МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Представим b и c в виде $b = qa$, $c = q^2 a$, где q – какой-то множитель.

2) Поскольку:
$a, aq, aq^2 \dots$ – геом. прогрессия, то
$(a \neq 0, q \neq 0)$
тогда: $ax^2 + 2bx + c = ax^2 + 2qax + q^2 a =$
$= x^2 + 2qx + q^2 = (x+q)^2$

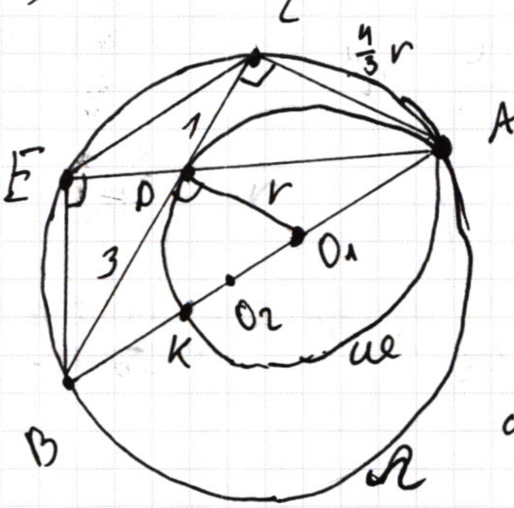
3) Обозначим α – 4-член данной прогрессии
тогда $\alpha = q^3 a$ (*)
также из условия α – корень $(x+q)^2 = 0$
значит $\alpha = -q$ (•)
~~Рассмотрим~~ Подставим (•) в (*)
$-q = q^3 a$
$q(q^2 a + 1) = 0$
$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q^2 a = -1 \end{array}\right.$ (из п. 2 $q \neq 0$), значит $q^2 a = -1$

Поскольку c – третий член прогрессии
$c = q^2 a = -1$

Ответ: -1

№5

1)



1) Заметим, поскольку A – т. кас. AB – диаметр окружности Ω, то оба центра двух окружностей будут находится на AB

2) Заметим также, что, поскольку AB – диаметр, то $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$

3) Поскольку $CD \cdot BD = 3$, то $ED \cdot AD = 3$

4) Проведём O_1D, тогда $O_1D \perp BD$

5) Пусть K – т. пересечения BA с меньшей окружностью

6) Заметим, что $BD^2 = BK \cdot AB$ (•)

7) Введём обозначения R – радиус большой окружности, r – радиус меньшей окружности

(•) перепишется как $9 = BK \cdot 2R$

$BK = \frac{9}{2R}$

8) $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ | $AC = \frac{4}{3}r$

9) ~~Пот Пифагора $\triangle ABC$~~

$\frac{\frac{4}{3}r}{2R} = \frac{r}{\underbrace{\frac{9}{2R} + r}_{O_1B}}$; $\cancel{\frac{2r}{6R} = \frac{2Rr}{9 \cdot 2R}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\frac{1}{3R} = \frac{3R}{9+2Rr}}$

$\cancel{9 + 2Rr = 9R^2}$

$\cancel{2Rr = 6R^2 - 9}$

$\cancel{r = \frac{6R^2+9}{2R}}$

$\cancel{r = 3R - \frac{9}{2R}}$

10) $\cancel{BO_1 = 3R - \frac{9}{2R} + \frac{9}{2R}}$

$\frac{1}{O_1B} = \frac{4}{6R}$

$O_1B = 1{,}5R$

10) $r = 1{,}5R - \frac{9}{2R}$

11) По т. пифагора $\triangle BDO_1$:

$9 + \left(1{,}5R - \frac{9}{2R}\right)^2 = (1{,}5R)^2$

$9 + \frac{81}{4R^2} - \frac{3}{2}R \cdot \frac{9}{R} = 0$

$9 + \frac{81}{4R^2} - \frac{27}{2} = 0$

$1 + \frac{9}{4R^2} - \frac{3}{2} = 0$

$\frac{9}{4R^2} = \frac{1}{2}$

$\frac{4R^2}{9} = 2$

$R^2 = \frac{2 \cdot 9}{4}$

$R = \sqrt{4{,}5}$

$R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}$

$r = \frac{9}{2\sqrt{2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

12) По т. пифагора $\triangle ACD$

$AD^2 = 1 + \frac{16}{9} \cdot \frac{9 \cdot 2}{16} = 3$

$AD = \sqrt{3}$

13) Из пункта 3 $ED = \frac{3}{\sqrt{3}}$

14) $EA = \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{3}}$

15) $\sin\angle CDA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

16) $S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{6}{3} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$; $R_{\Omega} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $r_{\omega} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

№6

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

Рассмотрим

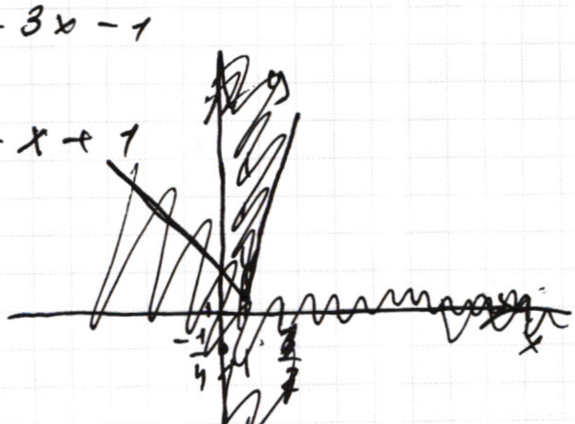
$f(x) = x + |2x - 1|$

$g(x) = 2x^2 - x - 1$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ f(x) = 3x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ f(x) = -x + 1 \end{cases} \end{array}\right.$

минимальное значение $f(x)$

достигается в точке $\frac{1}{2}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

максимальное значение $y(x)$ достигается в (на отрезке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$)

точке $\cancel{\frac{3}{2}}$ $x = \frac{3}{2}$

Тогда

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

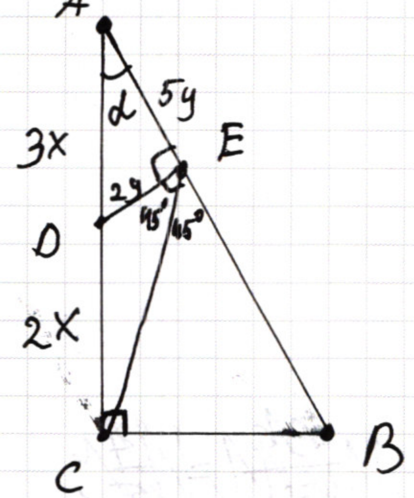
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a)



N 4

1) Пусть $\angle BAC = \alpha$; $DC = 2x$; $AD = 3x$

2) $\angle ADE = 90 - \alpha$

3) $\angle DCE = 90 - \alpha - 45 = 45 - \alpha$

4) по т. син $\triangle DCE$:

$$\frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{DE}{\sin(45-\alpha)}$$

$$\frac{4x}{\sqrt{2}} = \frac{DE}{\sin(45-\alpha)}$$

$$DE = \frac{4x \cdot \sin(45-\alpha)}{\sqrt{2}}$$

5) из $\triangle ADE$:

$$\sin\alpha = \frac{DE}{3x}$$

$$\sin\alpha = \frac{4x \cdot \sin(45-\alpha)}{3\sqrt{2}x}$$

$$\sin\alpha = \frac{4x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{3\sqrt{2}x}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\cos\alpha - 2\sin\alpha}{3}$$ (Поскольку $\left(\begin{matrix}\alpha \neq 90^\circ \\ \alpha < 180^\circ\end{matrix}\right)$ то $\cos\alpha \neq 0$)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$tg\alpha = \frac{2 - 2tg\alpha}{3}$$

$$3tg\alpha = 2 - 2tg\alpha$$

$$5tg\alpha = 2$$

$$tg\alpha = \frac{2}{5}$$

б) Поскольку $AC = \sqrt{29}$

$$5x = \sqrt{29}$$

$$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$$

• Пусть $DE = 2y$

$AE = 5y$

Тогда: по Т. Пифагора $\triangle AED$:

$$4y^2 + 25y^2 = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{29}}{5}\right)^2$$

$$29y^2 = \frac{9}{25} \cdot 29$$

$$y^2 = \frac{9}{25}$$

$$y = \frac{3}{5}$$

Продолжение на сл. стр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4 (продолжение)

• $DE = \frac{6}{5}$

$AE = 3$

• $\cancel{S_{\triangle ADE} = \frac{6}{5}\cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{5}}$

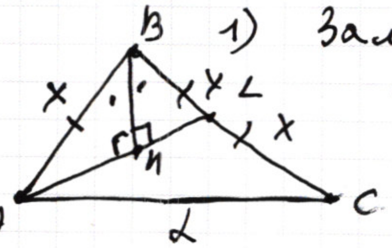
• $\sin\angle ADE = \dfrac{3}{\frac{\sqrt{29}}{5}\cdot 3} = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

• $S_{CDE} = CD\cdot DE\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin\angle ADE =$
$= \frac{6}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{29}}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

• CE

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{5}$

№ 2



1) Заметим, что при таком условии одна сторона всегда должна быть в 2 раза больше другой
(поскольку ABL – △
BH – биссек и высота)

2) Обозначим одну из сторон x, другую $2x$ и третью d, тогда
$$\begin{cases} 3x + d = 1200 \\ 3x > d \\ 2x + d > x \\ x + d > 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + d = 1200 \\ 3x > d > x \end{cases}$$

рассмотрим неравенство: $3x > \alpha > x$

$$6x > 1200 > 4x$$

$$3x > 600 > 2x$$

Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, то $x_{min} = 199$

$$x_{max} = 299$$

Тогда

$$299 - 199 + 1 = 101$$

Ответ: 101

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{(y-2)\cdot(x-1)} \\ (y-2)^2 + (x^2-1) + x(x-4) = 0 \end{cases} \qquad \bullet\ y \geq 2x$$

$$\cancel{\begin{cases} (y-2x)^2 = (y-2)\cdot(x-1) \\ (y-2)^2 + (x^2-1) + x(x-4) = 0 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} (y-2x)^2 = (y-2)\cdot(x-1) \\ (y-2)^2 + (x-1)^2 = -x^2 + 2x + 2 \end{cases}$$

$$(y - 2 - x + 1)^2 = -x^2 + 2x + 2 - 2(y-2x)^2$$

$$(y - x - 1)^2 = -x(x-2) - 2(y-2x)^2 + 2$$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$DB = \frac{3}{2} C$

$y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0$

$DE = \frac{2}{3}(\cos\alpha - \sin\alpha) = \sin\alpha$

$DE = \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{2}{3}\sin\alpha = \sin\alpha$

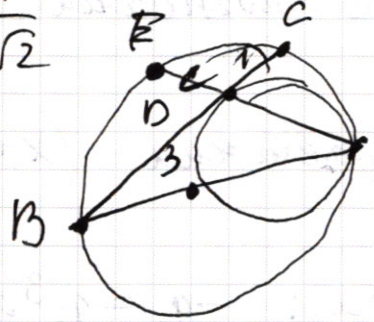
$\frac{2}{3}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{2}{3} =$

$2x^2 - 1 R^2 - 2R^2.$

$200 - 4 - 2$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$ED \cdot AD = 3$



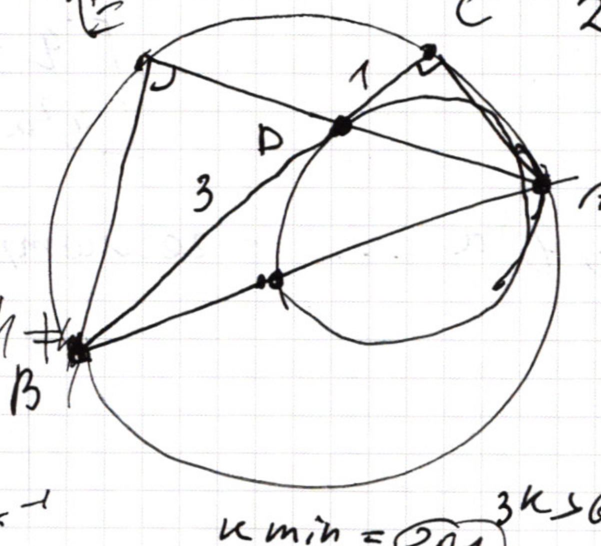
$\frac{1}{2}$

-1

$2k + k = \alpha$

$y^2 - 4x + 4$

$(y-2)^2$



$\alpha + 3k = 1200$

$k + \alpha > 2k$

$\alpha > k$

$3k > \alpha$

$3k > 600 > 2k$

$k_{min} = 201$

$r_{max} = 299$

$3k > \alpha > k$

$6k > 1200 > 4k$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Представим b и c в виде: $b = qa$, $c = q^2a$, где q - какой-то коэф.

2) если $a = 0$, то, очевидно, что $c = 0$

3) если $a \neq 0$, тогда:

$$ax^2 + 2qax + q^2a = x^2 + 2qx + q^2 = (x+q)^2$$

~~Тогда~~ Пусть α - 4 член прогрессии

(*) $\alpha = q^3a$

Поскольку α-корень уравнения $(x+q)^2 = 0$, то

(•) $\alpha = -q$

из (*) и (•) получаем: $-q = q^3a$

$$q(q^2a + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ q^2a = -1 = c \end{array}\right.$$

Поскольку:

$a, qa, q^2a, q^3a \dots$ - геометрическая прогрессия

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$(y-2)^2+(x-1)^2+2x^2-2x-2$

a b c

• если $a=0$

• если $a\neq 0$

$b=qa$

$c=qa^2$

$ax^2+2qax+qa^2=0$

• $a>0$

• $a<0$

$x^2+2qx+qa=0$

$4q^2-4qa\geq 0$

• $a>0$

x_1x

$q(4q-a)\geq 0$

$(x-1)\cdot(x$

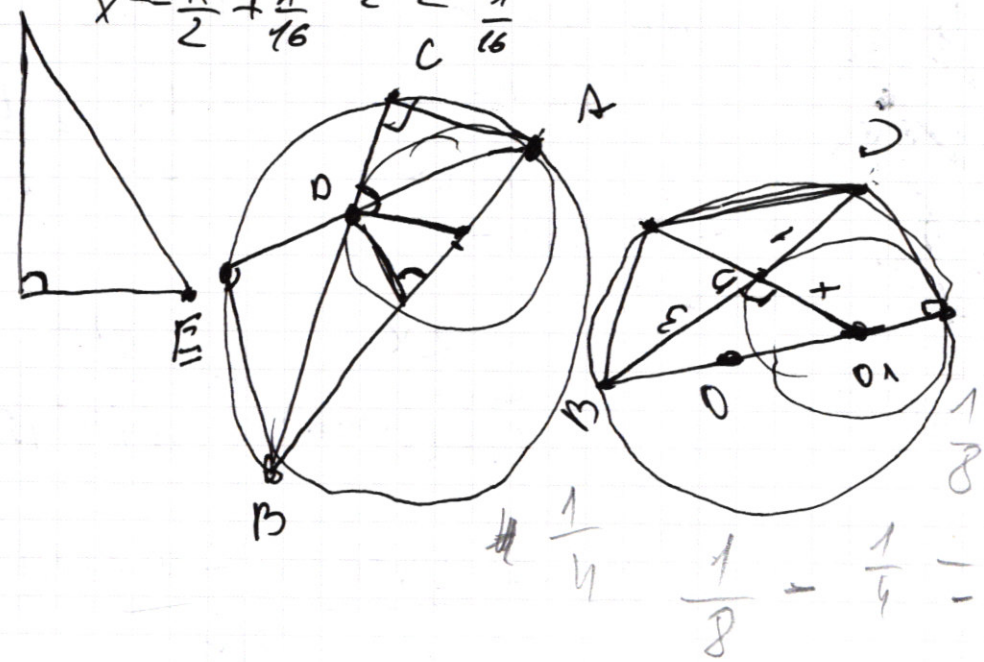
$+ \quad - \quad +$

$\frac{a}{4} \quad 0 \quad \frac{a}{4} \quad q$

$q\notin(0;\frac{a}{4})$

$2(x^2-\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$

$x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}$ $\quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{16}$



$\frac{1}{8}-\frac{2}{8}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a;b,c$ $\quad a \quad b=aq \quad c=aq^2$

$ax^2+2bx+c=0 \Rightarrow ax^2+2aqx+aq^2=0$

• если $a=0$ $\quad x^2 \quad x(y-2) \quad -(y-2)$

$c=0$

$(x-1)\cdot(y-2)$

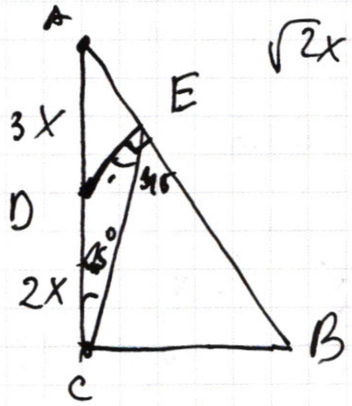
• если $a\neq 0$ $\quad x^2+2qx+q^2=0$

$D=4q^2-4q^2=0$

$(y-2)^2+(x^2-1)+x^2-4x \quad (x^2+q)^2=0 \quad -q$

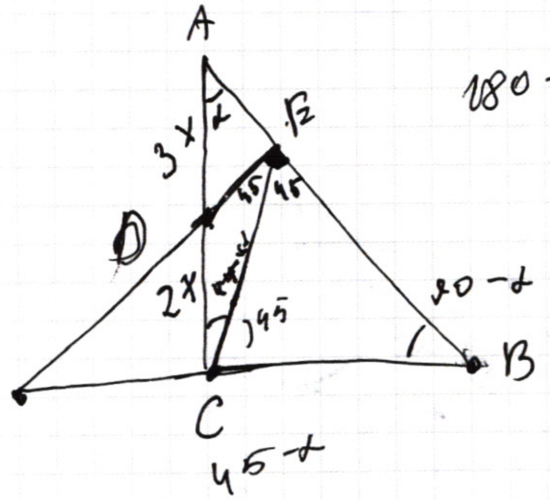
$DE=\frac{4x\sin(45-\alpha)}{\sqrt2}$

$\sqrt2 x$



$DE=\frac{4x\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha\right)}{\sqrt2}$

$\frac{2x}{\frac{\sqrt2}{2}}=\frac{DE}{\sin 45-\alpha}$



$180-90-\alpha$

$90+\alpha-45$

$45+\alpha$

$90-$

$\frac{4x}{\sqrt2}=\frac{DE}{\sin 45-\alpha}$

$\frac{2x}{\sin(45+\alpha)}=\frac{DE}{\sin(45-\alpha)}$

$DE=\frac{2x\cos\alpha-2x\sin\alpha}{3x}=\sin\alpha$