# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть числа $a, b, c$ члены геометрической прогрессии со знаменателем $q$, тогда $b=aq$, $c=aq^2$, четвертый член равен $aq^3$.

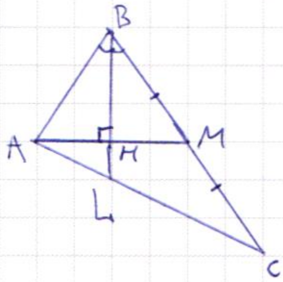
$ax^2-2bx+c = ax^2-2aqx+aq^2$.

$aq^3$ является корнем уравнения $ax^2-2aqx+aq^2=0$, поэтому $a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0$; $aq^2(aq^2-1)=0$

$$\left[\begin{array}{l} aq^2=0 \\ aq^2=1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=1. \end{array}\right.$$

Ответ: 0 или 1.

№2.




Дано: $\triangle ABC$; $BL$ - биссектриса; $AM$ - медиана; $BL \perp AM$.

$P_{ABC} = 900$.

В $\triangle ABM$ ~~проведу~~ $BH$ - ~~медиана~~ высота (по усл.) и биссектриса (по усл.), значит, $AB = BM$ (по признаку равнобед. треуг.). Пусть $AB = x$, тогда $BM = x$, $MC = x$ (т.к. $BM = MC$ по усл.).

$AC = P_{ABC} - AB - BC = P_{ABC} - AB - BM - MC = 900 - 3x$ (по усл. $P_{ABC} = 900$).

Найдём все возможные $x$, чтобы из сторон $AB = x$, $BC = 2x$ и $AC = 900 - 3x$ можно было составить треуг.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

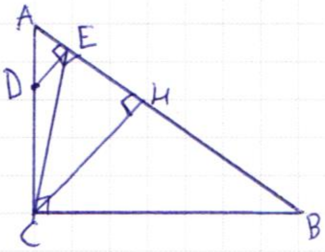
ABC. Для этого необходимо, чтобы выполнялась система:

$$\begin{cases} x+2x \geq 900-3x \\ x+900-3x > 2x \\ 2x+900-3x > x \end{cases} \quad \begin{cases} x > 150 \\ x < 225 \\ x < 450 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 150 < x < 225 \\ 151 \leq x \leq 224. \end{array}$$

Все возможные $x$ в диапазоне от 151 до 224, значит, всего вариантов 74. Понятно, что все эти $x$ подходят, так как при любом $x$ определены все стороны треугольника и они подчиняются необходимому и достаточному условию (что сумма любых двух сторон больше третьей).

Ответ: 74.

№4.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $DE \perp AB$; $\angle CED = 30°$.

Найти: $\operatorname{tg} BAC$; $S_{CED}$, если $AC = \sqrt{7}$.

Д.п. $CH \perp AB$.

1) $\triangle AED$

$\angle AED = 90°$ (по усл.) $\Big| \Rightarrow AE = AD \cos BAC$.
$DE = AD \sin BAC$

2) $\triangle AED$; $\triangle AHC$.

$\angle AED = 90°$ (по усл.)

$\angle AHC = 90°$ (по д.п.)

$\angle BAC$ – общий

$AE = AD \cos BAC$ (п. 1)

$\Big| \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle AHC$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AH} = \frac{DE}{CH} \Big| \Rightarrow$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{AE} = \frac{1}{3}$ (по усл.)

$DE = AD \sin BAC$

$\Rightarrow AH = 3AD \cdot \cos BAC$ ; $CH = 3AD \sin BAC$

3) $\angle HEC = \angle HED - \angle CED$

$\angle CED = 30^\circ$ (по усл.)

$\angle HED = 90^\circ$ (по усл.)

$\Rightarrow \angle HEC = 60^\circ$.

4) $\triangle CHE$

$\angle CHE = 90^\circ$ (по д. п.)

$\angle HEC = 60^\circ$ (п. 3)

$CH = 3AD \cdot \sin BAC$ (п. 2)

$EH = AH - AE$

$AH = 3AD \cos BAC$ (п. 2)

$AE = AD \cos BAC$ (п. 1)

$\Rightarrow \frac{CH}{EH} = tg\, 60^\circ$

$\frac{3AD \cdot \sin BAC}{2AD \cdot \cos BAC} = \sqrt{3}$

$\frac{3}{2} tg BAC = \sqrt{3}$; $tg BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5) $tg BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (п. 4) $\Rightarrow$ $1 + tg^2 BAC = \frac{1}{\cos^2 BAC}$

$\cos^2 BAC = \frac{1}{1 + tg^2 BAC}$

$\cos^2 BAC = \frac{3}{7}$

$\sin^2 BAC = 1 - \cos^2 BAC = \frac{4}{7}$.

Т. к. $\angle BAC$ — угол прямоуг. треуг. $ACB$ (по усл.), то $0 < \angle BAC < 90^\circ$, значит, $\sin BAC > 0$ и $\cos BAC > 0$, $\sin BAC = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\cos BAC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $\triangle AED$

$\angle AED = 90^\circ$ (по усл.)

$AE = AD\cos BAC$ (п. 1)

$DE = AD\sin BAC$ (п. 1)

$\Rightarrow S_{AED} = \dfrac{AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC}{2}$.

7) $\triangle AHC$

$\angle AHC = 90^\circ$ (по д.п)

$AH = 3AD\cos BAC$ (п. 2)

$CH = 3AD\sin BAC$ (п. 2)

$\Rightarrow S_{AHC} = \dfrac{9AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC}{2}$

8) $\triangle EHC$

$\angle EHC = 90^\circ$ (по д.п.)

$CH = 3AD\sin BAC$ (п. $\cancel{3}$ 2)

$EH = AH - AE$

$AH = 3AD\cos BAC$ (п. 2)

$AE = AD\cos BAC$ (п. 1)

$\Rightarrow S_{EHC} = 3AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC$.

9) $S_{CED} = S_{AHC} - S_{AED} - S_{EHD}$

$S_{AHC} = \dfrac{9AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC}{2}$ (п. 7)

$S_{AED} = \dfrac{AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC}{2}$ (п. 6)

$S_{EHC} = 3AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC$ (п. 8)

$\Rightarrow S_{CED} = AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC$.

10) $S_{CED} = AD^2 \sin BAC \cdot \cos BAC$. (п. 9)

$\sin BAC = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$; $\cos BAC = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ (п. 5)

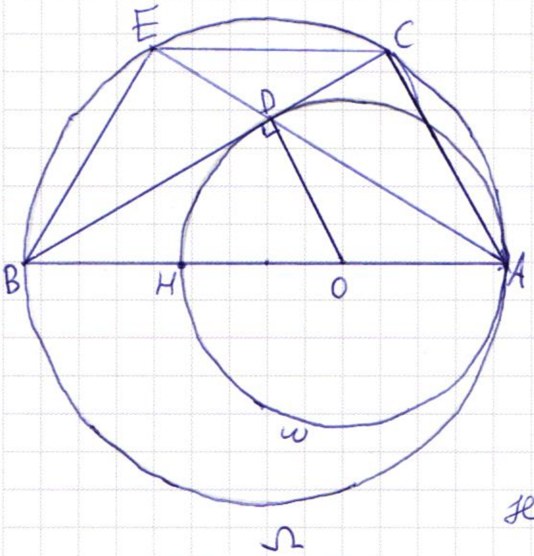
$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{1}{3}$; $AC = \sqrt{7}$ (по усл.)

$\Rightarrow S_{CED} = \dfrac{7}{9} \cdot \dfrac{2\sqrt{3}}{7} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\operatorname{tg} BAC = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.




Дано: окр $\Omega$ и окр $\omega$ касаются внутренне в т. $A$.

$AB$ – диаметр.

$BD$ – касат. к окр. $\omega$.

$CD = 2$; $BD = 3$.

Найти: $R$, $r$, $S_{ACEB}$, где $R$ – радиус окр $\Omega$, $r$ – радиус окр $\omega$.

Д. п.: $O$ – центр окр $\omega$, очевидно, что он лежит на $AB$. $OD$.

1) $\angle ACB$, $\angle AEB$ – впис. (по усл.)
$AB$ – диаметр (по усл.)
$\Rightarrow \angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$.

2) окр. $\omega$.
$BD$ – касат. (по усл.)
$\Rightarrow OD \perp BD$ (по св-ву ~~радиу~~ радиуса, проведенного в точку касания).

3) $\triangle OBD$; $\triangle ABC$
$\angle ODB = 90^\circ$ (п. 2)
$\angle ACB = 90^\circ$ (п. 1)
$\angle ABC$ – общий
$OA = OD = r$ (как радиусы окр $\omega$)
$AB = 2R$ (как диаметр окр $\Omega$ (по усл.)).
$CD = 2$; $BD = 3$ (по усл.)
$OB = AB - OA$; $BC = BD + DC$.

$\Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle ABC$ (по двум углам) $\Rightarrow \dfrac{OD}{AC} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO}{BA}$

$$\frac{r}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{2R-r}{2R}$$

$$\begin{cases} AC = \frac{5}{3} r \\ r = \frac{4}{5} R. \end{cases}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) окр $\omega$

BD – ~~сек~~ касат. (по усл.)

$BD = 3$ (по усл.)

$BH = AB - AH$

$AB = 2R$ (как диаметр окр $\Omega$) (по усл.)

$AH = 2r$ (как диаметр. окр $\omega$)

$r = \frac{4}{5}R$ (п. 3)

$\Rightarrow BD^2 = BH \cdot BA$ (по св-ву касат. и сек.)

$3^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$9 = (2R - \frac{8}{5}R) \cdot 2R$

$9 = \frac{4}{5}R^2$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$ ; $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$

5) $\triangle ADC$

$\angle ACD = 90°$ (п. 1)

$AC = \frac{5}{3} r$ (п. 3)

$r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ (п. 4)

$CD = 2$ (по усл.)

$\Rightarrow S_{ACD} = 2\sqrt{5}$; $AD^2 = AC^2 + CD^2$ (по теор. Пифагора)

$AD = \sqrt{20+4} = 2\sqrt{6}$

6) $\triangle ADC$ ; $\triangle BDE$

$\angle ACD = \angle BED = 90°$ (п. 1)

$\angle ADC = \angle BDE$ (по св-ву вертик. углов)

$S_{ADC} = 2\sqrt{5}$ (п. 5)

$AD = 2\sqrt{6}$ (п. 5)

$BD = 3$ (по усл.)

$\Rightarrow \triangle ADC \approx \triangle BDE$ (по двум углам $\Rightarrow \frac{S_{BDE}}{S_{ADC}} = \left(\frac{BD}{AD}\right)^2$

~~$S_{BDE} = 2\sqrt{5} \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{16\sqrt{5}}{3}$~~

$S_{BDE} = 2\sqrt{5} \cdot \frac{9}{24} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$

7) $\triangle ABC$

$\angle ACB = 90°$ (п. 1)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BC = BD + CD$

$BD = 3$; $CD = 2$ (по усл.)

$AC = \frac{5}{3} r$ (п. 3)

$r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$ (п. 4)

$\Rightarrow S_{ABC} = 5\sqrt{5}$.

8) $S_{ADB} = S_{ABC} - S_{ACD}$

$S_{ABC} = 5\sqrt{5}$ (п. 7)

$S_{ACD} = 2\sqrt{5}$ (п. 5)

$\Rightarrow S_{ADB} = 3\sqrt{5}$.

9) $\triangle ADB$; $\triangle CDE$

$\angle ABD = \angle CED$ (по св-ву вписанных углов)

$\angle ADB = \angle CDE$ (по св-ву вертик. углов)

$AD = 2\sqrt{6}$ (п. 5)

$CD = 2$ (по усл.)

$S_{ADB} = 3\sqrt{5}$ (п. 8)

$\Rightarrow \triangle ADB \approx \triangle CDE$ (по двум углам) $\Rightarrow \frac{S_{CDE}}{S_{ADB}} = \left(\frac{CD}{AD}\right)^2$

$S_{CDE} = 3\sqrt{5} \cdot \frac{4}{24} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

10) $S_{ABEC} = S_{ACB} + S_{CDE} + S_{DEB}$

$S_{ACB} = 5\sqrt{5}$ (п. 7)

$S_{CDE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (п. 9)

$S_{DEB} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ (п. 6)

$\Rightarrow S_{ABEC} = 5\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{20\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4} = 6\frac{1}{4}\sqrt{5}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $r = \frac{6}{5}\sqrt{5}$; $S_{ACEB} = 6\frac{1}{4}\sqrt{5}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Воспользуемся равенством $f(ab)=f(a)+f(b)$ и получим, что $f(x)=f(y)+f(\frac{x}{y})$, $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$. $x$ и $y$ принимают значения от 2 до 22, значит, если $x=a$, $y=b$ и $f(\frac{x}{y})<0$, то при $x=b$ и $y=a$ $f(\frac{x}{y})>0$, так как $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$. Из этого следует, что положительных значений $f(\frac{x}{y})$ столько же, сколько и отрицательных, поэтому из всех пар $(x;y)$ надо вычесть те, при которых $f(\frac{x}{y})=0$, и разделить на 2, это и будет ответом. $f(\frac{x}{y})=0$, $f(x)-f(y)=0$, $f(x)=f(y)$.

$f(2)=[\frac{2}{2}]=1.$

$f(3)=[\frac{3}{2}]=1$

$f(4)=f(2)+f(2)=1+1=2.$

$f(5)=[\frac{5}{2}]=2$

$f(6)=f(2)+f(3)=2$

$f(7)=[\frac{7}{2}]=3$

$f(8)=f(4)+f(2)=3$

$f(9)=f(3)+f(3)=2$

$f(10)=f(2)+f(5)=3$

$f(11)=[\frac{11}{2}]=5$

$f(12)=f(6)+f(2)=3$

$f(13)=[\frac{13}{2}]=6$

$f(14)=f(7)+f(2)=4$

$f(15)=f(5)+f(3)=3$

$f(16)=f(8)+f(2)=4$

$f(17)=[\frac{17}{2}]=8$

$f(18)=f(2)+f(9)=3$

$f(19)=[\frac{19}{2}]=9$

$f(20)=f(10)+f(2)=4$

$f(21)=f(7)+f(3)=4$

$f(22)=f(11)+f(2)=6$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из этих 21 полученных значений 1 встречался 2 раза, 2 – 4 раза, 3 – 6 раз, 4 – 4 раза, 5 – 1 раз, 6 – 2 раза, 8 – 1 раз, 9 – 1 раз. Теперь нужно посчитать количество способов взять пару $(x; y)$, чтобы $f(x) = f(y)$. ~~Количество~~, ~~Чтобы~~

Способов взять пару $(x; y)$, чтобы $f(x) = f(y) = 1$ равно $2 \cdot 2 = 4$ (два варианта для $x$, два варианта для $y$), а чтобы $f(x) = f(y) = 2$ равно $4 \cdot 4 = 16$, и так далее. Значит, всего пар $(x; y)$ таких, что $f(x) = f(y)$ равно $2^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 =$
$= 4 + 16 + 36 + 16 + 5 = 77$.

Всего количество пар $(x; y)$ равно $21 \cdot 21 = 441$, тогда пар $(x; y)$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, как было сказано уже раньше, равно $\frac{441-77}{2} = \frac{364}{2} = 182$.

Ответ: 182 пары.

№6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + (a-6)x + b - 7 \le 0$

$D = a^2 - 12a + 36 - 8b + 56 = a^2 - 12a - 8b + 92 > 0$ (т.к. старший коэффициент положит.)

Чтобы $8x^2 + (a-6)x + b - 7 \le 0$ на $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$, необходимо:

$$\begin{cases} \frac{6-a + \sqrt{a^2-12a-8b+92}}{16} \ge 1 \\ \frac{6-a + \sqrt{a^2-12a-8b+92}}{16} \le -\frac{1}{2} \end{cases}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a,\ aq,\ aq^2$ $\quad 36y^2-(6+x)y+x^2+x-6=0$

$D=x^2+12x+36-4x^2-4x+24=$

$=3x^2+8x+60$

$ax^2-2aqx+aq^2=0$

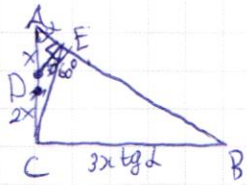
$a^3q^8-2a^2q^5+aq^2=0$

$a^2q^6-2aq^3+1=0$

$(aq^3-1)^2=0$

$aq^3=1$

$c=1$



$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$

$x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$\frac{D}{4}=36-2y^2+8y-20$

$-2y^2+8y+16$

$y^2+tg^2y^2=x$

$x^2+9(1-y)x+36y^2-6y-6$

$a^3q^6-2a^2q^4+aq^2=0$

$2y^2-4y+x^2-12x+20$

$a^2q^4-2aq^2+1=0$

$\frac{D}{4}=4-2x^2+24x-40$

$y^2-2y+1-144y^2+24y+24$

$a(a^2q^2-1)^2=0$

$aq^2=1$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 6y \\ x^2-12y+36y^2-xy+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$36+2$ $\quad -18$

$$\begin{cases} x\geq 6y \\ x^2-6y+36y^2-xy+x-6=0 \\ x^2-4y+2y^2-12x+20=0 \end{cases}$$

$2x^2-10y+38y^2\ 2xy-13x+14=0$

$(x-6)(y-1)$

$2((x-6y)^2-(x-6)(y-1))$

$(x-6)^2+2(y-1)^2$

$-2y+34y^2-xy=$

$2(x-6y)^2+2(x-6)(y-1)+$

$-x^2+2y+40y^2-xy+24x+x-46=0$

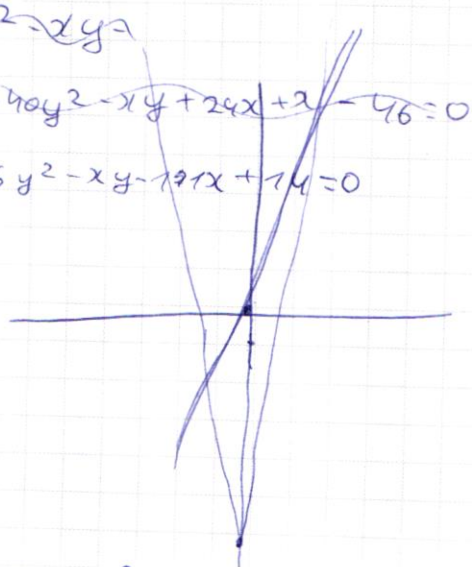
$+(y-1)^2+(x-y+5)^2=18$

$2x^2-10y+36y^2-xy-11x+14=0$

$x^2+2x+1$

$\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}$

$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$



$4x^2-20y+72y^2-2xy-22x+28=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

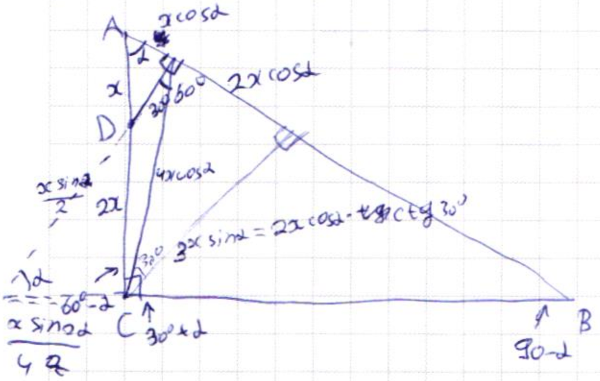
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

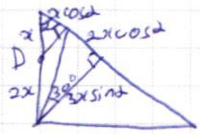
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




~~y = 2x cosα~~

$$\frac{x\cos\alpha}{3x} = \frac{x}{AB}$$

$$\frac{x}{AB} = \frac{\cos\alpha}{3}$$

$$\frac{2x\cos\alpha}{3x\sin\alpha} = tg\, 30^0$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} = tg\,\alpha$$

$16 - 4 = 12\ x\cos\alpha$

$ctg\, 30^0 = \sqrt{3}$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $tg^2\alpha = \frac{4}{3}$

$3x\sin\alpha = 2x\sqrt{3}\cos\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\cos^2\alpha = \frac{3}{7}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

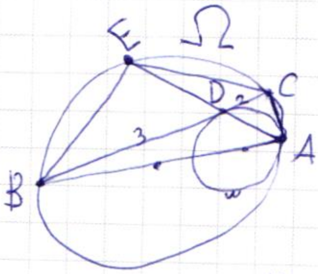
$$S_{CED} = 3x\cos\alpha \cdot 2x\cos\alpha \cdot ctg 30^0 - \frac{x^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} - 2x\cos\alpha\, x\cos\alpha \cdot ctg 30^0 =$$

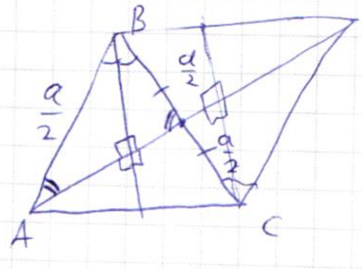
$\sin^2\alpha = \frac{4}{7}$

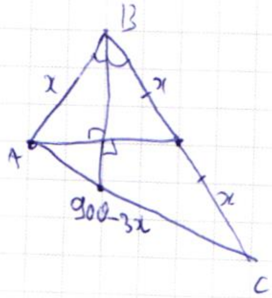
$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$$= 3\cdot x^2 \cdot \frac{3}{7}\cdot\sqrt{3} - 2x^2\cdot\frac{3}{7}\cdot\sqrt{3} - x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} =$$

$$= x^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{7} - x^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{7} = \cancel{2x^2\sqrt{3}}\ \frac{2\sqrt{3}x^2}{7} = \frac{2\sqrt{3}\cdot 7}{9\cdot 7} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$




151−224.

74 треуг.

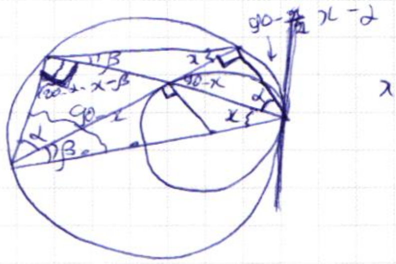
$3x > 900 - 3x$

$6x > 900$

$x > 150$

$900 - 2x > 2x$

$900 > 4x$, $x < 225$




$x=\alpha$

$3^2=2R\cdot(2R-2r)$

$\frac{r\cdot 5}{3}$

$\frac{2R-r}{3}=\frac{2R}{5}$

$10R-5r=6R$

$4R=5r$

$r=\frac{4}{5}R$

$3^2=2R\cdot(2R-\frac{8}{5}R)$

$3^2=2R\cdot\frac{2}{5}R$

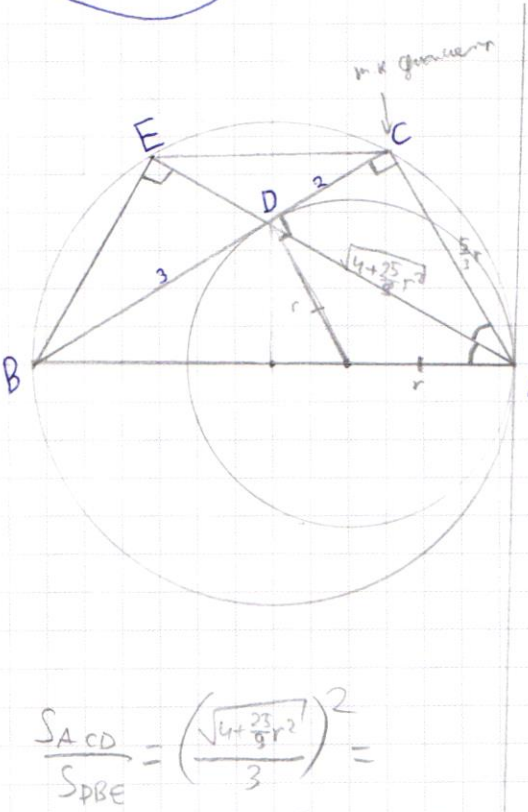
$\frac{45}{4}=R^2$

$R=\frac{3}{2}\sqrt{5}$

$r=\frac{6}{5}\sqrt{5}$

$\sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}=\sqrt{4+\frac{25\cdot 36}{9\cdot 25}5}=\sqrt{24}=$

$=2\sqrt{6}$




$\frac{S_{ACD}}{S_{DBE}}=\left(\frac{\sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}}{3}\right)^2=$

$=\frac{4+\frac{25}{9}\cdot\frac{36}{25}\cdot 5}{9}=$

$=\frac{4+20}{9}=\frac{8}{3}.$

$S_{DBE}=\frac{3}{8}S_{ACD}$

$\frac{S_{EDC}}{S_{ADB}}=\left(\frac{2}{\sqrt{4+\frac{25}{9}r^2}}\right)^2=\frac{4}{4+\frac{25}{9}\cdot\frac{36}{25}\cdot 5}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$

$S_{EDC}=\frac{1}{6}S_{ADB}$

$S_{ACD}=\frac{5}{3}r\rightarrow S_{EDB}=\frac{5}{8}r.$

$S_{ACB}=\frac{25}{6}r\rightarrow S_{ADB}=\frac{15}{6}r=\frac{5}{2}r\rightarrow S_{EDC}=\frac{5}{12}r$

$S_{ACEB}=\frac{5}{2}r+\frac{5}{12}r+\frac{5}{8}r+\frac{5}{3}r=\frac{55}{12}r+\frac{5}{8}r=\frac{110+15}{24}r=\frac{125}{24}r=$

$=\frac{25}{4}\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

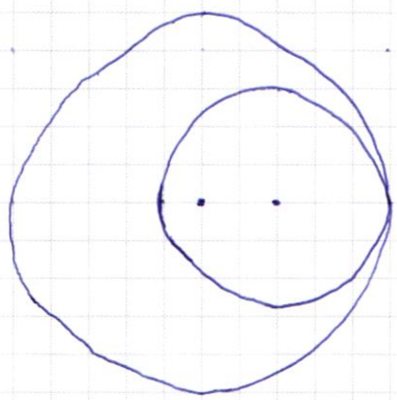
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$



Всего – равные

2

$x = p_1 p_2 p_3$

$f(x) = f(p_1) \cdot f(p_2) \cdot f(p_3)$

$\cancel{-8x^2+6x+7 - 7}$

$-8x^2 + (6-a)x + 7 - b \geq 0.$

$D = 36 - 12a + a^2 + 56 - 8b > 0$

$a^2 - 12a - 8b + 92 > 0$

$\frac{6 \pm \sqrt{a^2 - 12a - 8b + 92}}{16} \geq 1$

$\frac{6 - \sqrt{a^2 - 12a - 8b + 92}}{16} \leq -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)