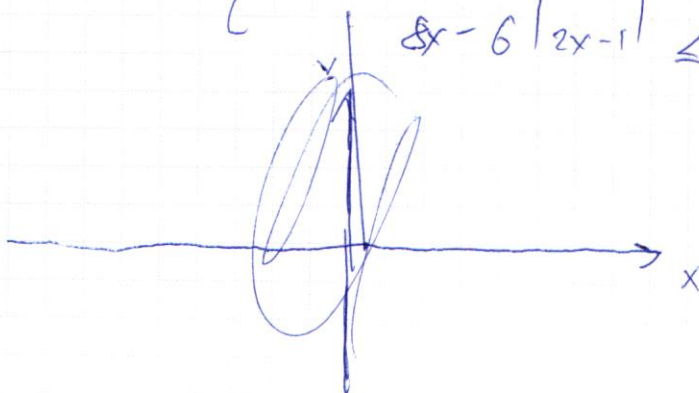


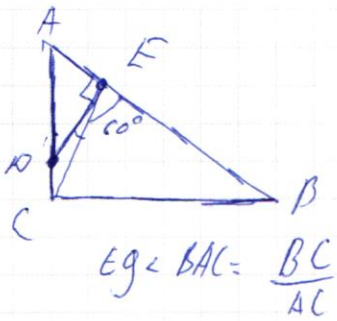
$$CD \cdot BD = AD \cdot DE = 6$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE}$$

$$|8x - 6| |2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + dx + 7$$

$$\begin{aligned} x &\geq \frac{1}{2} \\ 8x - 6(2x + 1) &= \\ &= 8x - 12x + 6 = \\ &= -4x + 6 \\ &x \end{aligned}$$





$$\angle CED = 30^\circ$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = x, AC = 3x$$

$$\triangle AED \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{3x} = \frac{x}{AB} \Rightarrow \frac{AE}{3} = \frac{1}{AB}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle AKC$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \quad \frac{AD \cdot BC}{AB}$$

$$\frac{AE}{3} = \frac{1}{AB}$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$$

$$\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{3AD}$$

$$\frac{AD \cdot BC}{AB \cdot AE} = \frac{BC}{3AD}$$

$$\frac{AD}{AB \cdot AE} = \frac{1}{3AD}$$

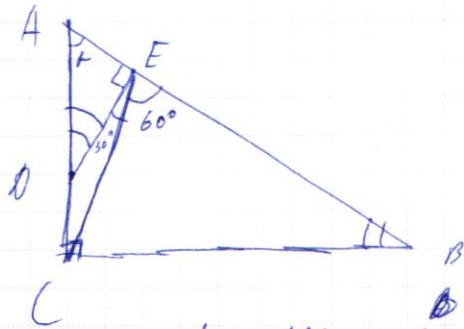
$$\frac{AD \cdot AD}{AB \cdot 3} = \frac{1}{3AD}$$

$$\frac{AD}{3} = \frac{1}{3AD}$$

$$3AD^2 = 3$$

$$AD^2 = 1$$

$$AD = 1 \Rightarrow$$



$$\text{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \text{tg} \angle DAE = \frac{DE}{AE}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{AE}{3} = \frac{1}{AB} &\Rightarrow AE = \frac{3}{AB} \\ \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC} & \end{aligned} \right.$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{AB \cdot AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{3}{AB \cdot AC} = \frac{AC}{3AB}$$

$$\frac{1}{AC}$$

$$\frac{3}{AC} = \frac{AC}{3} \Rightarrow AC^2 = 9$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AC}{3AB} = \frac{AE}{BC}$$

$$AE \cdot AB = 3$$

$$\left(\frac{AE}{AD} = \frac{3}{AD} \right)$$

$$\frac{3}{AD \cdot AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB} = \cos \alpha$$

$$\frac{3}{AB \cdot AD} = \frac{AC}{AB}$$

$$\frac{3}{AD} = AC$$

$$\frac{3}{AD} = 3AD$$

$$3AD^2 = 3$$

$$AD^2 = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{ccc} a, b, c & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b_1, b_2, b_3 & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ b_1 q & b_1 q^2 & \end{array}$$

$$b_1: ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$D = b^2 - ac$$

$$b_3 = b_1 q^2$$

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

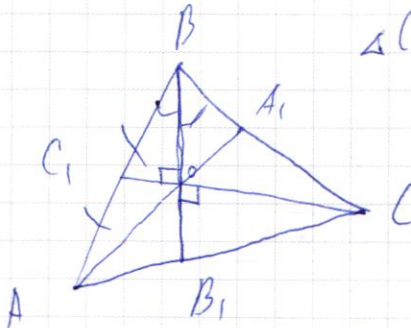
$$x_1 = \frac{b_1 q + \sqrt{(b_1 q)^2 - b_1 \cdot b_1 q^2}}{b_1} = \frac{b_1 q}{b_1} = q$$

$$b_1 q^3 = q$$

$$b_1 q^2 = 1$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$$P = a + b + c = 900$$



$$\triangle C_1 B O \sim \triangle O B C$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A B_1}{B_1 C}$$



$$\frac{A C_1}{C_1 B} = \frac{B A_1}{A_1 C} = \frac{C B_1}{B_1 A} = 1$$

$$\frac{C_1 O}{B O} = \frac{C_1 P}{A C} = \frac{B O}{O B}$$

$$\frac{B A_1}{A_1 C} = \frac{C B_1}{B_1 A} = 1$$

$$\frac{C_1 O}{B O} = \frac{B O}{O C}$$

$$\frac{B A_1}{A_1 C} = \frac{B C}{A B}$$

$$B A_1 \cdot B C = A_1 C \cdot A B$$

$$B O = \sqrt{C O \cdot O C}$$

$$C_1 B = 1$$

$$\frac{C_1 B}{B C} = \frac{C_1 O}{O C}$$

$$6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad x-6y = \sqrt{y(x-6)-(x-6)}$$

$$x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$(2) \quad x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$D = 36 - (2y^2-4y+20) =$$

$$= 36 - 2y^2 + 4y - 20 = -2y^2 + 4y + 16 =$$

$$= -2(y^2-2y-8) = -2(y-4)(y+2)$$

$$2y^2-4y+x^2-12x+20=0$$

$$D = 1+8=9 \\ y = 1 \pm 3 =$$

$$D = 4 - 2(x^2-12x+20) = 4 - 2x^2 + 24x - 40 =$$

$$= -2x^2 + 24x - 36 = -2(x^2-12x+18)$$

$$D = 36 - 18 = 18$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{-2(x^2-12x+18)}}{2}$$

$$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$$

$$36 - (2y^2-4y+20) =$$

$$= 36 - 2y^2 + 4y - 20 =$$

$$= -2y^2 + 4y + 16$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-2y^2+4y+16}}{2}$$

$$-2y^2+4y+16 =$$

$$= -2(y^2-2y-8) =$$

$$= -2((y-1)^2-9) =$$

$$= -2(y-1 \pm 3) =$$

$$x(y-1)-6$$

$$-12x-4y = -2y^2-x^2-20$$

~~$$6x-2y =$$~~

$$12x+4y = 2y^2+x^2+20$$

$$x-6y = 2y^2+x^2+20-11x-10y$$

$$x = 6 \pm \sqrt{-2(y-1)(y+2)}$$

$$6 + \sqrt{-2(y-1)(y+2)} - 6y = \sqrt{-2(y-1)(y+2)}$$